

# Ueber die Erzeugnisse projektiver linearer Kreisreihen

Autor(en): **Stiner, G.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Thurgauischen Naturforschenden Gesellschaft**

Band (Jahr): **11 (1894)**

PDF erstellt am: **01.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-594107>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Ueber die Erzeugnisse projektiver linearer Kreisreihen.

Von  
Dr. G. Stiner in Frauenfeld.

## I.

1. Der französische Geometer *E. de Jonquières* führte im Jahr 1861 den Begriff *Index einer Kurvenreihe* ein.\*) Er definierte als Index  $I$  einer einfach unendlichen Kurvenreihe die Anzahl derjenigen Kurven der Reihe, welche durch einen beliebigen Punkt gehen. Ferner stellte er den Satz auf, daß das Erzeugnis einer Kurvenreihe von der Ordnung  $n_1$  und dem Index  $I_1$  und einer dazu projektiven Reihe von der Ordnung  $n_2$  und dem Index  $I_2$  eine Kurve ist von der Ordnung  $n_1 I_2 + n_2 I_1$ .

Sind die beiden projektiven Kurvenreihen *Kreisreihen*, so ist ihr Erzeugnis eine Kurve von der Ordnung  $2(I_1 + I_2)$ . Im Folgenden soll das Erzeugnis von 2 projektiven *linearen* Kreisreihen untersucht werden.

Es sei ein fester Punkt  $S$  angenommen und durch diesen eine feste Gerade  $x$ . Ist  $M$  ein beliebiger Punkt von  $x$  und  $SM = \mu$ , so konstruiere man um  $M$  als Mittelpunkt einen Kreis, dessen Radius gleich ist  $k \cdot \mu$ , wo  $k$  für alle Punkte von  $x$  dieselbe positive Konstante bedeutet. Auf diese Weise entstehen einfach unendlich viele Kreise. Je 2 derselben liegen ähnlich bezüglich  $S$  als Aehnlichkeitszentrum. Die so definierte Reihe von Kreisen heißt eine Lineare. Ist  $k < 1$ , so haben alle Kreise der Reihe 2 reelle gemeinschaftliche Tangenten

\*) Théorèmes généraux concernant les courbes géométriques planes d'un ordre quelconque. Journal de Liouville, Avril 1861.

10741  
126516

durch  $S$  und  $k$  ist gleich dem sinus des halben von diesen Tangenten eingeschlossenen Winkels. Ist  $k = 1$ , so berühren sich sämtliche Kreise der Reihe in  $S$ ; die Reihe geht also dann über in ein Büschel von Kreisen. Ist endlich  $k > 1$ , so haben alle Kreise der Reihe 2 imaginäre gemeinschaftliche Tangenten durch  $S$ ; dieser Punkt ist also dann im Innern aller Kreise der Reihe.

Ist außer dieser ersten Reihe noch eine zweite gegeben durch die Bestimmungselemente  $S_1$ ,  $x'$  und  $k'$ , so ist eine projektive Zuordnung der Kreise der einen Reihe zu denen der andern möglich, wenn man den Punkten  $M$  von  $x$  die Punkte  $M'$  von  $x'$  projektiv zuordnet. Die beiden so definierten Kreisreihen sind vom Index 2; das Erzeugnis obiger projektiver Zuordnung ist demnach eine *Kurve achter Ordnung*, deren Haupteigenschaften entwickelt werden sollen.

Man kann zu diesem Zweck mit Vorteil räumliche Anschauungen benützen.

2. Die Ebene der Kreisreihen sei die Bildebene einer orthogonalen Parallelprojektion. Die Kreise der einen Reihe, z. B. diejenigen der zweiten, können dann betrachtet werden als Projektionen der Querschnitte eines schiefen Kreiskegels  $K^2$  mit den zur Bildebene parallelen Ebenen. Aus der ersten Kreisreihe läßt sich dann eine andere Fläche ableiten in folgender Weise:  $K$  und  $K^1$  seien ein Paar korrespondierender Kreise beider Reihen.  $K'$  sei die Projektion des Querschnittes  $K'^*$  von  $K^2$  mit einer Ebene  $E$  parallel der Bildebene. Man konstruiert nun in der Ebene  $E$  denjenigen Kreis  $K^*$ , dessen Projektion  $K$  ist. Macht man diese Konstruktion für alle Paare korrespondierender Kreise  $KK'$ , so erfüllen die Kreise  $K^*$  eine gewisse Fläche  $F$ .

Die Projektion der Durchdringungskurve von  $F$  und  $K^2$  auf die Bildebene ist das gesuchte Erzeugnis der beiden projektiven Kreisreihen.

Es ist also notwendig, die Fläche  $F$  näher zu untersuchen.

3. Legt man durch den Punkt  $S_1$  eine Gerade, so ist diese zu betrachten als Projektion der 2 Erzeugenden des Kegels  $K^2$ , welche in der projicierenden Ebene jener Geraden liegen. Jede dieser Erzeugenden enthält die Originalpunkte

im Raume zu homolog liegenden Punkten der Reihe ähnlich liegender Kreise  $K'$ . Legt man ebenso eine Gerade  $s$  durch den Punkt  $S$ , so tritt die Frage auf: Welche Kurven werden nach Art. 2 erzeugt durch die Originalpunkte im Raum zu den 2 Reihen homolog liegender Bildpunkte, welche durch die Reihe der Kreise  $K$  ausgeschnitten werden auf  $s$ . (v. Fig. 1.) Oder: Sind  $K_1 K_2 K_3 \dots$  die Kreise der Reihe, die  $s$  einerseits in der Punktreihe  $G_1 G_2 G_3 \dots$  und anderseits in der Punktreihe  $H_1 H_2 H_3 \dots$  schneiden, welche Kurven werden dann erzeugt durch die nach Art. 2 konstruierten Originalpunkte  $G_1^* G_2^* G_3^* \dots$  und  $H_1^* H_2^* H_3^* \dots$ . Es soll gezeigt werden, daß der Ort von  $G_1^* G_2^* G_3^* \dots$  eine gleichseitige Hyperbel ist, deren eine Asymptote senkrecht zur Bildebene ist, ebenso der Ort von  $H_1^* H_2^* H_3^* \dots$ . Um dies zu beweisen hat man sich nur die Konstruktion dieser Punkte zu vergegenwärtigen. Der Ort von  $G_i^*$  wird gefunden, wenn man in  $G_i$  die Normale  $g_i$  zur Bildebene errichtet und diese schneidet mit der Ebene  $E_i$ . Die Ebene  $E_i$  trifft die projicierende Ebene von  $g$  nach einer Geraden  $e_i$ ; der Schnittpunkt von  $g_i$  und  $e_i$  ist  $G_i^*$ . Sind nun  $M_1 M_2 M_3 \dots$  und  $M'_1 M'_2 M'_3 \dots$  die Mittelpunkte der betreffenden Kreise und  $M'_1^* M'_2^* M'_3^* \dots$  die Originalpunkte zu  $M'_1 M'_2 M'_3 \dots$ , so bestehen folgende Projektivitäten:

$$\begin{aligned} (g_1 g_2 g_3 \dots) &= (G_1 G_2 G_3 \dots) = (M_1 M_2 M_3 \dots) = \\ (M'_1 M'_2 M'_3 \dots) &= (M'_1^* M'_2^* M'_3^* \dots) = (E_1 E_2 E_3 \dots) = \\ &= (e_1 e_2 e_3 \dots). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$(g_1 g_2 g_3 \dots) = (e_1 e_2 e_3 \dots).$$

Ebenso erhält man

$$(h_1 h_2 h_3 \dots) = (e_1 e_2 e_3 \dots)$$

Die Punkte  $G_i^*$  und  $H_i^*$  beschreiben also je eine gleichseitige Hyperbel:  $\mathfrak{G}^*$  und  $\mathfrak{H}^*$ , deren eine Asymptote parallel zur Bildebene und deren andere Asymptote normal zur Bildebene ist. Die zur Bildebene parallele Asymptote von  $\mathfrak{G}^*$  wird erhalten, wenn man zu dem unendlich fernen Strahl  $g_\infty$  die entsprechende Gerade  $e$  konstruiert, d. h. sie liegt in der Ebene  $E_0$  desjenigen Kreises  $Q'^*$ , welcher dem unendlich fernen Kreis der ersten Reihe entspricht. Dieselbe Gerade  $e$  ist auch Asymptote der Hyperbel  $\mathfrak{H}^*$ . Die zur Bildebene senkrechte Asymptote von  $\mathfrak{G}^*$  ist derjenige Strahl  $g$ , welcher dem unendlich fernen Strahl  $e_\infty$  in den beiden projektiven

Büscheln entspricht. Dieser Strahl  $g$  wird erhalten, wenn man zur Bildebene die Senkrechte errichtet im Schnittpunkt  $G$  von  $s$  mit demjenigen Kreis  $R$  der Reihe, welcher dem unendlich fernen Kreis der zweiten Reihe entspricht. Die zur Bildebene senkrechte Asymptote der Hyperbel  $\mathfrak{H}^*$  wird in derselben Weise erhalten, wenn man zur Bildebene die Senkrechte errichtet im Schnittpunkt  $H$  von  $s$  mit dem Kreis  $R$ .

Die beiden Kreise  $Q'$  und  $R$ , welche für die beiden projektiven Kreisreihen eine ebenso bedeutende Rolle spielen wie die Gegenpunkte von 2 projektiven geraden Punktreihen, sollen in Zukunft die *Gegenkreise* der 2 projektiven Kreisreihen genannt werden.

Durch die analoge Betrachtung zeigt man, daß die Mittelpunkte  $M_1^* M_2^* M_3^* \dots$  der Kreise  $K_1^* K_2^* K_3^* \dots$  auf einer gleichseitigen Hyperbel liegen, für welche die Schnittlinie der Ebene  $E_0$  mit der projicierenden Ebene über der Centrale  $x$  die eine Asymptote und die Normale zur Bildebene im Mittelpunkt des Gegenkreises  $R$  die andere Asymptote ist.

Man erkennt aus dem Vorhergehenden, daß jede Ebene  $P$  durch  $S$ , normal zur Bildebene, die  $F$  in 2 gleichseitigen Hyperbeln schneidet. Die beiden Hyperbeln haben eine gemeinsame Asymptote, die Schnittlinie von  $P$  mit der Ebene  $E_0$  des Kreises  $Q'^*$ ; die beiden andern Asymptoten sind die Schnittlinien von  $P$  mit dem Rotationscyliner über dem Gegenkreis  $R$ . Alle so entstehenden Hyperbeln gehen durch den Punkt  $S^*$ , den Originalpunkt zu  $S$ .

Es folgt somit: Die Fläche  $F$  ist eine Fläche vierter Ordnung,  $F_4$ , für welche der Punkt  $S^*$  und der unendlich ferne Punkt  $D_\infty$  der Normalen zur Bildebene Doppelpunkte sind. Der Tangentialcyliner des letztern Punktes ist der Rotationscyliner über dem Kreis  $R$ . Die unendlich ferne Gerade der Bildebene ist eine Selbstberührungsgerade der Fläche; die zugehörige Asymptotenebene ist die Ebene  $E_0$ .

Die imaginären Kreispunkte der Bildebene sind dreifache Punkte der Fläche. Durch jeden dieser Punkte gehen außer der Selbstberührungsgerechten noch 2 einfache Gerade der  $F_4$ . Von diesen 4 einfachen Geraden liegen 2 in der unendlich fernen Ebene; ihr Schnittpunkt ist der Punkt  $D_\infty$ . Die beiden

andern liegen in der Parallelebene durch  $S^*$  zur Bildebene; ihr Schnittpunkt ist  $S^*$ .

$F_4$  hat außer den angegebenen Singularitäten noch 2 *singuläre Tangentialebenen*: die Normalebene zur Bildebene über den 2 gemeinsamen Tangenten der Kreisreihe berühren die  $F_4$  je längs einer gleichseitigen Hyperbel. Diese beiden Tangentialebenen sind reell für  $k < 1$ , sie sind konjugiert imaginär für  $k > 1$  und sie fallen zusammen für  $k = 1$ . Im letzten Falle ist jedoch die Fläche  $F_4$  nicht mehr allgemein; sie zerfällt in die Ebene  $E_0$  und in eine Fläche dritter Ordnung.

Fig. 2 soll ein Bild der Fläche geben für  $k < 1$ . Außer der Projektion auf die Ebene der Kreisreihe ist noch gezeichnet der Schnitt der  $F_4$  mit der Normalebene zur Bildebene durch die Centrale  $x$  der Kreisreihe, welche Ebene eine Symmetrie-Ebene der Fläche ist. Es sind dargestellt: die Hyperbel der Mittelpunkte  $M_i^*$  der Kreise  $K_i^*$ , die Hyperbel der Punkte  $G_i^*$  und die Hyperbel der Punkte  $H_i^*$ . Man erhält eine bequeme Vorstellung der Fläche, wenn man über jeder Strecke  $G_i^* H_i^*$  als Durchmesser einen Kreis  $K_i^*$  konstruiert, dessen Ebene zur angenommenen Querschnittebene senkrecht steht.

4. Durch einen beliebigen Punkt  $P^*$  der  $F_4$  geht ein Kreis und eine gleichseitige Hyperbel, deren Ebenen zu einander senkrecht sind. Mit Hülfe dieser beiden Kurven kann man für einen beliebigen Punkt  $P^*$  die *Tangentialebene* konstruieren. Dieselbe ist bestimmt durch die Kreistangente und die Hyperbeltangente in diesem Punkt.  $P^*$  ist der Originalpunkt zu einem Punkt  $P$  der Bildebene;  $K$  sei der Bildkreis, dessen Originalkreis  $K^*$  durch  $P^*$  geht. Dann ist die Tangente in  $P$  an  $K$  die Projektion der Tangente in  $P^*$  an  $K^*$ . Die Verbindungslinie  $PS$  ist die Projektion der Hyperbeltangente. Nimmt man nun, was im Folgenden immer vorausgesetzt werden soll, die Ebene  $E_0$  des Kreises  $Q^*$  als Bildebene, so kann man in einfacher Weise den Durchstoßpunkt  $T$  der Hyperbeltangente mit der Bildebene angeben. Berücksichtigt man nämlich den Satz, daß der Berührungspunkt einer Hyperbeltangente der Mittelpunkt des durch die Asymptoten auf der Tangente begrenzten Segmentes ist, so folgt für  $T$  die Konstruktion: wenn  $P_R$  der zu  $P$  homologe Punkt auf dem Gegenkreis  $R$  in der Aehnlichkeit der Kreise  $K$  und  $R$  bezüglich  $S$  ist, so ist der symmetrische Punkt zu  $P_R$  in Bezug auf  $P$

der gesuchte Durchstoßpunkt  $T$ . Die parallele Gerade durch  $T$  zur Tangente in  $P$  an  $K$  ist die Spur der Tangentialebene in  $P^*$  an  $F_4$  auf der angenommenen Bildebene  $E_0$ .

5. Zwei einfache Konstruktionen der  $F_4$  mögen noch entwickelt werden. Es wurde gezeigt, daß der Schnitt der  $F_4$  mit einer Ebene  $P$  durch  $S$ , normal zur Bildebene, aus 2 gleichseitigen Hyperbeln besteht, für welche die Schnittlinie  $PE_0$  eine gemeinsame Asymptote ist; die beiden andern Asymptoten sind die Schnittlinien von  $P$  mit dem Rotationscylinder über dem Gegenkreis  $R$ . Nun sind bei einer Hyperbel die Segmente zwischen den Asymptoten und der Kurve einander gleich. Da beide Hyperbeln durch den Punkt  $S^*$  gehen, so ergibt sich unter Anwendung des obigen Satzes folgende Konstruktion der  $F_4$ :  $s$  sei ein beliebiger Strahl des Bündels vom Scheitel  $S^*$ ; er treffe den Rotationscylinder über dem Kreis  $R$  in den Punkten  $C_1$  und  $C_2$ , die Ebene  $E_0$  in dem Punkte  $Z$ . Konstruiert man auf  $s$  2 Punkte  $P_1$  und  $P_2$ , so daß  $S^*C_1$  gleich und gleich gerichtet ist mit  $ZP_1$ , ebenso  $S^*C_2$  gleich und gleich gerichtet mit  $ZP_2$ , so liegen  $P_1$  und  $P_2$  auf  $F_4$ .

Dadurch erscheint  $F_4$  als Spezialfall einer interessanten Gruppe von Flächen vierter Ordnung.

Durchläuft der Punkt  $C_i$  ( $i = 1, 2$ ) auf dem Cylinder einen Kreis, dessen Ebene  $\Sigma$  also parallel  $E_0$  ist, so durchläuft  $P_i$  einen Kreis auf  $F_4$ , dessen Ebene  $\Sigma^*$  zu  $\Sigma$  parallel ist und von ihr einen Abstand  $a$  hat, der gleich und gleich gerichtet ist mit der Entfernung des Punktes  $S^*$  von der Ebene  $E_0$ . Es ergibt sich daraus folgende neue Konstruktion der  $F_4$ :

Es seien angenommen ein fester Rotationscylinder und ein fester Punkt  $S^*$ . Eine Ebene  $\Sigma$  senkrecht zu den Erzeugenden des Cylinders schneidet aus dem Cylinder einen Kreis, welchen man aus  $S^*$  auf eine Ebene  $\Sigma^*$  projiziert, die zu  $\Sigma$  parallel ist und von ihr einen nach Größe und Richtung gegebenen Abstand  $a$  hat. Wenn man diese Konstruktion für alle Ebenen  $\Sigma$  macht, so erfüllen die projizierten Kreise die Fläche  $F_4$ .

Durch diese Konstruktion ergibt sich auch der Tangentialkegel des Doppelpunktes  $S^*$ . Die Ebene  $\Sigma$ , welche von  $S^*$

die Entfernung  $-a$  hat, schneidet den Cylinder in einem Kreis, welcher die Leitkurve des gesuchten Tangentialkegels ist.

Aus der ersten in diesem Artikel entwickelten Konstruktion ergeben sich auch in einfacher Weise die 4 Schnittpunkte der  $F_4$  mit einer beliebigen Geraden durch die Schnittpunkte eines Kreises mit einer Hyperbel.

6. Es soll in diesem Artikel noch kurz gezeigt werden, wie die  $F_4$  analytisch zu behandeln ist. Zu dem Zweck soll ein rechtwinkliges Koordinatensystem folgendermaßen festgesetzt werden: Die Ebene  $xy$  soll zusammenfallen mit der Ebene  $E_0$  der Kreisreihe; die Centrale  $x$  der Kreisreihe sei die  $x$ -Axe und der Ursprung des Koordinatensystems soll zusammenfallen mit dem Punkt  $S$ . Zur Ableitung der Gleichung der Fläche kann man dann direkt ausgehen von der in Artikel 2 gegebenen Definition der  $F_4$ : Man konstruiert über jedem Kreis der Reihe einen senkrechten Cylinder und schneidet diesen Cylinder mit einer ihm projektiv zugeordneten Parallelebene zur Koordinatenebene  $xy$ . Der Ort der so entstehenden Querschnittskurven ist die  $F_4$ .

Die Gleichung eines Kreises in der Ebene  $xy$ , welcher der Reihe angehört, lautet

$$(x - \mu)^2 + y^2 = k^2 \mu^2 \quad (1)$$

wo  $\mu$  die Abscisse des Mittelpunktes und  $k$  die charakteristische Konstante der Kreisreihe ist. Im räumlichen Koordinatensystem stellt (1) die Gleichung des senkrechten Cylinders über dem Kreis der Reihe dar. Bei variablem  $\mu$  stellt die Gleichung die Gesamtheit der Cylinder über den Kreisen der Reihe dar. Zu jedem Wert des Parameters  $\mu$  gehört ein und nur ein Cylinder der Reihe und umgekehrt.

Die Gleichung einer Ebene parallel  $xy$  lautet

$$z = \lambda \quad (2)$$

Auch hier sind die Ebenen parallel  $xy$  in eindeutiger Weise mit dem Parameter  $\lambda$  verbunden.

Sollen nun die Cylinder der Reihe diesen Ebenen projektiv zugeordnet sein, so muß zwischen den Parametern  $\lambda$  und  $\mu$  eine bilineare Gleichung bestehen

$$\alpha \lambda \mu + \beta \lambda + \gamma \mu + \delta = 0$$

Setzt man fest, daß die 3 folgenden Parameterpaare korrespondierende sein sollen

$$\begin{aligned}\mu &= 0, & \lambda &= a \\ \mu &= \infty, & \lambda &= 0 \\ \mu &= b, & \lambda &= \infty,\end{aligned}$$

so geht die Projektivitätsgleichung über in

$$\lambda(\mu - b) + ab = 0 \quad (3)$$

Diese Projektivitätsgleichung hat folgende geometrische Bedeutung:  $x = \mu$ ,  $y = 0$ ,  $z = \lambda$  sind die Koordinaten des Mittelpunktes desjenigen Kreises, welcher durch die Ebene  $z = \lambda$  aus dem korrespondierenden Cylinder der Reihe geschnitten wird. Die Gleichung (3) sagt aus, daß der Ort dieses Mittelpunktes eine gleichseitige Hyperbel ist, welche die Gerade  $z = 0$  und die Gerade  $x = b$  zu Asymptoten hat und die  $z$ -Axe in einem Punkt schneidet, welcher die Entfernung  $a$  vom Ursprung des Koordinatensystems hat.

Durch Elimination von  $\lambda$  und  $\mu$  aus den Gleichungen (1), (2) und (3) ergibt sich die Gleichung der  $F_4$ :

$$(xz - bz + ab)^2 + y^2 z^2 - k^2 b^2 (z - a)^2 = 0 \quad (4)$$

Die Gleichung kann auf die Form gebracht werden

$$C_y^2 - C_x \cdot C'_x = 0 \quad (5)$$

wobei  $C_y \equiv z(x - b) + ab$

$$C_x \equiv kb(z - a) + yz = z(kb + y) - kab$$

$$C'_x \equiv kb(z - a) - yz = z(kb - y) - kab$$

Die Polynome  $C_y$ ,  $C_x$  und  $C'_x$  gleich Null gesetzt stellen demnach gleichseitig-hyperbolische Cylinder dar; die Erzeugenden des ersten sind parallel zur  $y$ -Axe, diejenigen der beiden andern sind parallel zur  $x$ -Axe. Alle 3 Cylinder haben die Ebene  $xy$  zur einen Asymptotenebene.

Aus Gleichung (5) folgt, daß  $F_4$  betrachtet werden kann als Enveloppe der folgenden Reihe von Flächen zweiten Grades:

$$C_x + 2tC_y + t^2C'_x = 0 \quad (6)$$

wobei  $t$  einen Parameter bedeutet. Jede Fläche dieser Reihe ist ein gleichseitig-hyperbolischer Cylinder, dessen eine Asymptotenebene die Ebene  $z = 0$  ist.

Bedeutet  $t$  einen beliebigen festen Parameterwert, so bestehen für die Punkte der Durchdringungskurve der dem Wert  $t$  entsprechenden Fläche  $C$  der Reihe mit ihrer unendlich benachbarten Fläche die 2 Gleichungen

$$\left. \begin{aligned}C_y + t \cdot C'_x &= 0 \\ C_x + t \cdot C_y &= 0\end{aligned} \right\}$$

Durch die Durchdringungskurve dieser beiden Flächen geht auch die Fläche

$$z \left\{ y(1-2kt+t^2) + x(k-kt^2) \right\} = 0,$$

welche sich zusammensetzt aus der Ebene  $z=0$  und aus der Ebene

$$P \equiv y(1-2kt+t^2) + x(k-kt^2) = 0 \quad (7)$$

Man hat also den Satz: Die Fläche

$$C \equiv C_x + 2t C_y + t^2 C'_x = 0$$

berührt die  $F_4$  längs der doppelt gelegten unendlich fernen Geraden der Ebene  $xy$  und nach einer gleichseitigen Hyperbel, deren Ebene gegeben ist durch die Gleichung (7). Diese Gleichung ist in  $t$  quadratisch; daher gehören zu jeder Ebene durch die  $z$ -Axe 2 Flächen der Reihe, d. h. jede Ebene durch die  $z$ -Axe schneidet  $F_4$  nach 2 gleichseitigen Hyperbeln.

Die Untersuchung der letztern Querschnitte wird wohl am einfachsten, wenn man mit der ursprünglichen Gleichung (4) eine Umformung vornimmt. Setzt man  $1-k^2=k_1^2$ , so läßt sich die Gleichung (4) auf die Form bringen

$$z^2(x^2 + y^2 - 2bx + k_1^2 b^2) + 2k_1 ab z \left( \frac{x}{k_1} - k_1 b \right) + (k_1 ab)^2 = 0$$

$$\text{oder } z^2 \left\{ x^2 + y^2 - 2bx + k_1^2 b^2 - \left( \frac{x}{k_1} - k_1 b \right)^2 \right\} + \left( \frac{xz}{k_1} - k_1 bz + k_1 ab \right)^2 = 0$$

oder endlich

$$(xz - k_1^2 bz + k_1^2 ab)^2 - z^2(k^2 x^2 - k_1^2 y^2) = 0 \quad (8)$$

Die Gleichung der  $F_4$  läßt sich also auf die Form bringen

$$G^2 - z^2 H = 0 \quad (9)$$

wo  $G=0$  und  $H=0$  Flächen zweiten Grades darstellen.

Dies ist zugleich die charakteristische Form der Gleichung einer Fläche vierter Ordnung, für welche der Querschnitt von  $z=0$  und  $G=0$  ein *Doppelkegelschnitt* ist. Im vorliegenden Fall stellt  $G=0$  einen gleichseitig-hyperbolischen Cylinder dar, welcher  $z=0$  zur einen Asymptotenebene hat. Es folgt hieraus, daß der Doppelkegelschnitt der  $F_4$  aus 2 unendlich benachbarten unendlich fernen Geraden besteht. Die Fläche  $H=0$  zerfällt im vorliegenden Fall in die beiden Ebenen

$$y = \pm \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \cdot x$$

Aus Gleichung (8) folgt, daß diese beiden Ebenen singuläre Tangentialebenen der Fläche sind; sie berühren die  $F_4$  längs den beiden gleichseitigen Hyperbeln, welche sie aus dem Cylinder  $G=0$  schneiden.

Um nun den Schnitt der  $F_4$  mit einer durch die  $z$ -Axe gehenden Ebene zu untersuchen, setze man in Gleichung (8)

$$y = \alpha x,$$

dann geht die Gleichung über in

$$(zx - k_1^2 bz + k_1^2 ab)^2 - (A \cdot xz)^2 = 0$$

wobei

$$A = \sqrt{k^2 - \alpha^2 k_1^2}$$

Der Querschnitt der  $F_4$  mit der Ebene  $y = \alpha x$  besteht also aus den 2 Kegelschnitten, welche die Ebene aus den folgenden Flächen zweiten Grades schneidet:

$$z \left\{ (1 + A) \cdot x - k_1^2 b \right\} + k_1^2 ab = 0$$

$$z \left\{ (1 - A) \cdot x - k_1^2 b \right\} + k_1^2 ab = 0$$

Die beiden Gleichungen stellen 2 gleichseitig-hyperbolische Cylinder dar, für welche  $z=0$  eine gemeinschaftliche Asymptotenebene ist. Die Gleichungen der 2 andern Asymptotenebenen werden erhalten, wenn man die Linearfaktoren des Ausdrucks

$$(1 + \alpha^2)x^2 - 2bx + k_1^2 b^2$$

gleich Null setzt. Hieraus ergibt sich eine andere Konstruktion der beiden zur  $z$ -Axe parallelen Asymptoten des Querschnittes: der Cylinder der am Anfang dieses Artikels betrachteten Reihe, welcher dem Parameter  $\mu = b$  entspricht, hat die Gleichung

$$(x - b)^2 + y^2 = k^2 b^2$$

Zur Bestimmung der Mantellinien, in welchen dieser Cylinder von der Ebene  $y = \alpha x$  geschnitten wird, bekommt man dann die Gleichung

$$(1 + \alpha^2)x^2 - 2bx + k_1^2 b^2 = 0$$

D. h. die zur  $z$ -Axe parallelen Asymptoten der beiden gleichseitigen Hyperbeln in der Ebene  $y = \alpha x$  sind die in dieser Ebene liegenden Erzeugenden des obigen Cylinders. Da die beiden andern Asymptoten der 2 gleichseitigen Hyperbeln zusammenfallen in die Schnittlinie von  $y = \alpha x$  mit  $z = 0$  und beide Kurven die  $z$ -Axe schneiden in dem Punkt, welcher vom Ursprung die Entfernung  $a$  hat, so ist durch diese Angaben der Querschnitt der  $F_4$  mit der Ebene  $y = \alpha x$  völlig bestimmt.

Die Konstruktion der  $F_4$ , welche aus der Betrachtung dieser Querschnitte folgt (Artikel 5), führt ohne Schwierigkeiten zur Darstellung der Koordinaten eines Punktes der Fläche als Funktionen von 2 Parametern.

Zu bemerken ist noch, daß die Umformung, welche zu Gleichung (8) geführt hat, nicht möglich ist für  $k_1 = 0$ , d. h.  $k = 1$ . In diesem Fall hat man eine Reihe von sich berührenden Kreisen und die  $F_4$  zerfällt in die Ebene  $z = 0$  und in die Fläche dritter Ordnung

$$z(x^2 + y^2) - 2bx(z - a) = 0$$

7. In der nachfolgenden Untersuchung braucht man die erste Polarfläche der  $F_4$  für den unendlich fernen Punkt der  $z$ -Achse, d. h. für den Doppelpunkt  $D_\infty$  der  $F_4$ . Diese Fläche  $P_3$  kann analytisch oder geometrisch untersucht werden. Die bequemste Gleichungsform ergibt sich aus Gleichung (8) des vorigen Artikels, nämlich

$$P_3 \equiv (zx - k_1^2 bz + k_1^2 ab)(x - k_1^2 b) - z(k^2 x^2 - k_1^2 y^2) = 0$$

Diese Gleichung ist erfüllt für:

1)  $zx - k_1^2 bz + k_1^2 ab = 0$  und  $z = 0$

D. h.  $P_3$  enthält 2 unendlich ferne unendlich benachbarte Gerade in der Ebene  $z = 0$  oder  $E_0$ . Die Ebene  $E_0$  ist also eine singuläre Tangentialebene der gesuchten Fläche.

2)  $x - k_1^2 b = 0$  und  $z = 0$

D. h.  $P_3$  enthält die Gerade der Ebene  $xy$  von der Gleichung  $x - k_1^2 b = 0$ . Diese ist die Polare des Ursprungs  $S$  in Bezug auf den Gegenkreis  $R$ .

3)  $zx - k_1^2 bz + k_1^2 ab = 0$  und  $k^2 x^2 - k_1^2 y^2 = 0$

D. h.  $P_3$  enthält die beiden Hyperbeln, nach denen  $F_4$  von den 2 singulären Tangentialebenen berührt wird.

4)  $x - k_1^2 b = 0$  und  $k^2 x^2 - k_1^2 y^2 = 0$

D. h.  $P_3$  enthält auch die zur Ebene  $xy$  senkrechten Asymptoten der unter 3) erwähnten Hyperbeln.

Außerdem hat  $P_3$  die imaginären Kreispunkte der Ebene  $xy$  zu Doppelpunkten und die Verbindungslinien dieser beiden Punkte mit dem Doppelpunkte  $D_\infty$  sind 2 der Fläche angehörige Gerade.

Diese Eigenschaften ergeben sich auch geometrisch einfach.

Eine Gerade senkrecht zur Ebene  $xy$  schneidet  $F_4$  außer im Doppelpunkt  $D_\infty$  noch in 2 weiteren, im allgemeinen im

Endlichen liegenden Punkten. Der Ort der Mitten der durch diese Punktpaare begrenzten Strecken ist die Fläche  $P_3$ . Aus dieser Definition ergeben sich auch die oben gefundenen Geraden und Kurven. Für die Darstellung der Fläche ist von Wichtigkeit, daß sie von jeder Parallelebene zu  $E_0$  geschnitten wird in einem Kreis und in der allen diesen Ebenen gemeinsamen unendlich fernen Geraden. Die Mittelpunkte dieser Kreise liegen auf einer gleichseitigen Hyperbel, welche mit der Hyperbel der Mittelpunkte  $M_i^*$  der  $F_4$  die Asymptoten gemein hat. Ueberdies halbiert die neue Hyperbel die zur Ebene  $E_0$  parallelen Segmente der ersten Hyperbel zwischen der Kurve und der zu  $E_0$  senkrechten Asymptote.

Sämtliche Kreise der  $P_3$  stützen sich auf die unter 4) konstruierten beiden Geraden. Die Projektionen dieser Kreise auf die Ebene  $E_0$  bilden daher ein Kreisbüschel, dessen Basispunkte die Berührungspunkte der aus  $S$  an den Gegenkreis  $R$  gelegten Tangenten sind.

Fig. 2 gibt eine Anschauung der Fläche  $P_3$ . Die Kurve ( $C_3$ ) ist ihr Schnitt mit der Normalebene zu  $E_0$  durch  $x$ . Konstruiert man über jeder Sehne  $UV$  als Durchmesser einen Kreis, dessen Ebene parallel  $E_0$  ist, so erfüllen diese Kreise die  $P_3$ .

## II.

8. Nach den im vorigen Abschnitt gemachten vorbereitenden Untersuchungen bietet nun die eigentliche Aufgabe keine wesentlichen Schwierigkeiten mehr. Das Erzeugnis der beiden projektiven Kreisreihen  $K$  und  $K'$  ist nach Artikel 2 die Orthogonalprojektion der Durchdringungskurve achter Ordnung  $R_8$  des Kegels zweiten Grades  $K^2$  mit der Fläche vierter Ordnung  $F_4$  auf die Ebene  $E_0$ , also *eine Kurve achter Ordnung*  $C_8$ .

Die imaginären Kreispunkte der Ebene  $E_0$  sind dreifache Punkte der Kurve  $R_8$ , weil  $F_4$  dreifach und  $K^2$  einfach durch diese Punkte gehen. Die unendlich ferne Ebene trifft  $R_8$  in 2 weitem, einfachen Punkten; es sind die 2 weitem Schnittpunkte der Linien aus  $D_\infty$  nach den imaginären Kreispunkten der Ebene  $E_0$  mit dem Kegel  $K^2$ . Da die Projektionen dieser beiden Punkte aus  $D_\infty$  auf  $E_0$  ebenfalls in die imaginären

Kreispunkte fallen, so ergibt sich, daß diese Punkte vierfache Punkte der  $C_8$  sind.

Die 8 Schnittpunkte der  $C_8$  mit einer beliebigen Geraden  $g$  der Ebene  $E_0$  ergeben sich so: Die Normalebene durch  $g$  zu  $E_0$  trifft  $F_4$  in einer Kurve  $C_4$  von der vierten Ordnung und den Kegel  $K^2$  in einem Kegelschnitt. Die Projektionen der Schnittpunkte der  $C_4$  mit diesem Kegelschnitt sind die gesuchten Punkte.  $C_4$  ist eine rationale Kurve, denn sie hat einen Berührungsknoten im unendlich fernen Punkt von  $g$  und einen gewöhnlichen Doppelpunkt in der Richtung senkrecht zu  $g$ . Die Asymptote des Berührungsknotens ist die Linie  $g$ , die Asymptoten des Doppelpunktes sind die Senkrechten zur Ebene  $E_0$  in den Schnittpunkten von  $g$  mit dem Gegenkreis  $R$ . Geht  $g$  durch  $S$  oder  $S_1$ , so reduziert sich die Aufgabe achten Grades auf 2 Aufgaben vierten Grades. Wenn nämlich  $g$  durch  $S$  geht, so zerfällt  $C_4$  in 2 gleichseitige Hyperbeln. Man hat also dann die Schnittpunkte eines beliebigen Kegelschnittes mit 2 gleichseitigen Hyperbeln zu bestimmen. Geht  $g$  durch  $S_1$ , so zerfällt der Kegelschnitt in ein Linienpaar. Man hat also dann die Schnittpunkte von 2 geraden Linien mit einer  $C_4$  zu suchen.

Interessant ist die Bestimmung der Schnittpunkte der Verbindungslinie  $SS_1$  mit  $C_8$ . Diese Aufgabe achten Grades reduziert sich auf 4 quadratische Aufgaben: man hat 2 gleichseitige Hyperbeln mit 2 Geraden zu schneiden. Es sind also 4 mal die Doppelpunkte von 2 vereinigten projektiven Punktreihen zu bestimmen. Die Bestimmungselemente dieser 4 Paare von vereinigten projektiven Reihen auf  $SS_1 = s$  lassen sich durch folgende Ueberlegung finden: Der Gegenkreis  $Q'$  ist die Schnittkurve des Kegels  $K^2$  mit der Ebene  $E_0$ ; er werde von  $s$  geschnitten in den Punkten  $Q'_1$  und  $Q'_2$ .  $\Sigma'$  sei der entsprechende Kreis der zweiten Reihe zum Nullkreis  $S$  der ersten Reihe,  $\sigma'_1$  und  $\sigma'_2$  dessen Schnittpunkte mit  $s$ , wobei  $\sigma'_1$  der homologe Punkt zu  $Q'_1$  und  $\sigma'_2$  der homologe Punkt zu  $Q'_2$  sein soll. Dann sind die 4 vereinigten projektiven Reihen folgendermaßen bestimmt:

- 1)  $R_1$  und  $Q'_1$  sind Gegenpunkte,  $S$  und  $\sigma'_1$  ein Paar,
- 2)  $R_2$  "  $Q'_1$  " " " ,  $S$  "  $\sigma'_1$  " " ,
- 3)  $R_1$  "  $Q'_2$  " " " ,  $S$  "  $\sigma'_2$  " " ,
- 4)  $R_2$  "  $Q'_2$  " " " ,  $S$  "  $\sigma'_2$  " " ,

Sind  $I_1 I_1^*$ ,  $I_2 I_2^*$ ,  $I_3 I_3^*$ ,  $I_4 I_4^*$  die 4 Paare von Doppelpunkten, so bestehen also die Beziehungen:  $I_1 R_1 = Q'_1 I_1^*$ ;  $I_2 R_2 = Q'_1 I_2^*$ ;  $I_3 R_1 = Q'_2 I_3^*$ ;  $I_4 R_2 = Q'_2 I_4^*$ .

9. *Konstruktion der Tangente  $t$  in einem Punkte  $P$  der  $C_s$ .*

Die Tangente  $t$  in einem Punkt  $P$  der  $C_s$  ist die Projektion der Tangente  $t^*$  im Punkt  $P^*$  an die  $R_s$ . Sie ist also die Projektion der Schnittlinie der Tangentialebene in  $P^*$  an den Kegel  $K^2$  und der Tangentialebene in demselben Punkt an  $F_4$ . Nun können leicht die Spuren dieser Tangentialebenen auf der Ebene  $E_0$  angegeben werden. Es sei  $\mathfrak{R}$  der homologe Punkt zu  $P$  auf dem Gegenkreis  $R$  und  $\mathfrak{Q}'$  der homologe Punkt zu  $P$  auf dem Gegenkreis  $Q'$ . Die Tangente in  $\mathfrak{Q}'$  an  $Q'$  ist dann die Spur der Tangentialebene in  $P^*$  an  $K^2$ . Nach Artikel 4 findet man die Spur der Tangentialebene in  $P^*$  an  $F_4$ , wenn man durch den symmetrischen Punkt zu  $\mathfrak{R}$  in Bezug auf  $P$  die Parallele zieht zur Tangente in  $\mathfrak{R}$  an den Kreis  $R$ . Der Schnittpunkt dieser 2 Spuren ist der Durchstoßpunkt der Tangente  $t^*$  mit der Ebene  $E_0$ , also ein Punkt der gesuchten Tangente  $t$ . Denkt man sich die Kreise  $K$  der ersten Reihe als Projektionen der Querschnitte eines Kegels mit den zur Bildebene parallelen Ebenen und die Kreise  $K'$  der zweiten Reihe als Projektionen der Querschnitte derselben Ebenen mit einer  $F_4$ , so ergibt sich ein neuer Punkt der gesuchten Tangente, wenn man die Tangente in  $\mathfrak{R}$  an den Kreis  $R$  schneidet mit der Parallelen zur Tangente in  $\mathfrak{Q}'$  an den Kreis  $Q'$  durch den symmetrischen Punkt zu  $\mathfrak{Q}'$  in Bezug auf  $P$ . (v. Fig. 3.) Aus diesen beiden Tangentenkonstruktionen ergibt sich eine neue, welche symmetrisch ist in Bezug auf beide Kreisreihen: Man konstruiert die Tangenten in  $P$  an die Kreise  $K$  und  $K'$ , aus denen  $P$  entstanden ist, ebenso in  $\mathfrak{R}$  die Tangente an den Gegenkreis  $R$  und in  $\mathfrak{Q}'$  die Tangente an den Gegenkreis  $Q'$ . Dann bilden diese 4 Tangenten ein Parallelogramm. Die Tangente  $t$  in  $P$  an  $C_s$  ist die Parallele zu der nicht durch  $P$  gehenden Diagonale dieses Parallelogrammes.

Andere Tangentenkonstruktionen ergeben sich, wenn man den Durchstoßpunkt von  $t^*$  nicht mit der Ebene  $E_0$ , sondern mit andern zu  $E_0$  parallelen Ebenen bestimmt. Es eignen sich hiezu hauptsächlich die Parallelebenen durch  $S^*$  und  $S_1^*$  zu  $E_0$ .

Es ergibt sich beispielsweise die folgende andere Tangentenkonstruktion:  $L$  sei der Mittelpunkt der Strecke  $\Re\Omega'$ . Man ziehe durch den Punkt  $S_1$  die Parallele zu  $LP$  bis zum Schnitt mit  $PS$ . Die Parallele durch diesen Schnittpunkt zur Tangente in  $P$  an  $K$  trifft die Parallele durch  $S_1$  zur Tangente in  $P$  an  $K'$  in einem Punkt der gesuchten Tangente  $t$ .

Oder allgemeiner: Man ziehe durch irgend einen Punkt von  $PS_1$  die Parallele zu  $LP$  bis zum Schnitt mit  $PS$ . Die Parallele durch diesen Schnittpunkt zur Tangente in  $P$  an  $K$  trifft die Parallele durch den angenommenen Punkt zur Tangente in  $P$  an  $K'$  in einem Punkt der gesuchten Tangente in  $P$ . Analog, wenn man ausgeht von einem beliebigen Punkt der Geraden  $PS$ .

Zu bemerken ist noch, daß die Kurve  $C_8$  4 vierfache Tangenten hat, die 2 Paare gemeinsamer Tangenten der 2 Kreisreihen.

10. *Die 6 Doppelpunkte der  $C_8$ .* Es wurde gezeigt, daß die imaginären Kreispunkte vierfache Punkte der  $C_8$  sind. Es soll bewiesen werden, daß die Kurve außerdem noch 6 Doppelpunkte besitzt. Um die Anzahl der Doppelpunkte der  $C_8$  zu bestimmen, hat man die Anzahl der *scheinbaren Doppelpunkte* der  $R_8$  zu suchen bezüglich des angenommenen Projektionszentrums, d. h. bezüglich des Punktes  $D_\infty$ . Oder mit andern Worten: man hat zu bestimmen die Anzahl der Bisekanten der  $R_8$ , welche durch den Punkt  $D_\infty$  gehen.

Ein Strahl  $\sigma$  durch das Projektionszentrum trifft die  $F_4$  außer in  $D_\infty$  in 2 weitem Punkten  $A$  und  $A_1$ , welche im allgemeinen im Endlichen liegen. Derselbe Strahl  $\sigma$  trifft den Kegel  $K^2$  in 2 Punkten  $B$  und  $B_1$ . Der Mittelpunkt der Strecke  $AA_1$  sei  $\mathfrak{A}$ , dann ist der Ort von  $\mathfrak{A}$  die erste Polarfläche des Projektionszentrums bezüglich der  $F_4$ , also eine Fläche dritter Ordnung  $P_3$  (Artikel 7). Der Mittelpunkt der Strecke  $BB_1$  sei  $\mathfrak{B}$ ; dann ist der Ort von  $\mathfrak{B}$  eine Ebene, die Polarebene  $P$  des Projektionszentrums bezüglich des Kegels  $K^2$ . Unter den Strahlen durch das Projektionszentrum gibt es einfach unendlich viele, für welche die beiden Punkte  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zusammenfallen. Diese Strahlen erfüllen eine Cylinderfläche, deren Leitkurve der Querschnitt von  $P$  mit  $P_3$  ist, also eine Cylinderfläche dritter Ordnung. Zu den Erzeugenden dieser Fläche gehören auch die gesuchten Bisekanten der  $R_8$ . Die

Schnittkurve dieses Cylinders mit der Projektionsebene  $E_0$  geht also durch die Doppelpunkte der  $C_8$ . Die so entstehende Kurve dritter Ordnung  $\Gamma_3$  soll heißen: *die Kurve der scheinbaren Doppelpunkte*. Sie kann auch betrachtet werden als Projektion des Querschnittes von  $P$  mit  $P_3$ .

Die Kurve  $\Gamma_3$  hat mit  $C_8$  24 Punkte gemein. Von diesen fallen 12 in die imaginären Kreispunkte, wie folgende Ueberlegung zeigt: Nach Artikel 8 sind die imaginären Kreispunkte der Projektionsebene dreifache Punkte der  $R_8$  und vierfache Punkte der  $C_8$ , weil noch je ein Punkt der  $R_8$  in die Kreispunkte projiziert wird. Die imaginären Kreispunkte sind also eine Vereinigung von je einem dreifachen Punkt mit 3 scheinbaren Doppelpunkten. Die Kurve  $\Gamma_3$  muß daher in den imaginären Kreispunkten eine Berührung zweiter Ordnung haben mit der Projektion desjenigen Zuges der  $R_8$ , welcher nicht in Wirklichkeit, sondern bloß in der Projektion durch die Kreispunkte der Projektionsebene geht. Die imaginären Kreispunkte absorbieren also  $2(3+3)$  Schnittpunkte von  $\Gamma_3$  und  $C_8$ . Die Anzahl der Doppelpunkte von  $C_8$  ist also  $\frac{1}{2}(24-12) = 6$ . Die  $C_8$  ist somit vom Geschlecht  $p = 3$ . Es folgt hieraus nach einem Satz von Harnack<sup>1</sup>, daß die Kurve aus vier geschlossenen Zügen bestehen kann. Diese Eigenschaft ergibt sich übrigens durch die bloße Raumschauung.

11. Es handelt sich noch um die Konstruktion der Kurve  $\Gamma_3$ . Sie ist die Projektion des Querschnittes der Polarfläche  $P_3$  mit der Polarebene  $P$  auf die Ebene  $E_0$ . Diese Projektion läßt sich in einfacher Weise aus den auf der Ebene  $E_0$  gegebenen Größen konstruieren.

Eine beliebige Ebene  $E$  parallel  $E_0$  schneidet  $P_3$  nach einem Kreis  $U^*$  (und nach einer unendlich fernen Geraden) und die Polarebene  $P$  nach einer Geraden  $v^*$ . Dieser Strahl  $v^*$  ist die Polare des Fußpunktes der Senkrechten aus der Kegelspitze  $S_1^*$  auf der Ebene  $E$  in Bezug auf denjenigen Kreis  $K^*$ , welcher durch die Ebene  $E$  aus dem Kegel  $K^2$  geschnitten wird.  $U^*$  und  $v^*$  schneiden sich in 2 Punkten, deren Projektionen auf  $\Gamma_3$  liegen. Nun sind durch die Ebene

<sup>1</sup> Ueber die Vielteiligkeit der ebenen algebraischen Kurven. Mathematische Annalen, Band X.

$E$  die Kreise  $U^*$  und die Geraden  $v^*$  einander projektiv zugeordnet. Die Projektionen der Kreise  $U^*$  bilden nach Artikel 7 ein Büschel, dessen Grundpunkte  $G_1$  und  $G_2$  die Berührungspunkte der Tangenten aus  $S$  an den Gegenkreis  $R$  sind. Die Projektion der Geraden  $v^*$ , also die Linie  $v$ , ist die Polare des Punktes  $S_1$  in Bezug auf den Kreis  $K'$ , die Projektion des obigen Kreises  $K'^*$ . Die sämtlichen Linien  $v$  bilden also ein Büschel von Parallelen. Das Büschel der Kreise  $U$  und das Büschel der Geraden  $v$  sind projektiv; ihr Erzeugnis ist die Kurve  $\Gamma_3$ . Man kann 3 Paare dieser Projektivität angeben:

- 1) Dem Kreis  $U_1$  durch den Punkt  $S$  entspricht die Polare  $v_1$  des Punktes  $S_1$  in Bezug auf denjenigen Kreis  $\Sigma'$  der zweiten Reihe, welcher dem Nullkreis  $S$  der ersten Reihe entspricht.
- 2) Dem Kreis  $U_2 = R$  entspricht als  $v_2$  der unendlich ferne Strahl des Büschels. Dieser Kreis berührt also  $\Gamma_3$  in den imaginären Kreispunkten. Sein Mittelpunkt ist der Doppelbrennpunkt von  $\Gamma_3$ . Dieser Punkt ist nach Artikel 10 auch ein singulärer Brennpunkt der  $C_s$ .
- 3) Dem unendlich großen Kreis  $U_3$  des Büschels entspricht als  $v_3$  die Polare von  $S_1$  in Bezug auf den Gegenkreis  $Q'$ . Die Elemente  $U_3$  und  $v_3$  sind die Querschnitte der Projektionsebene  $E_0$  mit der Fläche  $P_3$  und mit der Ebene  $P$ . Die Gerade  $v_3$  ist die reelle Asymptote der Kurve; ihr Tangentialpunkt ist der Schnittpunkt der Geraden  $v_3$  und  $U_3$ . (v. Fig. 4.)

Durch diese 3 Paare ist die Projektivität der beiden Büschel bestimmt; von  $\Gamma_3$  kennt man dadurch schon mehr Elemente als zur Bestimmung notwendig sind.

12. In ebenso einfacher Weise läßt sich eine zweite Kurve  $\Gamma'_3$  konstruieren, welche durch die gesuchten Doppelpunkte geht. Betrachtet man nämlich die Kreise  $K$  der ersten Reihe als Projektionen der Querschnitte eines Kegels mit den zur Bildebene parallelen Ebenen und die Kreise  $K'$  der zweiten Reihe als Projektionen der Querschnitte einer  $F'_4$  mit denselben Ebenen, so zeigt die analoge Ueberlegung, daß die Doppelpunkte der  $C_s$  auf einer neuen Kurve dritter Ordnung liegen, welche ebenfalls dargestellt werden kann als Erzeugnis eines Kreisbüschels und eines dazu projektiven

Büschels von unter sich parallelen Strahlen. Die Kreise  $U'$  des neuen Büschels gehen durch die Berührungspunkte der Tangenten aus  $S_1$  an den Gegenkreis  $Q'$ . Die Strahlen  $v'$  des neuen Büschels sind die Polare des Punktes  $S$  in Bezug auf die Kreise  $K$  der ersten Reihe. Die 3 Paare entsprechender Elemente  $U' v'$ , welche die Projektivität bestimmen, sind die folgenden:

- 1)  $U'_1$  sei der Kreis des Büschels, welcher durch  $S_1$  geht; diesem entspricht die Polare  $v'_1$  von  $S$  in Bezug auf den Kreis  $\Sigma_1$  der ersten Reihe, welcher dem Nullkreis  $S_1$  der andern Reihe korrespondiert.
- 2) Dem Gegenkreis  $Q' = U'_2$  entspricht der unendlich entfernte Strahl des Büschels als  $v'_2$ . Der Mittelpunkt dieses Kreises ist demnach der Doppelbrennpunkt der Kurve  $\Gamma'_3$  und zugleich ein singulärer Brennpunkt der  $C_s$ .
- 3) Dem unendlich großen Kreis  $U'_3$  des Büschels entspricht als  $v'_3$  die Polare von  $S$  in Bezug auf den Gegenkreis  $R$ . Es ist also die Verbindungslinie  $G_1 G_2 = U_3$  die reelle Asymptote von  $\Gamma'_3$  und der Schnittpunkt der Geraden  $U'_3$  und  $v'_3$  ist der zugehörige Tangentialpunkt. Damit ist auch die Kurve  $\Gamma'_3$  vollständig bestimmt.

Die Kurven  $\Gamma_3$  und  $\Gamma'_3$  sind zirkular und haben denselben Tangentialpunkt für die reellen Asymptoten. Die 6 übrigen gemeinsamen Punkte dieser beiden Kurven dritter Ordnung sind die Doppelpunkte der  $C_s$ .

Aus der Konstruktion folgt, daß die 6 Doppelpunkte der  $C_s$  im allgemeinen nicht auf einem Kegelschnitt liegen. Sie liegen auf einem Kegelschnitt, wenn die Zentralen der beiden Kreisreihen dieselbe Richtung haben.

13. *Wirkliche Doppelpunkte der  $R_s$  und Doppelpunkte zweiter Art der  $C_s$ .* Die projektive Beziehung der beiden Kreisreihen kann so spezialisiert werden, daß die Kurve  $C_s$  noch weitere Doppelpunkte, jedoch von anderem Charakter als die bereits gefundenen, besitzt. Die gegenseitige Lage der Flächen  $K^2$  und  $F_4$  kann derart sein, daß die Durchdringungskurve  $R_s$  *wirkliche Doppelpunkte* aufweist. Die aus solchen hervorgehenden Doppelpunkte der  $C_s$  sollen *Doppelpunkte zweiter Art* der  $C_s$  genannt werden. Die Durchdringungskurve von 2 Flächen bekommt einen wirklichen Doppelpunkt, wenn die beiden Flächen sich in einem Punkt

berühren; d. h. wenn beide Flächen in einem gemeinsamen Punkt dieselbe Tangentialebene haben oder wenn ein Doppelpunkt der einen Fläche auf der andern Fläche liegt.

Die Kurve  $C_s$  wird also Doppelpunkte zweiter Art bekommen, wenn die projektiven Kreisreihen so gewählt sind, daß  $F_4$  und  $K^2$  in einem gemeinsamen Punkt dieselbe Tangentialebene haben oder wenn  $S^*$  auf  $K^2$  oder endlich  $S_1^*$  auf  $F_4$  liegt.

Der Fall, daß der Doppelpunkt  $D_\infty$  auf  $K^2$  liegt, kann hier nicht in Betracht kommen, weil dann die Ordnung von  $C_s$  um 2 Einheiten verringert würde.

Die beiden letzten Kriterien für das Auftreten eines Doppelpunktes zweiter Art sagen aus:

Wenn der Kreis  $\Sigma'$  der zweiten Reihe, welcher dem Nullkreis  $S$  der ersten entspricht, durch  $S$  geht, so ist  $S$  ein Doppelpunkt der  $C_s$  oder wenn der Kreis  $\Sigma_1$  der ersten Reihe, welcher dem Nullkreis  $S_1$  der zweiten entspricht, durch  $S_1$  geht, so ist  $S_1$  ein Doppelpunkt der  $C_s$ . Es bleibt noch zu untersuchen, welche Bedingung erfüllt sein muß, damit  $F_4$  und  $K^2$  in einem gemeinsamen Punkt dieselbe Tangentialebene haben. Soll  $P^*$  diese Eigenschaft haben, so müssen durch  $P$  2 korrespondierende Kreise  $K$  und  $K'$  der beiden Reihen gehen, welche sich in  $P$  berühren.  $p$  sei die Tangente, nach der die Berührung stattfindet. Ist  $\Re$  der homologe Punkt zu  $P$  auf dem Gegenkreis  $R$ , so ist die Parallele  $q'$  zu  $p$  durch den symmetrischen Punkt zu  $\Re$  bezüglich  $P$  die Spur der Tangentialebene der  $F_4$  in  $P^*$  auf der Projektionsebene  $E_0$ . Die Verbindungslinie  $S_1P$  muß in dieser Tangentialebene liegen; ihr Durchstoßpunkt muß sich somit auf  $q'$  befinden. Konstruiert man also den Gegenkreis  $Q'$  so, daß er im Schnittpunkt von  $q'$  und  $S_1P$  die Linie  $q'$  berührt, so haben  $K^2$  und  $F_4$  in  $P^*$  eine gemeinsame Tangentialebene und demzufolge  $C_s$  in  $P$  einen Doppelpunkt zweiter Art. Das Kriterium für einen Doppelpunkt zweiter Art ist also folgendes:  $P$  ist ein Doppelpunkt zweiter Art für  $C_s$ , wenn die Kreise  $K$  und  $K'$ , aus denen  $P$  entstanden ist, sich in diesem Punkt berühren und die Tangente, nach der diese Berührung stattfindet, in der Mitte liegt zwischen der homologen Tangente  $r$  des Gegen-

kreises  $R$  und der homologen Tangente  $q'$  des Gegenkreises  $Q'$ .

Durch das Vorhandensein eines Doppelpunktes  $P$  wird das Geschlecht der  $C_s$  um eine Einheit reduziert.

Durch Vereinigung von Doppelpunkten zweiter Art mit solchen erster Art können auch höhere Singularitäten, nämlich dreifache und vierfache Punkte der  $C_s$  hervorgebracht werden. Die Untersuchung der einzelnen Fälle ist interessant, würde aber hier zu weit führen. Ein Beispiel mag genügen. Es soll gezeigt werden, wie die Annahmen zu treffen sind, damit  $C_s$  die Punkte  $S$ ,  $S_1$  und einen beliebigen Punkt  $P$  zu Doppelpunkten zweiter Art hat.

Für diesen Fall muß also  $S^*$  auf  $K^2$  und  $S_1^*$  auf  $F_4$  liegen; ferner müssen  $K^2$  und  $F_4$  in  $P^*$  eine gemeinsame Tangentialebene haben.

Von der ersten Kreisreihe seien gegeben:  $S$ , der Gegenkreis  $R$ , der Kreis  $K$ , auf welchem  $P$  liegen soll und endlich der Kreis  $\Sigma_1$ , welcher dem Nullkreis  $S_1$  der zweiten Reihe entsprechen soll. Dann ist durch diese Angaben die zweite Reihe zweideutig bestimmt.

Die Spitze  $S_1^*$  des Kegels  $K^2$  muß liegen in der Tangentialebene in  $P^*$  an  $F_4$  und auf dem Kreis  $\Sigma_1^*$ , dessen Projektion  $\Sigma_1$  ist. Dieser Punkt ist also einer der beiden Schnittpunkte der Tangentialebene mit  $\Sigma_1^*$ . Man findet die Projektion dieser Punkte durch folgende Ueberlegung:  $p$  sei die Tangente von  $K$  in  $P$ ,  $q'$  die Spur der Tangentialebene auf  $E_0$ ,  $r_\infty$  die unendlich ferne Gerade der Ebene und endlich  $s$  die Projektion der gesuchten Schnittlinie der Tangentialebene mit der Ebene des Kreises  $\Sigma_1^*$ . Dann ist die letztere Gerade bestimmt durch die Projektivität:

$$(p q' r_\infty s) = (K K_\infty R \Sigma_1),$$

wobei  $K_\infty$  der unendlich große Kreis der Reihe ist. Das Büschel der 4 Strahlen muß also zur Reihe der Mittelpunkte jener 4 Kreise projektiv sein, wodurch  $s$  eindeutig bestimmt ist, da alle andern Elemente bekannt sind. Schneidet man jetzt  $s$  mit  $\Sigma_1$ , so ist einer dieser beiden Schnittpunkte der gesuchte Punkt  $S_1$ . Es sei ferner  $\sigma$  die Projektion der Schnittlinie der Tangentialebene mit der Parallelebene zu  $E_0$  durch den Punkt  $S_1^*$ . Zur Bestimmung von  $\sigma$  hat man die Projektivität:

$$(p q' r_{\infty} \sigma) = (K K_{\infty} R S)$$

$\sigma$  ist dadurch eindeutig bestimmt. Verbindet man nun  $S_1$  mit  $P$ , so ist der Schnittpunkt dieser Linie mit  $\sigma$  die Projektion des Durchstoßpunktes der Linie  $S_1^*P^*$  mit der Parallelebene zu  $E_0$  durch den Punkt  $S^*$ . Konstruiert man also jetzt den Kreis, welcher im Schnittpunkt von  $S_1 P$  mit  $\sigma$  die Linie  $\sigma$  berührt und durch  $S$  geht, so ist dieser Kreis  $\Sigma'$ , d. h. derjenige Kreis der zweiten Reihe, welcher dem Nullkreis  $S$  der ersten entspricht. Dadurch ist die zweite Kreisreihe den Bedingungen der Aufgabe gemäß bestimmt. Zu bemerken ist noch, daß der Gegenkreis  $Q'$  die Linie  $q'$  im Schnittpunkt mit der Linie  $S_1 P$  berührt.

Die hier entstehende  $C_8$  ist rational. Wenn man diese Kurve nach reciproken Radien transformiert und als Mittelpunkt der Transformation einen Doppelpunkt der  $C_8$  annimmt, so erhält man eine spezielle Kurve sechster Ordnung mit 10 Doppelpunkten, wovon 2 in den imaginären Kreispunkten liegen. Es ergibt sich hieraus eine verhältnismäßig einfache Konstruktion dieser ausgezeichneten Kurve sechster Ordnung.

14. Derjenige Fall ist noch besonders zu behandeln, wo für eine oder für beide Kreisreihen die charakteristische Konstante  $k = 1$ .

a) Für die erste Kreisreihe sei  $k \leq 1$ , für die zweite Kreisreihe sei  $k = 1$ . Die zweite Reihe besteht aus Kreisen, die sich im Punkt  $S_1$  berühren; d. h. die Kreise bilden ein Büschel. Der Index dieser Reihe ist  $= 1$ . Nach dem Satz von de Jonquières ist demnach das Erzeugnis dieser zwei Kreisreihen eine Kurve sechster Ordnung. Der Grund dieser Reduktion der Ordnung des Erzeugnisses um 2 Einheiten läßt sich aus unserer Raumbetrachtung leicht erkennen. Der Kegel  $K^2$  hat im angenommenen Fall eine Mantellinie, welche zur Projektionsebene senkrecht steht, d. h. der Doppelpunkt  $D_{\infty}$  der  $F_4$  liegt auf dem Kegel  $K^2$ . Der Punkt  $D_{\infty}$  ist demnach ein wirklicher Doppelpunkt der  $R_8$ . Die Projektion dieser  $R_8$  ist eine Kurve sechster Ordnung, welche die Kreispunkte zu dreifachen Punkten hat und für welche  $S_1$  ein Berührungsknoten ist. Weitere Doppelpunkte erster Art kann diese  $C_8$  nicht haben; sie ist also vom Geschlecht  $p = 2$ . Durch Transformation nach reciproken Radien für  $S_1$  als

Mittelpunkt geht die Kurve über in eine  $C_4$  mit einem unendlich fernen Doppelpunkt.

b) Haben beide Kreisreihen die charakteristische Konstante  $k = 1$ , so kann man nach Artikel 6 die erste Reihe betrachten als Projektionen der Querschnitte einer Fläche dritter Ordnung  $F_3$  mit den zur Bildebene parallelen Ebenen und die zweite Reihe als Projektionen der Querschnitte eines Kegels  $K^2$  mit denselben Ebenen. Die Durchdringungskurve beider Flächen ist eine Kurve sechster Ordnung, welche in den imaginären Kreispunkten der Ebene  $E_0$  und im Punkt  $D_\infty$  wirkliche Doppelpunkte hat. Die Projektion dieser Kurve auf  $E_0$ , also das Erzeugnis der beiden projektiven Kreisreihen, ist eine bicirkulare Kurve vierter Ordnung, welche durch  $S$  und  $S_1$  geht und in diesen Punkten die Tangenten der beiden Kreisreihen berührt.

In den Fällen a) und b) kann man nach der allgemeinen Methode noch Doppelpunkte zweiter Art erzeugen.

15. Eine lineare Kreisreihe kann auch zu andern Gebilden erster Stufe in projektive Beziehung gesetzt werden, vorausgesetzt, daß diese Gebilde rational sind. Im Anschluß an Artikel 14 soll hier das Erzeugnis der projektiven Zuordnung der Kreise einer linearen Reihe zu den Kreisen eines beliebigen Büschels untersucht werden.

Die Kreise eines Büschels mit 2 getrennten Grundpunkten können angesehen werden als Orthogonalprojektionen der Querschnitte eines Hyperboloides  $H^2$  mit den zur Bildebene parallelen Ebenen. Das Hyperboloid geht durch das unendlich ferne Projektionszentrum und ist ein hyperbolisches, wenn die Grundpunkte reell sind, ein elliptisches, wenn die Grundpunkte imaginär sind. Die Grundpunkte  $G$  und  $L$  des Kreisbüschels repräsentieren die Projektionen der 2 durch das Projektionszentrum gehenden Erzeugenden  $g$  und  $l$  der Fläche. Die Kreise der Reihe stellen dann wieder die Projektionen der Querschnitte der zur Bildebene parallelen Ebenen mit einer  $F_4$  dar. Die beiden Flächen  $F_4$  und  $H^2$  durchschneiden sich in einer Kurve achter Ordnung, welche die imaginären Kreispunkte der Bildebene zu dreifachen Punkten und das Projektionszentrum  $D_\infty$  zu einem Doppelpunkt hat. Die Projektion dieser Kurve aus  $D_\infty$  ist eine Kurve sechster Ordnung. Die imaginären Kreispunkte sind dreifache Punkte der Kurve, die

beiden Punkte  $G$  und  $L$  sind Doppelpunkte. Weitere Doppelpunkte erster Art können nicht vorkommen. Die Kurve ist also vom Geschlecht 2.  $G$  und  $L$  sind Doppelpunkte erster Art, denn  $g$  z. B. schneidet  $F_4$  außer in  $D_\infty$  in 2 weiteren Punkten, welche der  $R_s$  angehören und deren Projektionen in  $G$  vereinigt liegen.

Die Tangente in einem Punkt  $P$  der  $C_6$  wird erhalten als Projektion der Tangente  $t^*$  im entsprechenden Punkt  $P^*$  an die Raumkurve  $R_s$ .  $t^*$  ist die Schnittlinie der Tangentialebenen in  $P^*$  an  $F_4$  und an  $H^2$ . Die Spur der Tangentialebene von  $F_4$  in  $P^*$  auf der Bildebene  $E_0$  wird nach Artikel 4 bestimmt als die Parallele zur Tangente in  $P$  an den Kreis  $K$  durch den symmetrischen Punkt zum homologen Punkt  $\mathfrak{R}$  in Bezug auf  $P$ . Die Tangentialebene in  $P^*$  an das Hyperboloid wird am einfachsten bestimmt durch die 2 durch  $P^*$  gehenden geraden Linien des Hyperboloides. Es sei  $Q'$  der Kreis des Büschels, welcher dem unendlich großen Kreis der Reihe entspricht, d. h. der Schnitt des Hyperboloides mit der Ebene  $E_0$ . Die Projektionen der 2 Geraden des Hyperboloides durch  $P^*$  sind die Verbindungslinien von  $P$  mit den Grundpunkten  $G$  und  $L$  des Büschels. Die zweiten Schnittpunkte dieser Geraden mit dem Kreis  $Q'$  sind die Durchstoßpunkte derselben mit der Ebene  $E_0$ . Die Verbindungslinie der beiden letzten Punkte ist die Spur der Tangentialebene des Hyperboloides in der Ebene  $E_0$ . Wenn man diese Spur mit der frühern schneidet, so erhält man einen Punkt der Tangente in  $P$  an  $C_6$ .

Die Konstruktion der Spur der Tangentialebene des Hyperboloides erleidet eine geringe Modifikation in dem Fall, wo die Punkte  $G$  und  $L$  imaginär sind. Man findet dann die genannte Spur, wenn man zur Verbindungslinie  $GL$  bezüglich  $P$  und die Polare von  $P$  bezüglich des Kreises  $Q'$  den vierten harmonischen Strahl konstruiert.

16. Zum Schluß dieses Abschnittes möchte ich noch bemerken, daß die projektiven linearen Kreisreihen auch aus einem andern Gesichtspunkt betrachtet werden können. Die *cyklographischen Bilder* <sup>1)</sup> der Punkte einer geraden Linie erfüllen eine lineare Kreisreihe und umgekehrt können die Kreise

<sup>1)</sup> Man vergleiche: *Fiedler*, *Cyklographie oder Konstruktion der Aufgaben über Kreise und Kugeln*, Leipzig 1882.

einer linearen Reihe stets als die cyklographischen Bilder der Punkte einer Geraden aufgefaßt werden.

Die Paare entsprechender Kreise  $KK'$  von 2 projektiven linearen Reihen können demnach angesehen werden als die cyklographischen Bilder der Paare entsprechender Punkte von 2 projektiven geraden Punktreihen im Raum.

Man hat also den Satz: Der Ort der Schnittpunkte der cyklographischen Bilder entsprechender Punktepaare von 2 projektiven geraden Punktreihen im Raum ist eine Kurve achter Ordnung vom Geschlecht 3.

Mit Hülfe des Satzes von *de Jonquières* läßt sich die Ordnung der analogen Kurve bestimmen für den Fall, daß die projektiven Punktreihen auf Raumkurven beliebiger Ordnung  $N_1$  resp.  $N_2$  gegeben seien. Es ergibt sich der Satz: Der Ort der Schnittpunkte der cyklographischen Bilder entsprechender Punktepaare von 2 projektiven Punktreihen auf Raumkurven von der Ordnung  $N_1$  und  $N_2$  ist im allgemeinen eine Kurve von der Ordnung  $4(N_1 + N_2)$ .

Die Richtigkeit dieses Satzes geht daraus hervor, daß die Indices der so entstehenden Kreisreihen gleich sind  $2N_1$  und  $2N_2$ .