

Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 13 (1903)
Heft: 4

Artikel: Die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen
Autor: Brandenberger, C.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-789218>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 05.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Die arithmetischen Theorien der Irrationalzahlen.

Vortrag, gehalten in der Vereinigung von Mathematikern an schweiz. Mittelschulen, am 6. Dezember 1902.

Von Dr. C. Brandenberger.

1. Die irrationalen Zahlen haben in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts von drei Mathematikern, von Dedekind, Weierstrass und G. Cantor, eine rein arithmetische Behandlung erfahren.

Die Dedekindschen Betrachtungen stammen aus dem Jahre 1858, also aus der Zeit, wo Dedekind Professor der Mathematik am eidg. Polytechnikum in Zürich war. Er hatte damals Vorlesungen zu halten über die Elemente der Differential- und Integralrechnung und fühlte bei dieser Gelegenheit wie nie zuvor den Mangel einer streng begründeten Arithmetik. Er fasste den Entschluss, so lange nachzudenken, bis er „eine rein arithmetische und völlig strenge Begründung der Prinzipien der Infinitesimalrechnung gefunden haben würde“. Dies gelang ihm im November 1858, aber erst im Jahre 1872 veröffentlichte er seine Untersuchungen in einer kleinen Schrift „Stetigkeit und irrationale Zahlen“, die 20 Jahre später eine zweite Auflage erlebte (Braunschweig, Vieweg & Sohn, 1 M.).

Weierstrass behandelte die Irrationalzahlen in der Einleitung zu seinen Vorlesungen über die Theorie der analytischen Funktionen. Veröffentlicht wurde seine Darstellung durch seine Schüler: Durch den Gymnasiallehrer Kossak in der Programm-Abhandlung des Werderschen Gymnasiums, Berlin 1872; durch Pincherle in einer italienischen mathematischen Zeitschrift (Giorn. di mat. 18); durch Biermann in seinem Buche „Theorie der analytischen Funktionen“, Leipzig 1887. Georg Cantor publizierte seine Theorie in der Abhandlung „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“ im 5. Bande der math. Annalen, ebenfalls im Jahre 1872. Heine schliesst sich in seinen „Elementen der Funktionenlehre“ (J. für Math. 74) an

Cantor an. Die neuern Lehrbücher der Arithmetik, Algebra und algebraischen Analysis gehen entweder von der Cantorschen oder der Dedekindschen Definition der Irrationalzahl aus. Stolz und Gmeiner z. B. stellen in ihrer „Theoretischen Arithmetik“ die Cantorsche Definition an die Spitze und behandeln die Irrationalzahlen im Anschluss an die Lehre von den systematischen Brüchen. Von der Dedekindschen Definition gehen aus: Weber in seiner „Algebra“; ferner Hr. Prof. Burkhardt in Zürich in seinem neuesten Buche „Algebraische Analysis“, das in Bälde erscheinen wird.

2. Bevor ich dazu übergehe, in den Hauptzügen wenigstens, die drei Theorien der Irrationalzahlen darzustellen, will ich (in einer Art Vorbereitung) von drei Punkten reden. Erstens von der Erweiterung des Zahlbegriffs im allgemeinen. Ich werde bei dieser Gelegenheit die Fragen nennen, die wir bei jeder Erweiterung des Zahlbegriffes, also auch bei der Einführung der irrationalen Zahlen zu beantworten haben. Zweitens werde ich an einem Beispiele zeigen, dass wir mit den rationalen Zahlen nicht auskommen, dass wir eine unabsehbare Menge von Aufgaben stellen können, die man im Reiche der rationalen Zahlen nicht zu lösen im stande ist. Drittens will ich an einen für die Einführung der irrationalen Zahlen fundamentalen Satz über rationale Zahlen erinnern.

3. Den Ausgangspunkt der Arithmetik bilden die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5 Sie werden zum Gegenstand mathematischer Untersuchung, wenn man mit ihnen gewisse Verknüpfungen vornimmt, wenn man mit ihnen gewisse Operationen ausführt, wenn man mit ihnen „rechnet“. Die Arithmetik leitet Gesetze ab, die angeben, wie gerechnet wird. Jedes Gesetz sagt aus, dass eine Reihe von Operationen ersetzt werden kann durch eine Reihe anderer Operationen, ohne dass sich das Schlussergebnis ändert, z. B. $c(a + b) = ac + bc$ oder $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$. Wir unterscheiden Fundamentalgesetze und abgeleitete Gesetze. Der Einteilungsgrund liegt in der Art der Beweisführung. Das erste der beiden genannten Gesetze ist ein Fundamentalgesetz, das zweite ein abgeleitetes Gesetz. Das erste wird in folgender Weise bewiesen: $c(a + b)$ heisst, man soll $(a + b)$ c mal als Summand setzen. Wir gehen also zurück auf den Begriff der Multiplikation und die Bedeutung der Zahl c . Ein Gesetz, bei dessen Herleitung auf die reale Bedeutung der Operationen und der Objekte zurückgegangen wird, heisst ein Fundamentalgesetz. Soll dagegen die Richtigkeit der Formel $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ nachgewiesen werden, so wird einfach multipliziert nach bereits abgeleiteten Gesetzen; wir rechnen mit den Zeichen der Operationen und der Objekte. Solche Gesetze heissen abgeleitete Gesetze. Bei der Erweiterung des Zahlengebietes ist diese

Einteilung der arithmetischen Gesetze, wie wir bald sehen werden, wichtig.

Während die direkten Operationen im Reiche der natürlichen Zahlen unter allen Umständen ausführbare Operationen sind, erfordern die indirekten Operationen viermal eine Erweiterung des Zahlbegriffs, d. h. man macht neben den natürlichen Zahlen noch andere Gedankendinge, die man auch mit dem Wort „Zahl“ bezeichnet, zum Gegenstand der Untersuchung. Wir führen ein bei der Subtraktion die negativen, bei der Division die gebrochenen, bei der Wurzelausziehung die irrationalen und die komplexen Zahlen. Die neuen Zahlen müssen definiert werden. Wir verwenden dazu die bereits vorhandenen Zahlen. Die gebrochene Zahl z. B. kann durch ein „Paar ganzer Zahlen“ eingeführt werden; zur Definition der Irrationalzahl ist nach jeder der drei Definitionen eine unendliche Menge rationaler Zahlen nötig. Darin besteht das Gemeinsame der drei Definitionsformen; der Unterschied liegt in den Bedingungen, die die unendliche Menge rationaler Zahlen zu erfüllen hat, damit sie als Grundlage der Definition einer irrationalen Zahl dienen kann und, wie Cantor sagt, „in dem Erzeugungsmoment, durch welches die Menge mit der durch sie definierten Zahl verknüpft ist“. Sind die neuen Objekte definiert, so muss gezeigt werden, wie man sie unter sich und mit den bereits vorhandenen Zahlen vergleicht und wie man mit ihnen rechnet. Man versucht, die Begriffe des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins und die Grundoperationen so zu definieren, dass die Gesetze, die für das Rechnen mit natürlichen Zahlen gelten, auch für die neuen Zahlen aufrecht erhalten bleiben.

Ich fasse zusammen: Führen wir neue Zahlen ein, so müssen sie genau definiert werden; es muss untersucht werden, ob und wie sich die Grundoperationen und die Begriffe des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins definieren lassen, dass die Gesetze, nach welchen mit natürlichen Zahlen gerechnet wird, auch im erweiterten Zahlenreiche gelten. Dabei genügt der Beweis für die Permanenz der Fundamentalgesetze; gelten diese, so gelten auch die abgeleiteten Gesetze.

4. Um zu zeigen, dass wir mit den rationalen Zahlen nicht auskommen, betrachten wir die rein quadratische Gleichung

$$x^2 = a,$$

wo a eine positive ganze Zahl ist. Wir fragen nach den Bedingungen, unter denen die Gleichung eine rationale Wurzel hat. Ist die Wurzel rational, so ist sie entweder eine ganze Zahl n , oder ein Bruch $\frac{p}{q}$,

wo p und q ganz und als relativ prim vorausgesetzt werden. Wenn die ganze Zahl n die Wurzel der Gleichung ist, so ist $a = n^2$, d. h. a ist das Quadrat einer ganzen Zahl. Ist dagegen

$$x = \frac{p}{q}$$

die Wurzel, so ist

$$\frac{p^2}{q^2} = a,$$

woraus folgt

$$p^2 = a q^2.$$

a , p und q sind ganze Zahlen. Die linke und die rechte Seite dieser Gleichung sind ganze Zahlen. Ein Faktor der rechten Seite muss auch Faktor der linken Seite sein, q^2 muss in p^2 , q in p enthalten sein, was gegen die Voraussetzung ist. Ein Bruch kann somit die Gleichung nicht befriedigen. Wir finden den Satz: Ist a keine Quadratzahl, so gibt es keine rationale Zahl, welche die Gleichung $x^2 = a$ befriedigt. Der ausgesprochene Satz ist der einfachste Spezialfall eines allgemeinen Satzes über algebraische Gleichungen.

Nun stehen zwei Wege offen: Wir können erklären, dass solche Gleichungen keine Lösung zulassen, oder versuchen, durch Einführung neuer Zahlen ihre Lösung zu ermöglichen. Da geometrische Probleme oft solche Gleichungen liefern, werden wir den zweiten Weg einschlagen und neue Zahlen, die sogenannten Irrationalzahlen, schaffen. Eine Irrationalzahl, die, wie hier, Wurzel einer algebraischen Gleichung sein kann, heisst eine algebraische irrationale Zahl. Jede nicht-algebraische Irrationalzahl heisst transzendent. Zwei transzendente Irrationalzahlen spielen eine grosse Rolle: π , das Verhältniss des Umfangs zum Durchmesser eines Kreises, und e , die Basis des natürlichen Logarithmen-systems. Es gibt sehr viel mehr transzendente als algebraische Irrationalzahlen. Ich verweise Sie in dieser Beziehung auf die Schrift von Klein & Tägert: „Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementarmathematik“ (Leipzig, 1895). Klein beweist dort, dass es sehr viel mehr transzendente als algebraische Irrationalzahlen gibt; er zeigt, dass in jedem noch so kleinen Bereiche sozusagen ∞^8 transzendente Zahlen liegen.

Ich habe diese Bemerkungen hier gerne eingeschoben, um Sie die Wichtigkeit einer strengen Theorie der Irrationalzahlen erkennen zu lassen. Sie sehen, dass es sich nicht nur um Quadrat- und Kubikwurzeln handelt; die Natur der Zahlen π und e kann erst auf Grund einer vollkommenen Theorie der irrationalen Zahlen überhaupt erkannt werden.

5. Zum Schlusse dieser Vorbereitung will ich an einen Satz über rationale Zahlen erinnern, den wir oft brauchen werden: „Die rationalen Zahlen bilden eine geordnete, überall dichte, aber keine stetige Menge.“ Ich will versuchen, Ihnen den Inhalt dieses Satzes und die Bezeichnungen „Menge“, „geordnet“, „dicht“ und „stetig“ zu erklären.

Unter einer Menge verstehen wir die begriffliche Zusammenfassung von Objekten unserer Anschauung oder unseres Denkens. Wir, geehrte Kollegen, bilden eine Menge; die natürlichen Zahlen bilden eine Menge; die rationalen Zahlen bilden eine Menge.

Eine Menge heisst geordnet, wenn angegeben werden kann, welches von zwei beliebigen Elementen der Menge das grössere ist. Die rationalen Zahlen bilden eine geordnete Menge. Denn wählen wir zwei beliebige rationale Zahlen, z. B. $\frac{3}{4}$ und $\frac{5}{6}$, so kann man sofort entscheiden, welches Element das grössere ist.

Eine Menge heisst dicht, wenn zwischen zwei Elementen immer noch andere Elemente der Menge gefunden werden. Bilden die natürlichen Zahlen eine dichte Menge? Nein; denn zwischen zwei aufeinanderfolgenden positiven ganzen Zahlen liegt kein Element der Menge. Die rationalen Zahlen hingegen bilden eine überall dichte Menge. Geben Sie mir zwei beliebige rationale Zahlen, sie mögen noch so nahe beieinander liegen, so kann ich immer eine und damit unendlich viele andere rationale Zahlen nennen, die zwischen den gegebenen Zahlen liegen. Zwischen den rationalen Zahlen a und b liegt z. B. ihr arithmetisches Mittel $\frac{1}{2}(a+b)$.

Wann heisst eine Menge stetig? Dedekind findet das Wesen der Stetigkeit in dem folgenden geometrischen Axiome: „Zerfallen alle Punkte der Geraden in zwei Klassen von der Art, dass jeder Punkt der ersten Klasse links von jedem Punkt der zweiten Klasse liegt, so existirt ein und nur ein Punkt, welcher diese Einteilung aller Punkte in zwei Klassen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.“¹⁾ Demnach wird eine Menge stetig genannt werden, wenn eine Scheidung aller ihrer Elemente in zwei Klassen von der Art, dass jedes Element der einen Klasse grösser ist als jedes Element der andern Klasse, durch ein bestimmtes Element der Menge und nur durch ein solches möglich ist. Man bezeichnet die erste Klasse auch als das Obergebiet, die zweite als das Untergebiet. Nennen wir eine Einteilung der Elemente

¹⁾ „Stetigkeit und irrationale Zahlen“, p. 11.

einer Menge in zwei Klassen von der Art, dass jedes Element einer Klasse angehört und dass jedes Element der einen Klasse kleiner ist als jedes Element der andern Klasse, einen „Schnitt in die Menge“, so können wir die Definition der Stetigkeit so fassen:

Eine Menge heisst stetig, wenn jeder Schnitt in die Menge durch ein bestimmtes Element der Menge erzeugt wird.

Wir behaupten, dass die rationalen Zahlen keine stetige Menge bilden. In der Tat werden wir bei der Dedekindschen Theorie zeigen, dass wir in die Menge der rationalen Zahlen Schnitte ausführen können, nicht nur durch rationale Zahlen, also nicht nur durch Elemente der Menge, sondern auch auf andere Art. „Dichte Menge“ und „stetige Menge“ sind wohl auseinander zu halten.

Ich will versuchen, Ihnen diese Begriffe durch ein Beispiel zu veranschaulichen. Sie, verehrte Anwesende, bilden eine Menge. Sie wird zu einer geordneten, wenn ich Sie in gerader Linie aufstelle und festsetze, dass von zwei Elementen dasjenige das höhere sein soll, das rechts vom andern steht. Nehme ich die 12. Person aus der Reihe heraus, rechne die 11 ersten zur ersten, die andern zur zweiten Klasse, so habe ich einen Schnitt in die Menge ausgeführt, und zwar wurde dieser Schnitt erzeugt durch ein Element der Menge. Sollen dagegen die 15 ersten Personen der 1., alle andern der 2. Klasse angehören, so wird dieser Schnitt nicht durch ein Element der Menge ausgeführt. Wir werden zeigen, dass wir in die Menge der rationalen Zahlen sowohl Schnitte der ersten wie der zweiten Art ausführen können. Wäre sie eine stetige Menge, so liessen sich keine Schnitte der zweiten Art konstruieren.

6. Wir wenden uns zur **Dedekindschen** Theorie der Irrationalzahlen.

Wir fassen die unendliche Menge rationaler Zahlen ins Auge und führen, nach irgend einem bekannten Gesetze, einen Schnitt in die Menge. Das Untergebiet sei A , das Obergebiet A' . Jede rationale Zahl kommt in A oder A' vor. Jedes A ist kleiner als jedes A' . Der Schnitt wird passend durch A/A' bezeichnet. Ein Beispiel: Ich rechne zum Untergebiet alle Zahlen, die kleiner sind als 1000, also alle negativen Zahlen und die positiven Zahlen bis 1000; dem Obergebiet gehören alle Zahlen an, die grösser sind als 1000. 1000 selbst rechne ich z. B. zum Untergebiet. Wir können von jeder Zahl sagen, zu welchem Gebiet sie gehört: —3 zum Untergebiet; 1001 zum Obergebiet.

Vergleichen wir alle denkbaren Schnitte, die in die Menge der rationalen Zahlen ausgeführt werden können, so werden wir drei Fälle unterscheiden:

I. Das Untergebiet enthält eine grösste Zahl, d. h. eine Zahl, die grösser ist als alle andern Zahlen des Untergebietes und das Obergebiet eine kleinste Zahl, d. h. eine Zahl, die kleiner ist als alle andern Zahlen des Obergebietes.

II. Das Untergebiet besitzt eine grösste, aber das Obergebiet keine kleinste Zahl oder das Obergebiet besitzt eine kleinste, aber das Untergebiet keine grösste Zahl.

III. Es gehört weder dem Untergebiet eine grösste noch dem Obergebiet eine kleinste Zahl an.

Wir werden zeigen: Der Schnitt I ist undenkbar; durch den Schnitt II wird die rationale, durch den Schnitt III die irrationale Zahl definirt.

Dass der erste Fall nicht statthaben kann, sieht man indirekt ein. Es sei g die grösste Zahl des Untergebietes, k die kleinste Zahl des Obergebietes. Somit ist $g < k$. Die Menge der rationalen Zahlen ist eine überall dichte Menge, d. h. es liegen zwischen zwei beliebigen Elementen noch andere Elemente. Zwischen g und k z. B. liegt $m = \frac{1}{2}(g + k)$. Zu welchem Gebiete gehört m ? m ist grösser als g , grösser als die grösste Zahl des Untergebietes; m gehört nicht zum Untergebiet. m ist kleiner als k , kleiner als die kleinste Zahl des Obergebietes; m gehört nicht zum Obergebiet. m gehört also weder zum Unter- noch zum Obergebiet, was aber gegen die Definition des Schnittes ist. Dieser Widerspruch wird nur dadurch gehoben, dass wir zugeben, dass ein Schnitt I, also ein Schnitt, bei dem das Untergebiet eine grösste und gleichzeitig das Obergebiet eine kleinste Zahl besitzen, unmöglich ist.

Kehren wir zu dem Beispiel zurück, wo der Schnitt durch die Zahl 1000 erzeugt wird. 1000 gehört zum Untergebiet; dieses besitzt also eine grösste Zahl, nämlich 1000. Das Obergebiet besitzt aber keine kleinste Zahl. Denn bezeichnet man irgend eine Zahl des Obergebietes als die kleinste, so kann man immer noch andere Zahlen nennen, die zwischen ihr und 1000 liegen. 1000,000001, welche Zahl doch 1000 sehr nahe kommt, ist nicht die kleinste; denn es ist z. B. 1000,00000001 noch kleiner und gehört auch noch dem Obergebiet an. — Rechnen wir 1000 zum Obergebiet, so besitzt das Obergebiet eine kleinste, aber das Untergebiet keine grösste Zahl. Die grösste Zahl des Untergebietes, bez. kleinste Zahl des Obergebietes ist gerade die Zahl, welche den Schnitt hervorbringt. Umgekehrt können wir jede rationale Zahl durch einen solchen Schnitt definiren.

Ein Schnitt in die Menge der rationalen Zahlen, so beschaffen, dass entweder das Untergebiet eine grösste oder das Obergebiet eine kleinste Zahl besitzt, definiert eine rationale Zahl.

Wir kommen zur Frage nach der Möglichkeit des Schnittes III. Können wir in die Menge der rationalen Zahlen Schnitte ausführen von der Art, dass weder das Untergebiet eine grösste, noch das Obergebiet eine kleinste Zahl besitzt? Wir beweisen, dass dies in der Tat möglich ist. Zu diesem Zwecke konstruieren wir in die Menge der rationalen Zahlen einen Schnitt nach folgender Festsetzung: $\frac{m}{n}$ sei eine positive Zahl, aber kein Quadrat, z. B. nicht $\frac{9}{16}$. Zum Untergebiet rechnen wir alle positiven Zahlen, deren Quadrat $<$ ist als $\frac{m}{n}$, zum Obergebiet alle Zahlen, deren Quadrat $>$ ist als $\frac{m}{n}$. Dadurch ist der Schnitt definiert. Wir können von jeder beliebig vorgelegten Zahl entscheiden, zu welcher Klasse sie gehört. Wir quadrieren sie, vergleichen das Quadrat mit $\frac{m}{n}$ und werfen sie ins Unter- oder Obergebiet, je nachdem das Quadrat kleiner oder grösser ist als $\frac{m}{n}$. Nun behaupten wir: Bei diesem Schnitt gehört dem Untergebiet weder eine grösste, noch dem Obergebiet eine kleinste Zahl an. Wir begnügen uns, den ersten Teil der Behauptung nachzuweisen. a sei eine Zahl des Untergebietes, also $a^2 < \frac{m}{n}$. Die Menge der rationalen Zahlen ist dicht. Somit lässt sich eine Zahl a' finden, so beschaffen, dass a'^2 zwischen a^2 und $\frac{m}{n}$ liegt, mit a. W. ist

$$\frac{m}{n} - a'^2 < \frac{m}{n} - a^2,$$

aus welcher Ungleichung leicht $a' > a$ gefunden wird. Es kann somit zu jeder Zahl a des Untergebietes immer eine grössere Zahl a' des Untergebietes gefunden werden, d. h. das Untergebiet besitzt keine grösste Zahl. Ebenso beweist man, dass dem Obergebiet keine kleinste Zahl angehört. Der so konstruierte Schnitt wird also nicht durch eine rationale Zahl hervorgebracht. Vergleichen wir diese Tatsache mit der oben gegebenen Definition der Stetigkeit, so können wir schliessen: Die ratio-

nalen Zahlen bilden keine stetige, sondern eine unstetige Menge. Um die unstetige Menge der rationalen Zahlen zu der stetigen Menge der allgemeinen (reellen) Zahlen zu ergänzen, ordnen wir jeder Lücke eine neue, eine irrationale Zahl zu. Die Dedekindsche Definition der Irrationalzahl kann also so formuliert werden:

Ein Schnitt in die Menge der rationalen Zahlen, so beschaffen, dass weder das Untergebiet eine grösste, noch das Obergebiet eine kleinste Zahl besitzt, definirt eine irrationale Zahl.

Die rationalen und irrationalen Zahlen bilden die reellen oder allgemeinen Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen ist eine stetige; denn ein Schnitt in diese Menge wird immer durch ein Element der Menge erzeugt.

Ich habe Ihnen den Dedekindschen Existenzbeweis der Irrationalzahl so ausführlich vorgetragen, weil er, mich wenigstens, so recht von dem Vorhandensein dieser Zahlen überzeugt hat.

7. Nun soll an einem Beispiel gezeigt werden, wie auf Grund der Definition der Irrationalzahl mittelst des Begriffes des Schnittes diese berechnet werden kann. Als Beispiel wählen wir die irrationale Zahl, die den Mathematikern zuerst entgegentrat, nämlich $\sqrt{2}$. Wir suchen die Zahl, deren Quadrat 2 ist. Zu diesem Zwecke konstruieren wir in die Menge der rationalen Zahlen einen Schnitt nach folgender Festsetzung: Zum Untergebiet rechnen wir alle Zahlen, deren Quadrat < 2 , zum Obergebiet alle Zahlen, deren Quadrat > 2 . Durch Probieren findet man: 1 gehört zum Untergebiet, denn $1^2 = 1 < 2$; 2 gehört zum Obergebiet, denn $2^2 = 4 > 2$. Zum Untergebiet gehören alle Zahlen ≤ 1 , zum Obergebiet alle Zahlen ≥ 2 . Dagegen ist noch unentschieden, welchem Gebiete die Zahlen zwischen 1 und 2 angehören. Greifen wir eine beliebige Zahl aus dem „Intervall der Unentschiedenheit“ heraus, so können wir entscheiden zu welchem Gebiete sie gehört. 1,5 z. B. gehört zum Obergebiet, denn $1,5^2 = 2,25 > 2$. Das Obergebiet ist bis 1,5 ausgedehnt, das Intervall der Unentschiedenheit ist jetzt $1 \dots 1,5$. Die Zahl 1,25 gehört zum Untergebiet; denn $1,25^2 = 1,5625 < 2$. Das Intervall der Unentschiedenheit ist nun $1,25 \dots 1,5$. Auf diese Weise findet man, dass angehören:

dem Untergebiet:	dem Obergebiet:
1	2
1,25	1,5
1,375	1,4375
1,4063	1,4219
1,4141	1,4180
⋮	1,4160
	1,4150
	1,4145
	⋮

Das Intervall der Unentschiedenheit ist nun

$$1,4141 \dots 1,4145;$$

wir wissen $1,4141 < \sqrt{2} < 1,4145$. Durch hinreichend oftmaliges Halbieren des Intervalles der Unentschiedenheit kann man der Irrationalzahl beliebig nahekommen, man kann sie mit vorgeschriebener Genauigkeit berechnen.

Diesem Beispiele entnehmen wir die allgemeine Bemerkung, dass wir bei der Berechnung einer Irrationalzahl auf Grund der Definition durch den Schnitt eine Zahl des Unter- und eine des Obergebietes kennen und ein Verfahren besitzen müssen, durch welches das Intervall der Unentschiedenheit immer kleiner und kleiner gemacht werden kann.

Näheres über die Berechnung der Irrationalzahlen auf Grund der drei Definitionen finden Sie in einem Aufsätze von Hrn. Prof. Burkhardt (Vierteljahresschrift der naturf. Gesellschaft Zürich, Bd. 46, p. 179).

8. Wir zeigen, wie zwei allgemeine, durch Schnitte definirte Zahlen, verglichen werden können, d. h. wir definiren die Begriffe des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins.

Gegeben seien die Zahlen $\alpha = A/A'$ und $\beta = B/B'$. α und β heissen gleich, wenn jedes A ein B und jedes A' ein B' ist. — α heisst grösser als β , wenn mindestens ein A ein B' ist. — α heisst kleiner als β , wenn mindestens ein A' ein B ist.

9. Was die Grundoperationen mit so definirten Zahlen betrifft, beschränke ich mich auf die Definition der Addition und auf den Beweis für die Gültigkeit des Kommutationsgesetzes der Addition. Eine ausführliche Darstellung findet sich z. B. in Cahen, „Eléments de la théorie des nombres“, einem Buche, das die Theorie der Irrationalzahlen sehr klar auseinandersetzt.

Gegeben seien wieder die Zahlen $\alpha = A/A'$ und $\beta = B/B'$. Was versteht man unter der Summe $\alpha + \beta$? Wir addiren jedes A zu jedem B und erhalten eine Menge C . Wir addiren jedes A' zu jedem B' und erhalten eine Menge C' . Nun lässt sich zeigen, dass die Mengen C und C' die zur Definition einer allgemeinen Zahl notwendigen Eigenschaften besitzen: Jedes C ist kleiner als jedes C' ; jede rationale Zahl gehört (im allgemeinen) entweder C oder C' an. Der Schnitt C/C' in die Menge der reellen Zahlen definiert eine neue Zahl γ , die rational oder irrational sein kann. $\gamma = C/C'$ heisst die Summe von $\alpha = A/A'$ und $\beta = B/B'$.

Bilden wir statt $\alpha + \beta$ in gleicher Weise $\beta + \alpha$, so gewinnt man offenbar dieselbe Zahl γ , d. h. es ist $\alpha + \beta = \beta + \alpha$, das kommutative Gesetz der Addition gilt.

10. Während Dedekind die Irrationalzahl ohne Benützung irgend eines arithmetischen Ausdruckes definiert, knüpfen Weierstrass und Cantor ihre Definitionen an eine bestimmte formale Darstellung der Irrationalzahl an.

Wir gehen aus von einem Satze, den wir schon unsern Schülern beweisen. Ist a eine positive Zahl, aber keine n .Potenz einer rationalen Zahl, so lässt sich $\sqrt[n]{a}$ in einen unendlichen, unperiodischen Dezimalbruch entwickeln, in einen Dezimalbruch von der Form

$$c_0 + \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{100} + \frac{c_3}{1000} + \frac{c_4}{10000} + \dots$$

c_0 ist 0 oder eine positive ganze Zahl; $c_1, c_2, c_3, \dots$ sind Zahlen der Reihe 0, 1, 2, ..., 9. Nach diesem Satze lässt sich $\sqrt{2}$ in einen unperiodischen Dezimalbruch entwickeln: $\sqrt{2} = 1,4142\dots$, oder

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{4}{10} + \frac{1}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{2}{10000} + \dots$$

Dieser Ausdruck besitzt zwei Eigenschaften, von welchen man zu der Definition der Irrationalzahl nach Weierstrass und Cantor gelangen kann. Die beiden Eigenschaften lauten:

a) Wieviele und welche der Grössen

$$1, \frac{4}{10}, \frac{1}{100}, \frac{4}{1000}, \frac{2}{10000}, \dots$$

ich auch in endlicher Anzahl summire, die Summe ist immer endlich. Addiren wir die 5 ersten Grössen, so erhalten wir eine endliche Zahl; addiren wir die 1., 3., ..., 999. Grösse, die Summe ist endlich. Nennt man die Summe aus einer beliebigen, aber endlichen Anzahl der Grössen einen „Bestandteil“ der Reihe, so drückt sich die erste Eigenschaft kurz so aus: „Jeder Bestandteil ist endlich.“

b) Um die zweite Eigenschaft zu erkennen, bilden wir die Reihe:

$$1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; \dots$$

Wir sehen: Dadurch, dass ich eine hinreichend grosse, aber endliche Anzahl von Anfangsgliedern dieser Reihe unterdrücke, kann die Differenz zweier beliebiger Glieder der noch übrig bleibenden Reihe beliebig klein gemacht werden. Soll die Differenz zweier Glieder z. B. kleiner sein als $\frac{1}{100}$, so genügt es, die 3 ersten Glieder wegzulassen. Auch diese Eigen-

schaft können wir mittelst des Begriffes der „Schwankung“ kürzer fassen. Unter einer Schwankung ist der absolute Wert der Differenz zweier Glieder zu verstehen. Die Schwankung von 1,41 und 1,4142 z. B. ist:

$$|1,41 - 1,4142| = 0,0042.$$

Damit lautet die zweite Eigenschaft: „Dadurch, dass ich eine endliche Zahl von Anfangsgliedern unterdrücke, kann die Schwankung unter jeden Kleinheitsgrad hinuntergedrückt werden.“

Weierstrass entnimmt der ersten Eigenschaft das Prinzip der Summenbildung; Cantor steigt von der zweiten empor zu dem Begriff der Fundamentalreihe. Was eine Fundamentalreihe ist, werde ich bei der Cantorsche Theorie zeigen; für jetzt sei nur bemerkt, dass $\sqrt{2}$ dargestellt wird durch die Fundamentalreihe $1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots$

11. Auch **Weierstrass** legt der Definition der Irrationalzahl eine unendliche Menge rationaler (vorläufig positiver) Zahlen zugrunde. Wir schreiben sie nebeneinander und verbinden sie durch Pluszeichen:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

Dieses Aggregat definirt ein neues Objekt, das wir mit α bezeichnen wollen. Wir nennen α eine allgemeine Zahl. †

Merken wir uns aber wohl: Das neue Objekt wird durch das Aggregat $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots)$ definirt und nicht etwa durch die „Summe“ der unendlichen Menge rationaler Zahlen. Die Bezeichnung „Summe“ ist hier sinnlos, weil bis jetzt nie definirt wurde, was man unter der „Summe“ von unendlich vielen Zahlen zu verstehen hat. Wie 5, -3 , $\frac{2}{3}$ u. s. w. ganz bestimmte Objekte bezeichnen, so ist auch $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots)$ das Zeichen eines zu untersuchenden Objectes, dem wir, seiner Eigenschaften wegen, auch den Namen „Zahl“ geben. Es wäre ein logischer Fehler, wenn man die zu definirende Grösse gleich der Summe setzen wollte, weil eben die Summe einer unendlichen Menge von rationalen

Grössen noch nicht definirt ist. Wir werden zwar den Begriff der Summe auch einführen, aber erst, nachdem wir bereits eine Reihe von Eigenschaften der neuen Grössen kennen; vorher werden wir zeigen, wann α unendlich oder endlich ist, wie man zwei neue Grössen unter sich und mit rationalen Zahlen vergleichen kann, wir werden vor der Einführung des Begriffs der „Summe“ die Addition und Multiplikation und die Gültigkeit der entsprechenden Fundamentalgesetze nachweisen. Weierstrass gebührt das Verdienst, den genannten logischen Fehler zum erstenmal konsequent vermieden zu haben. Cantor ist der Überzeugung, dass alle Schwierigkeiten, die man früher in dem Begriffe des Irrationalen gefunden habe, mit diesem logischen Fehler zusammenhängen; „wird er vermieden,“ sagt Cantor, „so wird sich die irrationale Zahl mit der gleichen Klarheit, Deutlichkeit und Bestimmtheit in unserm Geiste festsetzen, wie die rationale, ja wie die natürliche Zahl“.

12. Ich gebe nun kurz den Gedankengang der Weierstrassschen Theorie.

Definirt ist die neue Grösse durch das Aggregat $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots)$. Weierstrass untersucht zunächst, wann diese Grösse einen endlichen Wert hat und findet: α ist endlich, wenn 1. kein a unendlich ist, 2. kein endliches a unendlich oft vorkommt und 3. jeder Bestandteil endlich ist. Es werden nur endliche Grössen betrachtet. Wir zeigen, wie man zwei Grössen

$$\alpha = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \quad \text{und} \quad \beta = b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

miteinander vergleichen kann. Dass die Begriffe des Gleich-, Grösser- und Kleinerseins neu definirt werden müssen, ist klar. Rationale Zahlen werden verglichen, indem man die sie darstellenden Brüche gleichnamig macht und die Zähler vergleicht. Eine solche Vergleichung ist hier unmöglich, weil eine unendliche Anzahl gemeiner Brüche gleichnamig zu machen wäre. Es ist

$\alpha = \beta$, wenn die Einheit und jeder Stammbruch in α und β gleich oft vorkommen (wenn jeder Bestandteil von α auch Bestandteil von β ist);

$\alpha > \beta$, wenn mindestens ein Stammbruch in α öfters vorkommt als in β ;

$\alpha < \beta$, wenn mindestens ein Stammbruch in β öfters vorkommt als in α .

Jetzt definiren wir die Summe $(\alpha + \beta)$ und das Produkt $\alpha \cdot \beta$ zweier Grössen; man versteht darunter bez. die Grössen, definirt durch die Aggregate

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \dots$$

$$\alpha \cdot \beta = a_1 \cdot b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) + \dots$$

Durch Addition und Multiplikation neuer Grössen erhält man Grössen gleicher Art; die entsprechenden Fundamentalgesetze bleiben erhalten.

Erst jetzt, nachdem wir mehrere Eigenschaften der neuen Grössen kennen, „nachdem sie in unserm Geiste eine bestimmte Realität erlangt haben“ (Cantor), erst jetzt wird die „Summe“ der unendlichen Reihe definirt. Wir gelangen dazu in folgender Weise. Wir bilden die sog. Summenglieder oder Partialsummen

$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots$
und führen einen Fundamentalbegriff der Analysis, den Limes-Begriff ein. Wir sagen:

Die Grössen $s_1, s_2, s_3, \dots, s_n, \dots$ konvergiren gegen die Grösse s , wenn, nach Annahme einer (beliebig kleinen) positiven Grösse ε , der Index n so gewählt werden kann, dass

$$|s - s_n| < \varepsilon, \text{ wenn } n \geq n;$$

oder wenn sich das Summenglied s_n mit wachsendem n von s beliebig wenig unterscheidet. s heisst der Grenzwert der Grössen $s_1, s_2, s_3, \dots$.

Nun werden die Sätze bewiesen:

Ist die durch das Aggregat $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots)$ definirte Grösse a endlich (wofür die Bedingungen angegeben wurden), so konvergiren die Grössen $s_1, s_2, s_3, \dots$, und man nennt den Grenzwert s die Summe der unendlichen Menge rationaler Zahlen.

Umgekehrt: Konvergiren die s , so ist die durch $(a_1 + a_2 + a_3 + \dots)$ eine endliche Grösse definirt.

Unter der Summe der unendlichen Menge rationaler Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots$ verstehen wir somit den Grenzwert s , gegen welchen die Summenglieder

$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, s_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n, \dots$
konvergiren.

Setzt man die Grössen $a_1, a_2, a_3, \dots$ als positiv voraus und nimmt man an, dass die Summenglieder $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots$ endlich bleiben, so ist s_n eine konvergente Funktion von n ; ist $\lim_{n=\infty} s_n$ nicht rational,

so definirt er eine neue Grösse, eine irrationale Zahl. Oder, indem wir die a ganz aus dem Spiele lassen: Ist eine unendliche Menge positiver rationaler Zahlen gegeben, die beständig wachsen, aber nicht ins Unendliche wachsen, so wird durch diese Zahlenfolge eine allgemeine, also eine rationale oder eine irrationale Zahl dargestellt, nämlich die, nach welchen die s_n konvergiren.

Näher können wir hier auf die Weierstrasssche Theorie der Irrationalzahlen, die offenbar mit der Lehre von der unendlichen Reihe aufs engste im Zusammenhange steht, nicht eintreten; wir gehen zur Cantorschen Theorie über.¹⁾

13. Wie bereits bemerkt, legt auch **Cantor** seiner Definition der Irrationalzahl eine bestimmte arithmetische Darstellung derselben zu grunde. Er definirt vor allem die „Fundamentalreihe“.

Eine unendliche Reihe rationaler Zahlen heisst eine Fundamentalreihe, wenn, nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse ε , ein Index n so gewählt werden kann, dass die Differenz zweier beliebiger Glieder, deren Index höher ist als n , dem absoluten Betrage nach kleiner ist als ε .

Bilden die Zahlen

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_n, \dots$$

eine Fundamentalreihe und ist ε eine beliebig kleine positive Grösse, so lässt sich ein n so angeben, dass

$$|a_k - a_h| < \varepsilon, \text{ wenn } h \text{ und } k \geq n.$$

Durch Unterdrückung der n ersten Glieder kann die Schwankung der noch übrig bleibenden Glieder beliebig klein gemacht werden.

$$3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \dots$$

ist eine Fundamentalreihe. Setzt man $\varepsilon = \frac{1}{100}$, so hat man $n=3$ zu nehmen.

Eine besondere Fundamentalreihe ist die Elementarreihe. Nach E. Heine versteht man darunter eine Fundamentalreihe, deren Glieder sich von 0 mit wachsendem Index n immer weniger unterscheiden; oder genauer: Eine Fundamentalreihe ist eine Elementarreihe, wenn nach Annahme einer positiven Grösse ε ein Index n so gewählt werden kann, dass der absolute Betrag jedes Gliedes, dessen Index höher ist als n , kleiner ist als ε , wenn also

$$|a_k| < \varepsilon, \text{ wenn } k \geq n.$$

Ein Beispiel:

$$1; 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001; 0,00001; \dots$$

14. Wir definiren die Grundoperationen mit Fundamentalreihen. Gegeben sind die beiden Fundamentalreihen

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots a_n \dots) \text{ und}$$

$$\beta = (b_1, b_2, b_3, b_4, \dots b_n \dots).$$

¹⁾ Nach Vorlesungen von Hrn. Prof. Hurwitz.

Die Summe, die Differenz, das Produkt und der Quotient sind definiert durch:

$$\alpha + \beta = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_n + b_n, \dots),$$

$$\alpha - \beta = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \dots, a_n - b_n, \dots),$$

$$\alpha \cdot \beta = (a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2, a_3 \cdot b_3, \dots, a_n \cdot b_n, \dots),$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \frac{a_3}{b_3}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \dots \right).$$

Nun lässt sich der Satz beweisen: Die Grundoperationen mit Fundamentalreihen sind unter allen Umständen ausführbare Operationen, ausgenommen die Division durch eine Elementarreihe; das Resultat ist wieder eine Fundamentalreihe. Die Grundgesetze bleiben erhalten.

Lassen Sie mich z. B. zeigen, dass die Summe zweier Fundamentalreihen wieder eine solche ist. Es ist zu zeigen, dass

$$|(a_n + b_n) - (a_k + b_k)| < \varepsilon.$$

$$\alpha \text{ ist eine Fundamentalreihe, somit } |a_n - a_k| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\beta \text{ ist eine Fundamentalreihe, somit } |b_n - b_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Weil der absolute Betrag der Summe kleiner oder höchstens gleich ist der Summe der absoluten Beträge der einzelnen Summanden, folgt:

$$|(a_n - a_k) + (b_n - b_k)| < \varepsilon$$

oder

$$|(a_n + b_n) - (a_k + b_k)| < \varepsilon, \text{ w. z. b.}$$

Die Summe der beiden Fundamentalreihen

$$\alpha = (1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots) \text{ und}$$

$$\beta = (3; 3,1; 3,14; 3,141; \dots)$$

ist

$$\alpha + \beta = (4; 4,5; 4,55; 4,555; \dots),$$

offenbar wieder eine Fundamentalreihe.

15. Nun teilen wir die Fundamentalreihen in Gruppen ein nach folgender Festsetzung: Zwei Fundamentalreihen sollen dann und nur dann der gleichen Gruppe angehören, wenn ihre Differenz eine Elementarreihe ist. Ich schreibe einige Fundamentalreihen auf, die wir sodann nach dieser Festsetzung einteilen wollen.

$$\overline{\alpha} = (1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots)$$

$$\beta = (3; 3,1; 3,14; 3,141; \dots)$$

$$\gamma = (4; 3,2; 3,15; 3,142; \dots).$$

Nur β und γ gehören in die gleiche Gruppe, denn ihre Differenz

$$\gamma - \beta = (1; 0,1; 0,01; 0,001; \dots)$$

ist eine Elementarreihe.

Die Gesamtheit der Fundamentalreihen, die einer Gruppe angehören, betrachten wir als neues Objekt und bezeichnen es als allgemeine Zahl.

Wie definiert also Georg Cantor die allgemeine Zahl? Er versteht darunter den Inbegriff der Fundamentalreihen einer Gruppe, den Inbegriff der Fundamentalreihen, deren Differenzen Elementarreihen sind. „Jedes Individuum der Gruppe „stellt die allgemeine Zahl dar“. Eine allgemeine Zahl besitzt unendlich viele Darstellungen. Die rationale Zahl r wird dargestellt durch die Reihe $(r, r, r, \dots)$. Ist die allgemeine Zahl nicht rational, so heisst sie irrational. Alle Elementarreihen gehören derselben Gruppe an; sie stellen alle die Zahl 0 dar.

16. Wie können wir mit allgemeinen Zahlen rechnen? Wir stellen jede allgemeine Zahl durch eine Fundamentalreihe dar, führen mit diesen die Operationen aus und erhalten als Resultat eine Fundamentalreihe, die eine allgemeine Zahl, das Resultat, darstellt. Soll z. B. berechnet werden $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$, so stellt man dar:

$$\sqrt{2} \text{ durch } (1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots),$$

$$\sqrt{3} \quad „ \quad (1; 1,7; 1,73; 1,732; \dots);$$

multipliziert man die Fundamentalreihen, so kommt

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = (1 \cdot 1; 1,4 \cdot 1,7; 1,41 \cdot 1,73; 1,414 \cdot 1,732; \dots)$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = (1; 2,4; 2,45; 2,449; \dots).$$

Dem vorhin ausgesprochenen Satze über Fundamentalreihen entspricht der folgende Satz über allgemeine Zahlen: Im Reiche der allgemeinen Zahlen sind die Grundoperationen unter allen Umständen ausführbare Operationen, ausgenommen die Division durch 0 ; das Resultat der Rechnung ist wieder eine allgemeine Zahl. Die Grundgesetze bleiben erhalten¹⁾.

17. Wie werden zwei allgemeine Zahlen miteinander verglichen? Wir beweisen den Satz: Die Glieder einer Fundamentalreihe, die keine Elementarreihe ist, sind von einem bestimmten Index an entweder alle positiv oder alle negativ; man sagt, die Fundamentalreihe habe im ersten Falle positiven, im zweiten Falle negativen Charakter. Denn wären die Glieder einer Zahlenreihe, wie weit nach rechts man auch gehen mag, bald positiv, bald negativ, so wären entweder die Schwankungen nicht beliebig klein, oder die Glieder würden sich beliebig wenig von der 0 unterscheiden. Im ersten Falle ist die Reihe keine Fundamentalreihe, im zweiten Falle ist sie eine Elementarreihe. Alle Fundamentalreihen der gleichen Gruppe haben den gleichen Charakter. Eine allgemeine

¹⁾ Vergl. Cahen, a. a. O., p. 155.

Zahl heisst positiv oder negativ, je nachdem die Fundamentalreihen der sie definirenden Gruppe positiven oder negativen Charakter haben.

Sollen die beiden allgemeinen Zahlen

$$\alpha = (a_1, a_2, a_3, \dots) \text{ und}$$

$$\beta = (b_1, b_2, b_3, \dots)$$

miteinander verglichen werden, so bilden wir die Differenz $\alpha - \beta$.

Nun heisst

$\alpha = \beta$, wenn $\alpha - \beta$ eine Elementarreihe ist;

$\alpha > \beta$, „ $\alpha - \beta$ „ Fundamentalreihe pos. Charakters ist;

$\alpha < \beta$, „ $\alpha - \beta$ „ „ „ neg. „ „ .

Beispiel:

$$\alpha = (1; 1,4; 1,41; 1,414; \dots),$$

$$\beta = (1; 1,7; 1,73; 1,732; \dots),$$

$$\gamma = (2; 1,5; 1,42; 1,415; \dots).$$

Es ist:

$\alpha < \beta$; denn $\alpha - \beta = (0; -0,3; -0,32; -0,318; \dots)$ ist eine Fundamentalreihe negativen Charakters.

$\alpha = \gamma$, denn $\alpha - \gamma = (-1; -0,1; -0,01; -0,001; \dots)$ ist eine Elementarreihe.

18. Endlich führen wir den Limes-Begriff ein. Die Grössen $a_1, a_2, a_3, \dots$ jeder Fundamentalreihe bilden eine konvergente Reihe, und der Limes ist gleich der allgemeinen Zahl, welche durch die Fundamentalreihe dargestellt wird. Umgekehrt: Eine unendliche Reihe von Zahlen ist dann und nur dann konvergent, wenn sie die charakteristische Eigenschaft der Fundamentalreihe besitzt. Auch hier sei noch hervorgehoben, dass Cantor die Irrationalzahl nicht definirt als Grenzwert der unendlichen Menge rationaler Zahlen. Es wäre dies der gleiche logische Fehler, auf den wir bei der Weierstrassschen Theorie schon aufmerksam machten. Die Existenz dieses Grenzwertes muss abgeleitet werden aus den Eigenschaften der die allgemeine Zahl definirenden unendlichen Menge rationaler Zahlen. In der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften sagt Pringsheim darüber: „Wesentlich ist, dass die zu definierende allgemeine reelle Zahl (welche je nach Umständen eine rationale oder irrationale sein kann) nicht etwa als „Summe“ einer unendlichen Anzahl von Elementen oder als „unendlich entferntes Glied“ einer Reihe durch irgend welchen nebelhaften Grenzprozess gewonnen wird“.

19. Zum Schlusse will ich die drei Theorien noch kurz miteinander vergleichen.

Dedekind definirt die allgemeine Zahl durch einen Schnitt in die Menge der rationalen Zahlen, Weierstrass durch das Prinzip der Summenbildung, Cantor durch Fundamentalreihen, also

Dedekind Schnitt,

Weierstrass Summenbildung,

G. Cantor Fundamentalreihe.

Das Gemeinsame aller drei Definitionsformen besteht einmal darin, dass jede eine unendliche Menge rationaler Zahlen zu grunde legt und Bedingungen stellt, die die rationalen Zahlen erfüllen müssen, damit sie als Grundlage der Definition einer allgemeinen Zahl dienen können.

Ferner treten in allen Theorien Fundamentalreihen auf. Cantor definiert die allgemeine Zahl durch eine Gruppe von Fundamentalreihen, jede allgemeine Zahl wird durch unendlich viele Fundamentalreihen dargestellt. Weierstrass leitet den Satz ab, dass die Summenglieder $s_1, s_2, s_3, \dots$ beständig wachsen, aber nicht ins Unendliche wachsen; sie bilden eine sog. monotone Fundamentalreihe. Und wenn Sie sich an die Berechnung von $\sqrt{2}$ auf Grund der Dedekindschen Definition der Irrationalzahl erinnern, so entdecken Sie dort zwei Fundamentalreihen: Die Näherungswerte $< \sqrt{2}$ bilden eine ansteigende, die Näherungswerte $> \sqrt{2}$ eine absteigende Fundamentalreihe, oder, wie Paul Bachmann sagt, „zwei gegeneinander konvergierende Zahlenreihen“. ¹⁾

Bei der Berechnung der Irrationalzahlen durch Entwicklung in Dezimalbrüche oder Kettenbrüche treten immer Fundamentalreihen auf. Bei Kettenbruchentwicklungen bilden die Näherungswerte geraden Ranges eine absteigende, die Näherungswerte ungeraden Ranges eine ansteigende Fundamentalreihe.

Einen Unterschied der drei Theorien haben wir bereits genannt. Während Dedekind die Irrationalzahl ohne einen arithmetischen Ausdruck definiert, knüpfen Weierstrass und Cantor ihre Definitionen an eine formale Darstellung der Irrationalzahl an.

Der Hauptunterschied der drei Definitionen liegt in den Bedingungen, welche die Menge der rationalen Zahlen erfüllen muss, damit sie der Definition der allgemeinen Zahl zu grunde gelegt werden kann. Dedekind braucht zur Definition einer Irrationalzahl stets alle rationalen Zahlen, Weierstrass und Cantor nur einen Teil (aber doch unendlich viele) derselben. Dagegen sind die Bedingungen, die Weierstrass und Cantor stellen, viel engere als die, welche Dedekind voraussetzt. Eine und dieselbe allgemeine Zahl wird durch einen und nur einen Dedekindschen Schnitt, dagegen durch unendlich viele Weierstrasssche Summen und unendlich viele Cantorsche Fundamentalreihen dargestellt. Die Übersicht über die Menge der reellen Zahlen lässt, sofern diese durch Schnitte definiert werden, nichts zu wünschen übrig.

20. In der mir zur Verfügung stehenden Zeit war es mir unmöglich, die drei Theorien der Irrationalzahlen nur einigermaßen erschöpfend zu behandeln. Vieles konnte ich nur andeuten, anderes nur durch Beispiele zum Ausdruck bringen. Wer sich mit dem einen oder andern Punkt genauer befassen will, findet die nötigen Literaturangaben in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften (I A 1). Für die Behandlung der Irrationalzahlen auf der Mittelschule seien zum Studium empfohlen: Hočever, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra (Wien und Prag, Tempsky, 1902) und — besonders in geometrischer Hinsicht — Thieme, Leitfaden der Mathematik, II. Teil (Leipzig, Freytag, 1902).

¹⁾ P. Bachmann, Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen. Leipzig, Teubner 1892.