

Zeitschrift: Schweizerische pädagogische Zeitschrift
Band: 10 (1900)
Heft: 3

Artikel: Zum Rechnen mit Zahlenbildern
Autor: Rüefli, J.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-789004>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 08.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zum Rechnen mit Zahlenbildern.

Von J. Rüefli, Seminarlehrer in Bern.

Seminarlehrer Lay in Karlsruhe empfiehlt in seinem „Führer durch den ersten Rechenunterricht“ eine neue Art von Zahlenbildern. An einem für den Klassenunterricht bestimmten Apparat stellt er diese Typen durch weisse Kugeln von 5 cm Durchmesser dar, die an zwei an einem schwarzen Brett befestigte Stangen geschoben werden. Nachdem an der oberen Stange die erste Kugel als Einheit vorgeschoben ist, kommt die zweite senkrecht unter die erste, die dritte rechts neben die erste und die vierte senkrecht unter die dritte zu stehen. So erhält man als Bild der Zahl 4 eine quadratische Gruppe, deren Kugeln $7\frac{1}{2}$ cm, also $1\frac{1}{2}$ Kugeldurchmesser von einander entfernt sind. Mit der fünften Kugel beginnt eine zweite Gruppe, mit der achten schliesst sie ab. Diese Gruppe wird in einem Abstand von 10 cm, also von zwei Kugeldurchmessern, rechts neben die erste gesetzt. In gleicher Weise wird eine dritte, eine vierte und eine fünfte Gruppe gebildet und in die Anordnung der vorhergehenden eingefügt. Zur Veranschaulichung mögen die Bilder für die Zahlen 6 und 9 dienen:



Lay hat diese Zahlenbilder aus den Bornschen Typen dadurch abgeleitet, dass er die Teilgruppen etwas weiter voneinander entfernte als die Kugeln einer Gruppe. Der Unterschied ergibt sich aus den Bornschen Bildern für 6 und 9:



Mit den von Lay vorgeschlagenen Zahlenbildern, die er quadratische nennt, stimmen in der Hauptsache die Zahltypen überein, die

Grass in seiner Schrift „Die Veranschaulichung beim grundlegenden Rechnen“ empfohlen hat. In ihrer Auffassung über die Aufgabe, welche die Zahlenbilder im ersten Rechenunterricht zu erfüllen haben, gehen aber diese beiden Schulmänner weit auseinander. Grass erklärt sehr entschieden das Zählen als die Grundlage alles Rechnens. Das erstmalige und sichere Auffassen einer Menge könne nur durch das Nacheinanderwahrnehmen der Einheiten, durch Zählen erfolgen. Lay aber behauptet, durch sukzessives Auffassen der Dinge entstehe keine klare Vorstellung; deshalb müsse der erste Rechenunterricht Zahlvorstellungen erstreben, welche durch Anschauen, durch simultane Auffassung gewonnen werden.

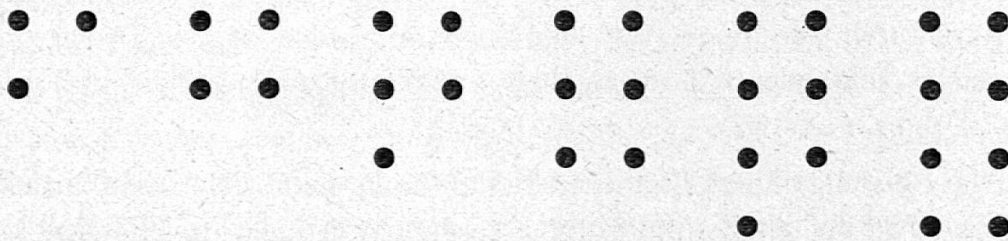
Dass die Zahlenbilder im ersten Rechenunterricht eine wichtige Aufgabe zu erfüllen haben, ist auch meine Überzeugung. Hier finde ich mich mit Beetz, Grass und Lay in vollem Einklang. Ich weiss auch zu würdigen, was Lay durch seine interessante, eine reiche Fülle von Anregungen bietende Schrift für die Lösung einer immer noch mit wenig Verständnis umstrittenen methodischen Frage geleistet hat. Wie Beetz und Grass es schon vor ihm gethan haben, so hat er die Unzulänglichkeit des hergebrachten Zählverfahrens, sowie die Notwendigkeit nachgewiesen, anschaulich geordnete Gruppen von Raumgegenständen als Zahlenbilder in den Dienst der Zahlauffassung zu ziehen. Die Art des Typenrechnens aber, welche Lay auf dieser Grundlage aufbaut, weicht von den Resultaten meiner Studien und Erfahrungen wesentlich ab. Ich glaube daher im Interesse des grundlegenden Rechenunterrichtes zu handeln, wenn ich im Anschluss an meine in Heft IV dieser Zeitschrift 1899 veröffentlichte Abhandlung über das Typenrechnen auch die von Lay vorgeschlagenen Zahlenbilder ins Licht der Kritik stelle.

In der erwähnten Abhandlung habe ich Zahlenbilder empfohlen, die Ähnlichkeit mit den von Busse schon vor 100 Jahren zur Veranschaulichung der Zahlen eingeführten Punkttypen haben, ohne mit ihnen identisch zu sein. Ich habe auch die von mir vorgeschlagenen Zahlenbilder nicht aus den Busseschen abgeleitet; diese wurden mir aus Lays „Führer“ erst bekannt, als meine Abhandlung schon im Druck war. Beim Aufbau meiner Typen setze ich voraus, dass der Schüler nicht nur zwei, sondern auch drei und höchstens vier in eine ungegliederte Reihe geordnete Dinge in einem klaren Bilde aufzufassen vermag. Ich verwende also die Grundtypen:

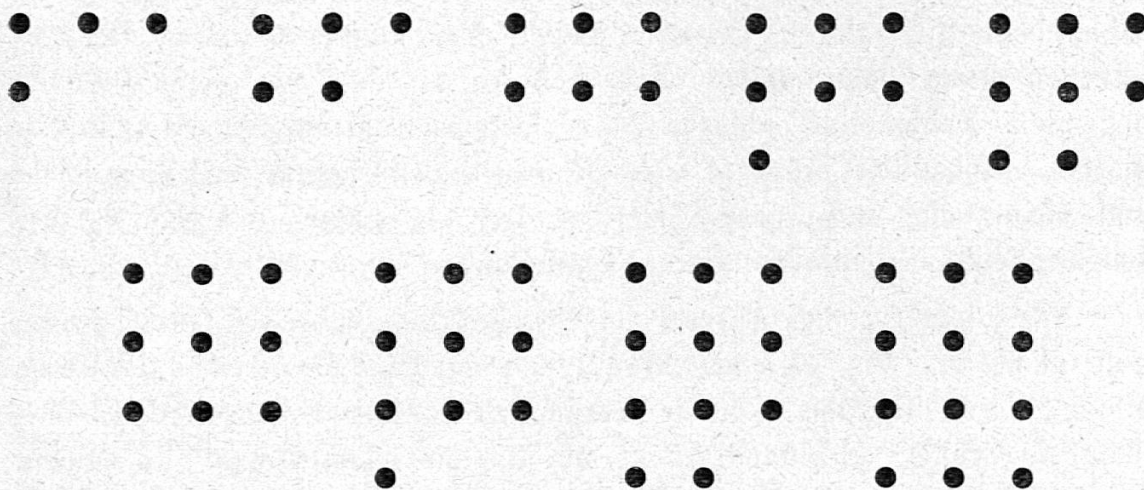


Eine über 4 hinausgehende Menge von Dingen vermag sich das Kind nicht als ungegliederte Vielheit von Einheiten, wohl aber bis zu einer

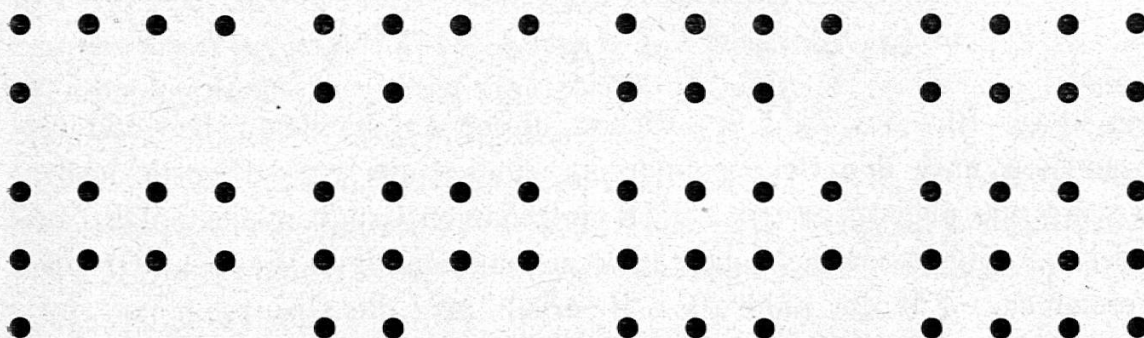
gewissen Grenze als Vielheit kleinerer Vielheiten klar und deutlich vorzustellen. Damit dies möglich sei, darf aber die Zahl der als Kollektiveinheiten in einem Bilde aufzufassenden Vielheiten zunächst nicht über 4 hinausgehen und keine darf mehr als 4 Einheiten enthalten. Sowohl die Einheiten als die Grundtypen müssen nach einem einfachen, leicht erkennbaren Gesetz geordnet sein. Man erhält auf diese Weise zwei Arten von Zahlenbildern, nämlich Gruppen und gegliederte Reihen. Wendet man Zweierreihen an, so lassen sich folgende Typen für die Zahlen von 3 bis 8 bilden:

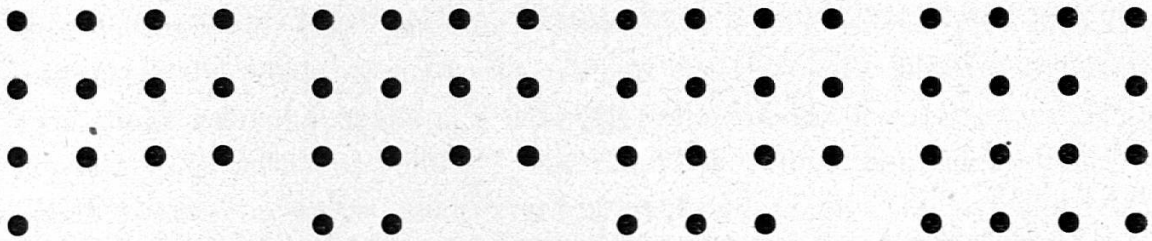


Nach dem Gesetz der Dreierreihe ergeben sich für die Zahlen von 4 bis 12 die Gruppen:



Vereinigt man endlich ungegliederte Reihen von je 4 Einheiten zu Gruppen, so lassen sich die Zahlen von 5 bis 16 in anschaulichen Bildern darstellen:





Diese Gruppen sind aus wagrechten und senkrechten Reihen in der Weise aufgebaut, dass eine Reihe höchstens 4 Einheiten enthält und auch die Zahl der Reihen nicht über 4 hinausgeht. Es ist auch leicht ersichtlich, dass einzelne Typen als solche mit andern identisch sind und sich nur durch die Lage von denselben unterscheiden; 2 Dreier geben das gleiche Bild wie 3 Zweier, ebenso 2 Vierer und 4 Zweier, 3 Vierer und 4 Dreier n. s. w.

Die Leistungsfähigkeit dieser Bilder kann man sich leicht an einem Beispiel, etwa an der Zwölfergruppe vergegenwärtigen, welche eine klare, anschauliche Grundlage für folgende Aufgaben bietet: $11 + 1$, $1 + 11$, $10 + 2$, $2 + 10$, $9 + 3$, $3 + 9$, $8 + 4$, $4 + 8$, $7 + 5$, $5 + 7$, $6 + 6$, $3 \cdot 4$, $4 \cdot 3$, $2 \cdot 6$, $6 \cdot 2$, wozu aber noch die Umkehrungen dieser Aufgaben beim Subtrahieren, Messen und Teilen kommen. Diese Rechen-sätzchen kann der Schüler ohne weiteres an dem vor seinen Augen liegenden Zahlenbilde ablesen. In festem Zusammenhange mit der klaren Anschauung prägt er sich diese arithmetischen Wahrheiten leicht und sicher ein und vermag sie bei der Anwendung mit eben solcher Leichtigkeit am Leitfaden klarer Vorstellungen zu reproduzieren.

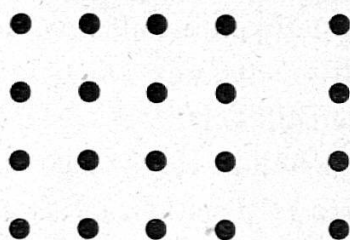
Nach dem für den Aufbau der Gruppen massgebenden Gesetz lassen sich aber aus den gleichen Grundtypen auch gegliederte Reihen bilden, deren Glieder dadurch anschaulich herausgehoben werden, dass man sie weiter auseinanderückt als die einzelnen Dinge. In solcher Weise erhält man für die Zahl 5 die Darstellungen:



Ebenso bietet die gegliederte Reihe



ein klares Bild der Zahl 9. Reihen dieser Art können neben und insbesondere nach den Gruppenbildern, nämlich da gute Dienste leisten, wo die aus ungegliederten Reihen aufgebauten Gruppen nicht mehr ausreichen. Sie lassen sich aber auch in mannigfaltiger Weise zu Gruppen vereinigen. Für die Zahl 20 z. B. erhält man die Gruppe:



welche, aus der Anschauung leicht erkennbar, 4 Fünfer, 5 Vierer, 2 Zehner, 10 Zweier u. s. w. bietet.

Nun ist die Grundlage für die kritische Beleuchtung der von Lay empfohlenen Zahltypen gewonnen. In seinem „Führer“ teilt er die Resultate zahlreicher, von ihm mit ganzen Klassen durchgeführter, „didaktisch-psychologischer“ Experimente mit, aus welchen er den Schluss zieht, dass seine quadratischen Zahlenbilder andern Veranschaulichungsmitteln dieser Art, so insbesondere den Typen von Born und Beetz, und noch viel entschiedener den ungegliederten Reihenbildern bedeutend überlegen seien. Es fällt mir nicht ein, die Richtigkeit dieses Schlusses in Frage zu stellen. Man braucht nur die betreffenden Zahlenbilder anzuschauen, und man wird ohne Experimente zu diesem Resultate gelangen. Trotzdem sind auch die Layschen Typen nicht geeignet, den Forderungen, die an derartige Veranschaulichungsmittel gestellt werden müssen, Genüge zu leisten.

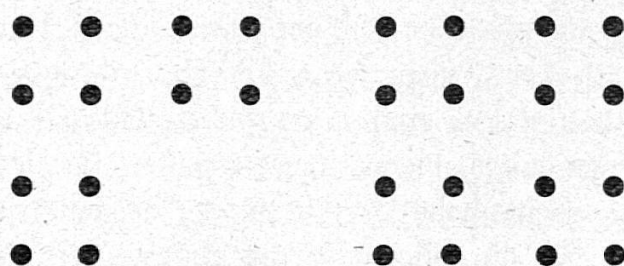
In den erwähnten Experimenten finde ich zunächst eine wesentliche Lücke. Lay hat über die auch von ihm angeführten Zahlenbilder von Busse keine Versuche vorgenommen, weil er sie in den Bornschen Typen in prinzipiell einheitlicher Durchführung wieder zu finden glaubt. Dies ist aber ein Irrtum. Busse stellt die Zahl 3 als Reihe, Born aber als Gruppe dar. Für die Zahl 9 verwendet Busse eine Gruppe, die aus 3 Reihen von je 3 Einheiten besteht; das Bornsche Neunerbild aber enthält zwei quadratische Gruppen und noch eine Einheit, oder zwei wagrechte Reihen, von welchen die eine aus 4, die andere aus 5 Einheiten besteht. Das Bussesche Zehnerbild enthält 3 senkrechte Reihen, nämlich je eine Dreierreihe links und rechts und eine Viererreihe in der Mitte, während Born die Zahl 10 durch zwei wagrechte Reihen von je 5 Einheiten darstellt. Dies sind so durchgreifende Unterschiede, dass von einer wesentlichen Übereinstimmung dieser beiden Arten von Zahlenbildern keine Rede sein kann. Das Urteil über die Bornschen Typen darf also nicht ohne weiteres auf die grundsätzlich von ihnen verschiedenen und gerade in ihren Abweichungen entschieden zweckmässigeren Zahlenbilder von Busse ausgedehnt werden.

Einen Teil seiner Experimente hat Lay der Aufgabe gewidmet, die Grenze für die Reihenauffassung der Dinge zu ermitteln. Dabei ergab sich das Resultat, dass von 46 Schülern einer Klasse 3 nicht mehr eine Reihe von 3 Kugeln, 6 Schüler aber nicht mehr 4 in eine Reihe geordnete Kugeln aufzufassen vermochten. Lay zieht aus diesen Resultaten den Schluss, dass die Grenze für die Reihenauffassung die Zahl 3 noch einschliesse, während die Zahl 4 schon ausserhalb derselben liege. Bei diesen Versuchen waren aber die Bedingungen für die Reihenauffassung sehr ungünstig gestellt. Es wurde ein Zählrahmen verwendet; die Kugeln waren aneinander geschoben, also ohne Abstand. Dadurch wird aber die Auffassung erschwert, da Reihen solcher Art sehr bald zu undeutlichen Bildern verschwimmen. In einer zweiten Versuchsreihe, bei welcher es sich um den Einfluss des grösseren oder geringeren Abstandes der Einheiten handelte, wurden dann Kugeln von $4\frac{1}{2}$ cm Durchmesser in einem Abstände von $1\frac{1}{2}$ cm, also von $\frac{1}{3}$ des Kugeldurchmessers, neben einander gereiht. Dabei ergab sich das Resultat, dass sich die Zahl der Fehler gegenüber den Versuchen mit Kugeln ohne Abstand um den 8. Teil verminderte. Für den Aufbau seiner quadratischen Typen aber verwendet Lay Kugeln von 5 cm Durchmesser mit einem Abstand von $7\frac{1}{2}$ cm, also von $1\frac{1}{2}$ Kugeldurchmesser. Warum hat er nicht auch bei den Versuchen mit Reihen einen grösseren Abstand der Kugeln zur Vergleichung beigezogen? Hätte er dies getan, so würde sich voraussichtlich die Zahl der Fehler gegenüber den Versuchen mit Kugeln ohne Abstand auf die Hälfte reduziert haben. Dann hätte sich herausstellen müssen, dass die Grenze der Reihenauffassung auch die Zahl 4 noch einschliesst.

Bei seinen Versuchen hat Lay die Reihen auch noch in einer anderen Beziehung ungünstig gestellt. Diese Versuche blieben im wesentlichen auf ungegliederte Reihen beschränkt. Nach je 5 Kugeln wurde zwar eine Lücke gelassen; aber dies ist gerade die denkbar unzweckmässigste Reihengliederung. Es ist dem Schüler leicht, 3 oder 4 Dinge in einer ungegliederten Reihe aufzufassen, während 5 in dieser Weise geordnete Dinge ihm kein klares und deutliches Bild zu bieten vermögen. Warum hat also Lay nicht auch mit Reihen operiert, die nach dem Gesetz der Zweier, Dreier und Vierer in Teilreihen gegliedert sind? Wenn wir mehr als 4 in eine ungegliederte Reihe geordnete Dinge auffassen sollen, so zerlegen wir die Reihe unwillkürlich in Abteilungen von 2, 3 oder 4 Einheiten. Wird also diese Gliederung durch den Abstand der Teilreihen anschaulich ausgeprägt, so gelingt dem Schüler auch über 4 hinaus im Zahlumfang des ersten Zehners die

Reihenauffassung ohne Schwierigkeit. Wenn die Gliederung bei den Gruppen treffliche Dienste leistet, warum sollte dies nicht auch für die Reihen gelten? Sollen Versuche mit Reihen und Gruppen in der Vergleichung ihrer Resultate entscheidenden Wert haben, so müssen sie unter möglichst gleichen Bedingungen durchgeführt werden. Wenn also Lay es für ratsam hält, beim Aufbau seiner Typen die Reihenanzordnung zu vermeiden, so findet diese Regel in den Resultaten seiner Versuche keine zureichende Begründung.

Dazu kommt aber noch, dass er seine Zahlenbilder gar nicht konsequent nach diesem Gesetz, sondern zum Teil in auffallendem Widerspruch mit demselben aufgebaut hat; sie sind nämlich Reihen von Gruppen. Als Bild der Zahl 12 verwendet er eine Reihe von 3 Vierergruppen; sein Typus der Zahl 18 enthält unter anderem eine Reihe von 6 Dreiern, derjenige der Zahl 20 aber ist ein Reihenbild von 5 quadratischen Gruppen. Nun vermag der Schüler ganz ohne Zweifel einzelne in eine Reihe geordnete Dinge leichter aufzufassen als eine Reihe von Gruppen. Das Leichtere also erklärt Lay als methodisch verfehlt, während er vom Schwierigern auch da noch Gebrauch macht, wo eine unmittelbare, klare Anschauung gar nicht mehr möglich ist. Man bedenke, dass er als einziges Bild für die Zahl 4 die quadratische Gruppe festsetzt. Wie kommt er also dazu, vier Teilgruppen in eine Reihe zu ordnen? Um konsequent zu sein, müsste er doch gewiss die von ihm für die Zahlen 1, 2, 3, 4 festgesetzten Grundtypen nicht nur für die Zahl der einzelnen Dinge, sondern auch für die Anzahl der als Kollektiveinheiten aufgefassten Teilgruppen anwenden. Dann aber müssten z. B. die Zahlen 12 und 16 so dargestellt werden:



Denn nur in dieser Form würde nach Massgabe der Layschen Grundtypen die eine ein Dreierbild von Vierern, die andere aber ein Viererbild quadratischer Gruppen sein. Um ferner die Zahlen 9 und 12 als Vielfache von 3 darzustellen, müsste Lay die Dreiergruppen das eine Mal auf die Ecken eines rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecks, das andere Mal aber auf die Ecken eines Quadrates ordnen.

Woher kommt es ferner, dass die quadratische Gruppe eine so anschauliche Darstellung der Zahl 4 ist? Es wird geltend gemacht, beim Anblick dieses Bildes richte sich die Augenachse unwillkürlich auf den Mittelpunkt der Gruppe, so dass die Einheiten des Netzhautbildes alle gleich weit vom gelben Fleck entfernt seien und deshalb mit gleicher Deutlichkeit wahrgenommen werden müssten. Wenn aber dieser Grund hier ausschlaggebend wäre, so müsste ers auch dann sein, wenn man 5, 6, 7, 8 . . . Dinge auf die Ecken der entsprechenden regelmässigen Vielecke ordnet. Trotz ihrer vollendeten Regelmässigkeit sind aber diese Anordnungen als Zahlenbilder weniger anschaulich als die Gruppen, welche nach dem von mir vorgeschlagenen Gesetz aus wagrechten und senkrechten Reihen aufgebaut sind. Dies kommt offenbar daher, weil bei jenen Anordnungen nach dem Raumschema regelmässiger Vielecke jedesmal mehr als 4 Dinge in einer ungegliederten zyklischen Reihe liegen. Auch in Reihen solcher Art schliesst also die Grenze unmittelbarer Auffassung nicht mehr als 4 Dinge ein. Durch Gliederung nach dem Gesetz der Zweier, Dreier, und Vierer können aber auch zyklische Reihen als Zahlenbilder anschaulicher gemacht werden. Bei der quadratischen Gruppe ist die Sachlage eine wesentlich andere, da hier die Zahl der Dinge im Rahmen unmittelbarer Auffassung liegt. Wenn aber dieses Bild der Zahl 4 anschaulicher ist als andere Vierergruppen, so kommt dies daher, dass seinem Aufbau die einfachste und anschaulichste Form der Bildung und Anordnung von Reihen zu Grunde liegt; es besteht aus zwei senkrechten und ebenso aus zwei wagrechten Reihen von je zwei Einheiten. Wenn also Lay die Reihenordnung so entschieden verwirft, so mache ich dagegen geltend, dass seine Gruppen gerade ihr Bestes den Reihen zu verdanken haben.

Die von Lay angeführten Zahlenbilder anderer Methodiker stimmen mit seinen quadratischen Typen darin überein, dass sie für jede Zahl nur ein Bild enthalten; es sind fixe Zahlenbilder. Die von mir vorgeschlagenen Typen aber bieten dem Schüler für jede Zahl einige leicht erkennbare, anschauliche Darstellungen; es sind freie Zahlenbilder. Die Entscheidung für die eine oder die andere Art muss sich aus den Aufgaben ergeben, welche die Zahlenbilder im ersten Rechenunterricht zu erfüllen haben. Über diese aber können die Ansichten unmöglich weit auseinander gehen. Die Zahlenbilder dienen zunächst als zweckmässige Mittel zur Veranschaulichung der Zahlen und bieten dem Denken des Schülers klare und deutliche, stellvertretende Vorstellungen für die Zahlbegriffe. Sind diese Raumbilder klar und sicher eingeprägt, so können sie auch als anschauliche Masse zum möglichst raschen Erkennen

der Zahlen gute Dienste leisten und als Ersatzmittel für das umständlichere Zählen in Worten dienen. Sie sind aber auch ein treffliches Mittel zur Veranschaulichung der Operationen. Der ersten und dritten dieser Aufgaben sind nun aber die fixen Zahlenbilder gar nicht gewachsen. Wie sollen sich im Geiste des Kindes klare Zahlbegriffe herausarbeiten, wenn jede Zahl nur durch ein Bild dargestellt wird? Zu der Einsicht, dass verschieden geordnete Mengen gleich viele Dinge enthalten können, dass also die Anordnung der Dinge kein wesentliches Merkmal der Zahl ist, kann das Kind doch nur dadurch gelangen, dass ihm gleichzählige Mengen in verschiedener Anordnung zur Anschauung und Vergleichung vorgelegt werden. Von den für den gesamten Rechenunterricht so wichtigen Zahlen von 1 bis 10 kann das Kind nur dann ausreichend vollständige, klare und deutliche Begriffe gewinnen, wenn ihm alle auf dieser Stufe in Betracht kommenden Verhältnisse, in welchen jede dieser Zahlen zu den anderen steht, in anschaulichen Bildern vor Augen gelegt werden. Es muss z. B. die Zahl 6 als $5 + 1$, $4 + 2$, $3 + 3$, $2 + 4$, $1 + 5$, $2 \cdot 3$, $3 \cdot 2$, $6 \cdot 1$, $1 \cdot 6$ erkennen. Um einen deutlichen Begriff der Zahl 6 zu haben, muss es aber auch wissen, dass $6 - 1 = 5$, $6 - 2 = 4$, $6 - 3 = 3$, $6 - 4 = 2$, $6 - 5 = 1$, $6 - 6 = 0$, $6 : 2 = 3$, $6 : 3 = 2$, $6 : 6 = 1$, $6 : 1 = 6$ ist. Nun gibt es aber, insbesondere für die über die Grenze unmittelbarer Auffassung hinausliegenden Zahlen, kein Zahlenbild, durch welches alle diese Verhältnisse anschaulich dargestellt werden könnten. Will man gleichwohl mit einem Typus alles machen, so wird gerade die Hauptsache, nämlich die Anschaulichkeit, einem haltlosen rechenmethodischen Dogma zum Opfer gebracht.

Damit Zahlenbilder für den Rechenunterricht geeignet seien, müssen sie freilich in erster Linie ein rasches Erkennen der Zahlen aus der Anschauung ermöglichen. Dies genügt aber noch gar nicht. Sie müssen zugleich auch so beschaffen sein, dass man mit ihnen anschaulich rechnen kann, dass sie sich also zu neuen anschaulichen Bildern vereinigen oder in solche zerlegen lassen. Vergleicht man die nachstehenden Darstellungen der Zahl 5



so wird man wohl der ersten den Preis der Anschaulichkeit zuerkennen. Erprobt man sie aber in der Unterrichtspraxis, so wird man finden, dass die beiden anderen für anschauliches Rechnen viel besser geeignet sind.

Um auf Grund dieser drei Bilder die Addition $5 + 3$ auszuführen, hat man den beiden ersten je eine Dreiergruppe, dem dritten aber eine Dreierreihe anzufügen, so dass man für das Resultat die zwei Gruppen erhält:



von welchen offenbar die zweite die Zahl 8 einheitlicher ausgeprägt und ausserdem nicht nur als Summe von 5 und 3, sondern auch als $2 \cdot 4$, $4 \cdot 2$, $6 + 2$, $2 + 6$, also in Verhältnissen anschaulich darstellt, für welche das erste Bild unbrauchbar ist. Gerade so, wie Lay dem Aufbau seiner Zahlenbilder die quadratische Gruppe zu Grunde legt, könnte man das Gesetz der Dominofünf zur Bildung sehr anschaulicher Typen verwenden. Für die Zahl 20 bekäme man die Gruppenreihe:



Zahlenbilder dieser Art hätten den weiteren Vorzug, dass sie sehr leicht dem Zehnersystem eingegliedert werden können. Dagegen haftet ihnen der schwerwiegende Mangel an, dass sie nur der ersten der oben aufgestellten Forderungen Rechnung tragen.

Das Gleiche gilt auch für die Layschen Typen. Es unterliegt gar keinem Zweifel, dass sie, insbesondere im Zahlenraum von 1—12, anschaulich sind, leicht aufgefasst werden können und eben so leicht in der Vorstellung haften. Warum hat aber Lay nicht auch Versuche über die Verwendbarkeit dieser Typen beim Rechnen angestellt? Hätte er dies getan, so würde sich ihm voraussichtlich die Tatsache aufgedrängt haben, dass seine fixen Zahlenbilder starre Formen sind, mit welchen sich beim anschaulichen Rechnen wenig anfangen lässt. Die von mir vorgeschlagenen Zahlenbilder aber können allen möglichen Verhältnissen angepasst werden und lassen sich ohne Schwierigkeit in verschiedene Rechenzusammenhänge eingliedern. Für die Zahl 15 verwendet Lay das Bild:

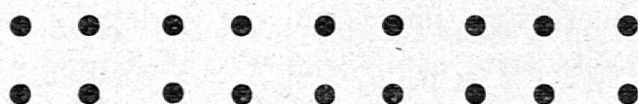


Aus der Anschauung dieser Gruppenreihe erkennt der Schüler allerdings leicht, dass $15 = 3 \cdot 4 + 3$ ist. Dass sie aber auch 3 Fünfer und ebenso 5 Dreier enthält, ist nach Massgabe der Layschen Grundtypen gar nicht

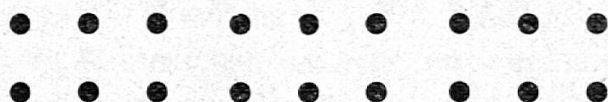
anschaulich. Der Schüler muss diese Verhältnisse mühsam heraussuchen; er vermag sich dieselben nicht sicher, klar und deutlich vorzustellen. Da in der vorliegenden Gruppenreihe weder ein Dreierbild von Fünfern, noch ein Fünferbild von Dreiern anschaulich ausgeprägt ist, so muss der Schüler gerade das tun, was durch die Anwendung von Zahlenbildern unmöglich gemacht werden soll; er muss auf Grund unklarer Anschauung in Worten zählen. Die Aufgabe, ein zur Anschauung vorliegendes Zahlenbild in zwei gleiche oder ungleiche, durch keine deutliche Gliederung sich heraushebende Summanden zu zerlegen, gelingt dem Kinde ohne Schwierigkeit. Soll aber die Gruppe als Vielheit mehrerer gleicher Summanden aufgefasst werden, so müssen sowohl die Summanden als auch ihre Anzahl in anschaulichen Bildern ausgeprägt sein. Dieser Forderung entspricht der Laysche Fünfzehnertypus offenbar nicht. Das Zahlenbild



aber leistet nicht nur das, was die Laysche Gruppenreihe zu leisten vermag, sondern es bietet dem Schüler auch ein durchsichtig klares Dreierbild von Fünfern und ein ebenso anschauliches Fünferbild von Dreiern. Die Zahl 18 stellt Lay in der Form dar:



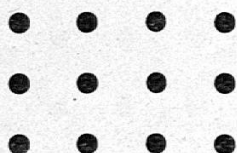
aus welcher der Schüler leicht zu erkennen vermag, dass $18 = 4 \cdot 4 + 2 = 2 \cdot 8 + 2$ ist. Dieses Zahlenbild enthält nun zwar auch 3 Sechser, 6 Dreier, 2 Neuner, 9 Zweier; dass aber hier eine anschauliche Darstellung dieser Verhältnisse vorliege, wird wohl niemand im Ernste behaupten. Ganz anders gestaltet sich die Sache, wenn man für diese Fälle die Zahl 18 durch die aus zwei gegliederten Reihen bestehende Gruppe



darstellt. Hier sind die Beziehungen, die aufgefasst werden sollen, anschaulich mit dargestellt, so dass sie nicht erst noch mühsam herausgesucht werden müssen.

Wenn sich also der Schüler für eine und dieselbe Zahl verschiedene Bilder einprägt, so bringt dies gar nicht Verwirrung in sein Denken, und die Auswahl des für den einzelnen Fall zweckdienlichen Bildes kann ihm keine Schwierigkeit bereiten. Im Gegenteil, es werden ihm dadurch die Mittel geboten, sich sowohl die Zahlen, mit welchen er zu operiren hat, als auch die Operation und ihr Resultat klar und deutlich vorzustellen. Verwirrend aber muss es für ihn sein, wenn man ihm zumutet, sich z. B. eine nur in Vierer anschaulich gegliederte Menge als Vielheit von Dreiern, Fünfern etc. vorzustellen.

Beim Rechnen im Zahlenraum von 10 bis 20 müssen die Zahlenbilder der weiteren Forderung entsprechen, dass sie sich ohne Schwierigkeit anschaulich ins Zehnersystem eingliedern lassen. Auch diese Aufgabe wird dem Schüler erleichtert, wenn ihm für die Zahl 10 verschiedene anschauliche Darstellungen zur Verfügung stehen. Die Zwölfergruppe



bietet ihm unter anderem 3 Vierer, 4 Dreier, 2 Sechser, 6 Zweier. Da er aber die zwei ersten Viererreihen nebst zwei Einheiten der dritten, und ebenso die drei ersten Dreierreihen mit einer Einheit der vierten als Bilder der Zahl 10 kennen gelernt hat, so ist es ihm leicht, die Gruppe aus der Anschauung auch als Summe von 10 und 2 aufzufassen. Im Zahlumfang von 10 bis 20 erfordert die Einordnung eines Zahlenbildes in das Zehnersystem immer nur die Zerlegung desselben in zwei Summanden. Diese ist dem Schüler auf Grund vorausgegangener Übungen auch dann leicht, wenn die beiden Summanden nicht absichtlich zu diesem Zwecke durch Gliederung herausgehoben sind. In der angeführten Gruppe ist die Zahl 12 als Vielheit von Zweiern, Dreiern, Vierern und Sechsern dargestellt, ohne dass dabei auf das Zehnersystem extra Rücksicht genommen wäre. Und doch gelingt dem Schüler die Einordnung ohne die geringste Schwierigkeit. Dies gilt überhaupt für alle Zahlenbilder, welche nach dem von mir vorgeschlagenen Bildungsgesetz aufgebaut sind. Die Gruppe



stellt die Zahl 14 als 2 Siebner und 7 Zweier dar. Ist die Zahl 10 in der Vorstellung des Schülers nicht von vornherein in die starre Schablone eines Zahlenbildes gebannt worden, so lässt sich auch hier die dekadische Gliederung auf den ersten Blick erkennen.

Lay betrachtet die Ansicht von Tanck, Knilling, Räther und Grass, dass der erste Rechenunterricht vom Zählen ausgehen müsse, als verfehlt. Aus den Resultaten einer mit noch nicht schulpflichtigen Kindern durchgeführten Reihe von Versuchen zieht er den Schluss, dass solche Kinder im Zahlumfang von 1 bis 10 zu klaren Zahlvorstellungen gelangen, ohne zählen zu können. Was er hier „zählen“ nennt, ist offenbar das mechanische Zählen in Worten. Dieses ist aber nicht das Zählen überhaupt, es ist auch gar nicht das ursprüngliche Zählen, sondern lediglich eine aus demselben allmähig herausgewachsene, abgeleitete Form dieser Operation. Bei jeder Zahlauffassung handelt es sich darum, ein Mengeverhältnis zu ermitteln. Dies kann offenbar nur dadurch geschehen, dass man Mengen vergleicht, also nicht nur anschaut, sondern denkt. Wenn der Schüler die Anzahl der in einer Menge enthaltenen Dinge ermitteln soll, so muss er diese Menge durch den Akt der Analysis in ihre Sonderheiten zerlegen, jede als ein Ding oder als Einheit auffassen und diese Einheiten durch den Akt der Synthesis zur einheitlichen Vielheit zusammenschliessen. Dieser Vorgang der Zahlauffassung ist das Wesentliche der Operation, welche ich „Zählen“ nenne. Sie besteht ganz ohne Zweifel im sukzessiven Hinzufügen von Einheiten, auch wenn nicht in Worten gezählt wird. Die erste bestimmte Zahlauffassung, welche sich im Geiste des Kindes aus den unbestimmten Mengebildern „viel“, „wenig“, „mehr“ und „weniger“ herausarbeitet, ist die Vorstellung der Einheit. Werden ihm dann zwei Dinge vorgelegt, so kann es zu einer wirklichen, klaren Vorstellung dieser Zahl nur dadurch gelangen, dass es jedes Ding als ein Ding erkennt und zum einen das andere als „noch ein Ding“ hinzufügt. Die geistige Kraft des Kindes muss also soweit erstarkt sein, dass es diese Synthesis von Einheiten in seinem Denken zu vollziehen, d. h. die Einheitsvorstellungen (1,1) zum Bilde der Zwei ($1 + 1$) zu vereinigen vermag. Diese Fähigkeit tritt in der geistigen Entwicklung des Kindes nicht plötzlich auf; sie entwickelt sich verhältnismässig langsam, gelangt aber schliesslich zu solcher Sicherheit, dass das Kind zwei vor seinen Augen liegende Dinge „auf den ersten Blick“, wie man zu sagen pflegt, in ihrer bestimmten Zahl zu erkennen vermag, so dass die Auffassung als eine momentane erscheint. Doch findet auch auf dieser Stufe der Entwicklung ein Hinzufügen von einem zu einem statt, nur vollzieht es sich in sehr rascher Folge. In ähnlicher Weise gestaltet sich die Auffassung der Zahlen 3 und 4. Auch hier gelangt das Kind allmähig dazu, dass es die anschaulich vorliegenden Zahlen in beliebiger Anordnung der Dinge durch eine ungemein rasche, fast momentane Synthesis

der Einheiten auffasst. Wie rasch das Auge eine Menge von 2, 3 oder 4 Dingen nacheinander zu überblicken vermag, ist eine bekannte Sache; dass ihm aber das Denken in der Synthesis der Einheiten eben so rasch zu folgen im stande ist, kann man leicht durch Beobachtungen an sich selber konstatiren.

Dieses ursprüngliche, scheinbar momentane Zählen ist aber auf das eng begrenzte Gebiet der vier ersten Zahlen beschränkt. Zwar besteht die Zahlauffassung auch über dieses Gebiet hinaus im sukzessiven Hinzufügen von einem zu einem. Aber das Kind vermag sich nun eine Menge nicht mehr in jeder beliebigen Anordnung in einem klaren Bilde vorzustellen. Deshalb müssen der beschränkten Auffassungsfähigkeit zweckentsprechende Zählmittel zu Hülfe kommen. Diese beruhen auf dem Prinzip der Gleichzahligkeit, nach welchem zwei Mengen gleich viele Dinge enthalten, wenn diese einander eindeutig und restlos zugeordnet werden können. Zählmittel dieser Art sind die Zahlenbilder, die Fingerreihe und die dem Gedächtnis eingeprägte Reihe der Zahlenamen. Bei den Zahlenbildern ist es jedesmal ein bestimmtes Raumschema der Ordnung, welches die Auffassung einer Menge in einem klaren Bilde ermöglicht und die Synthesis der Einheiten erleichtert. Beim Fingerzählen, welches im Grunde ein Spezialfall der Anwendung von Zahlenbildern ist, wird die Hand mit ihren Fingern als anschaulicher Massstab zur Ermittlung der Zahlen verwendet; beim Zählen in Worten aber dient die dem Gedächtnis sicher und fest eingeprägte Reihe der Zahlenamen als Massstab.

Die Zahlenbilder haben den Charakter eines Zählmittels so gut wie die Reihe der Zahlenamen. Die Ansicht, dass das Kind aus der Anschauung einer zweckmässig geordneten Menge von Dingen die Zahl derselben ohne sukzessives Hinzufügen von Einheiten aufzufassen vermöge, ist ein Irrtum, welcher das Resultat vielfacher Übung mit dem ursprünglichen Vorgang der Zahlauffassung verwechselt. Nachdem das Kind sich in festem Zusammenhang mit einem anschaulichen Raumschema der Ordnung die mit diesem verbundene Zahl durch sukzessive Synthesis von Einheiten sicher eingeprägt hat, braucht es, wenn ihm dieses Zahlenbild wiederum zur Anschauung vorgelegt wird, nicht mehr zu zählen, da es die Zahl aus dem Anblick der Figur durch das Wiedererkennen zu erschliessen vermag. Die Fähigkeit zu dieser Art der Zahlauffassung ist aber keine ursprüngliche, sondern eine durch Übung erworbene. Was das Kind einmal gelernt hat, braucht es nicht jedesmal wieder neu zu lernen.

Wenn uns aber im Gebiete der ersten Zahlen klare Grundvorstellungen fehlen würden, so könnte uns das Zählen in Worten diesen

Mangel nicht ersetzen. Ich hatte vor Jahren Gelegenheit, einen schwach-sinnigen Knaben zu beobachten, der vom Schulunterricht dispensiert war. In der Vergleichung von Mengen hatte er es zur Unterscheidung von „viel“, „wenig“ und „eins“ gebracht. Dagegen fehlte ihm die Fähigkeit bestimmter Zahlsynthesis in solchem Masse, dass er nicht einmal die Vorstellung einer Zweiheit von Dingen zu bilden vermochte. Trotzdem kannte er das, was man gewöhnlich „Zählen“ nennt. Im Umgang mit andern Kindern hatte er die Zahlenamen von 1 bis 10 kennen und in folgender Form radebrechen gelernt:

„ei, weu, dü, wie, wüi, däs, iwe, at, nün, dähe.“

Das Hersagen dieser Namen betrieb er aber als gedankenloses Spiel, da ihm die Fähigkeit fehlte, auch nur die elementarste Synthesis von Einheiten im Denken zu vollziehen.

Den Kindern aus dem vorschulpflichtigen Alter, mit welchen Lay die erwähnten Versuche durchführte, dienten die Zahlenbilder als Mittel, um am sicheren Leitfaden klarer Anschauung die Synthesis der Einheiten auszuführen, was offenbar möglich war, ohne dass sie in Worten zählen konnten. Und wenn sie nachher das nicht mehr vor ihren Augen liegende Zahlenbild aus der Erinnerung aufzeichnen mussten, so konnten sie auch diese Aufgabe ohne Zählen in Worten ausführen. In diesem Falle war aber der Vorgang ganz entschieden ausgeprägt ein vermitteltes, abgeleitetes Zählen nach dem Prinzip der Gleichzahligkeit. Die Kinder hatten sich von einer als Zahlenbild geordneten Gruppe von Dingen ein klares Bild eingeprägt. Beim Aufzeichnen aber mussten sie jeder Einheit dieses Bildes eine Einheit der Nachbildung zuordnen.

Lay hat sich auch einen für die Hand des Schülers zur Förderung der Selbsttätigkeit bestimmten Rechenapparat ausgedacht. Zur Darstellung der Zahlenbilder verwendet er hier halbkugelförmige Körper, die an der flachen Seite einen Fortsatz haben. Als Unterlage benutzt er die Innenseite des Federkastendeckels, welche mit entsprechend gruppierten Löchern versehen wird, um die Körper mit ihren Fortsätzen hineinzustecken. An diesem Apparat sollen die Schüler nachbilden, was der Lehrer am Klassenapparat vorführt. Dabei haben sie offenbar jeder Einheit des gewonnenen Anschauungs- oder Vorstellungsbildes eine Einheit an ihrem Handapparat zuzuordnen; sie müssen also ihre Zahlenbilder durch systematisches Hinzufügen von Einheiten, d. h. durch Zählen aufbauen.

Wie die Reihe überhaupt, so wird auch die sogen. „natürliche“ Zahlenreihe als Leitfaden der Zahlauffassung von den Typenrechnern sehr geringschätzig beurteilt. Hier beweisen sie aber den gleichen auf-

fallenden Mangel an Verständnis für die wirkliche Sachlage, wie die Zählmethodiker in der Überschätzung der Reihe. Hartmann behauptet: „Das Zählen ist ein Messen, und gemessen werden kann nur das, was in Reihenform des Nach- und Nebeneinander auftritt.“ Räther sagt in seiner „Theorie und Praxis des Rechenunterrichtes“: „Ihrem ganzen Wesen nach ordnen sich die Zahlen in eine Reihe. Jede folgende Zahl entsteht aus der vorhergehenden durch Hinzufügen der Eins; das ist das Bildungsgesetz der Reihe. Jede bestimmte Zahl hat ihren bestimmten mathematischen Ort in der Reihe, und bei jeder Vorstellung einer bestimmten Zahl müssen wir in Gedanken die Reihe von eins bis zu dem mathematischen Ort durchlaufen.“

Gemessen werden kann aber doch nicht nur das, was in der Reihenform des Nach- und Nebeneinander auftritt. Eine gegebene Menge von Dingen lässt sich ja nach dem Prinzip der Gleichzahligkeit durch eindeutige Zuordnung auch an einer Gruppe messen, welche keine Reihenbildung aufweist. Wenn das Mehr und Weniger an die Reihenform, an die lineare Ausdehnung gebunden wäre, so könnten wir uns zwei- und dreidimensionale Grössen gar nicht vorstellen. Die Behauptung Räthers, dass sich die Zahlen ihrem ganzen Wesen nach in eine Reihe ordnen, ist also nicht zutreffend. Man kann freilich die aufeinanderfolgenden Zahlen unter anderem auch dadurch darstellen, dass man Einheiten in eine Reihe ordnet. Aber man hat dann keine Zahlenreihe, sondern lediglich eine Reihe von einzelnen Dingen. Die durch diese, jedesmal von der ersten Einheit an, dargestellten Zahlen aber bilden keine Reihe; sie liegen nicht neben- oder nacheinander, sondern ineinander. Jede beginnt auf der einen Seite mit der ersten Einheit und reicht auf der andern Seite um eine Einheit über die zunächst vorhergehende hinaus. Es ist also unrichtig, wenn Räther behauptet, jede bestimmte Zahl habe in einer solchen Reihe ihren bestimmten mathematischen Ort. Denn was er so nennt, ist ja lediglich die letzte Einheit, die eine Grenze, mit welcher die Zahl abschliesst, während die andere Grenze durch die erste Einheit gebildet wird. In Wirklichkeit hat man also eine Reihe von Zahlgrenzen, aber nicht von Zahlen vor sich. Betrachtet man aber die abschliessende Einheit als den der Zahl in der Reihe zukommenden Ort, so hat dieser nicht den Charakter einer konkreten Zahldarstellung, sondern er erweist sich als Symbol wie die Zahlnamen.

Was wir die „natürliche Zahlenreihe“ nennen, ist keine Reihe von Einheiten, sondern eine logische Folge von Zahlbegriffen, für welche die Anordnung der Dinge gleichgültig ist. Die natürliche Zahlenreihe

ist eine arithmetische Progression, deren erstes Glied 1 und deren Differenz ebenfalls 1 ist; sie kann also nicht durch eine einfache Reihe von Dingen, wohl aber durch eine Reihe von Reihen oder von Gruppen dargestellt werden. Sie muss ja im ersten Gliede 1, im zweiten 2, im dritten 3, im vierten 4 Einheiten enthalten etc.; die Einheiten der einzelnen Glieder aber können in sehr verschiedener Weise angeordnet sein.

Auch die Layschen Zahltypen bilden eine konkrete Darstellung der natürlichen Zahlenreihe. Die einzelnen Typen sind Reihen von Gruppen; in ihrer Gesamtheit aber bilden sie eine Reihe von Gruppenreihen. Jedes Zahlenbild wird aus dem nächstvorhergehenden dadurch abgeleitet, dass man zu diesem, resp. zu einem ihm gleichen Gliede, noch eine Einheit hinzufügt. Der Aufbau dieser Typen ist also eine entschieden ausgeprägte, reale Synthesis von Einheiten, ein Zählakt. Und wenn der Schüler zu einem klaren Verständnis dieses Vorganges gelangen soll, so muss er das, was vor seinen Augen geschieht, in seinem Denken durchführen, d. h. er muss zählen, auch wenn er dabei keine Worte anwendet. Lay lässt aber schon beim Aufbau seiner Zahlenbilder die Kugeln zugleich auch in Worten zählen. Wie er dieses Verfahren mit seinen Grundsätzen in Einklang bringen will, ist mir unverständlich. Er hat einen umfangreichen Untersuchungsapparat in Bewegung gesetzt, um den Nachweis zu erbringen, dass das Kind im Zahlenraum von 1 bis 10 zu klaren Zahlvorstellungen gelangen könne, ohne in Worten zu zählen. Er betont mit Recht sehr entschieden, dass das Zählen in Worten ein abstraktes, mit symbolischen Begriffen operirendes Verfahren ist, welches nur dann gute Dienste leisten kann, wenn ihm in ausreichendem Masse klare Vorstellungen zu Grunde liegen. Nun aber lässt er schon beim Aufbau seiner Typen in Worten zählen und erst nachher die Zahlenbilder anschauen, vorstellen und in Zeichen nachbilden. Er lässt also das abstraktere Verfahren ohne Möglichkeit klaren Verständnisses vorausgehen und das anschauliche nachfolgen, was offenbar gerade das Gegenteil eines methodisch richtigen Stufenganges ist.

Erst nachdem in der dargelegten Weise die Zahl 2 als Zahlenbild hergestellt, gezählt, angeschaut, vorgestellt und in Zeichen nachgebildet worden ist, glaubt Lay die erforderliche Grundlage für das Rechnen, also zunächst für die Addition der Einheiten, $1 + 1 = 2$, gewonnen zu haben. Hier steht er offenbar im Banne eines alten, verknöcherten Irrtums, der den natürlichen Gang der Entwicklung auf den Kopf stellt. Denn das Zählen als einfachste Form des Rechnens, als fortschreitende Addition von Einheiten, ist ja gerade die psychische Tätigkeit, durch

welche das Kind bei naturgemäßem Verfahren auf Grund klarer Anschauung die ersten Zahlen auffasst. Die Anschauung ist die Grundlage, das Zählen als Synthesis von Einheiten aber die Grundform des Rechnens. Das Kind sieht ein „Ding“ und fasst es durch sein Denken als „ein“ Ding auf. Dies ist der elementarste Rechenakt. Wird noch ein weiteres Ding zur Anschauung vorgelegt, so kann es zu einer klaren Vorstellung der vor seinen Augen liegenden Menge nur dadurch gelangen, dass es am sicheren Leidfaden der Anschauung eins zu einem hinzufügt und in solcher Weise das Mengebild „eins und eins“ gewinnt. Nun wird ihm gesagt, dass man statt „eins und eins“ kürzshalber das eine Wort „zwei“ anwende, so dass der Satz „eins und eins sind zwei“ den Charakter einer Definition hat, durch welche auf Grund eines Rechenaktes, einer Synthesis von Einheiten, die Bedeutung des Wortes „zwei“ festgesetzt wird. Nachdem also das Kind dieses Wort mit klarem Verständnis anwenden gelernt hat, braucht man es nicht nachträglich erst noch zu der Einsicht zu führen, dass eins und eins zusammen zwei sind; denn dies muss ihm bei richtigem Verfahren schon bei der Einführung des Ausdrucks „zwei“ klar geworden sein. Die ganze Verkehrtheit des von mir schon während einer langen Reihe von Jahren bekämpften Verfahrens besteht darin, dass man glaubt, die Addition der Einheiten als Grundform des Rechnens sei erst dann möglich, nachdem die Zahlen in einem gewissen Umfange schon aufgefasst sind, während es doch gerade diese einfachste Form des Rechnens ist, durch welche das Kind auch bei der Anwendung von Zahlenbildern die ersten Zahlen auffasst.

In seiner „Theorie und Praxis des Rechenunterrichtes“ sagt Rät her: „Zum Begriff einer bestimmten Zahl gelangen wir durch Rechnen nach den vier Grundrechnungsarten, so dass es sich für uns nicht zuerst darum handelt, den Kindern richtige Zahlbegriffe beizubringen und erst nachher zu rechnen. — Das Aufwärtszählen ist nichts weiter als ein abgekürztes Zuzählen der 1. Wir haben gezeigt, dass die bestimmten Zahlen der natürlichen Zahlenreihe durch Additionen der 1 entstehen; folglich hat das Zählen als abgekürztes Zuzählen der 1 hinter dem ausführlichen Zuzählen der 1 seinen Platz, nicht vor demselben. Auf die Reihe: $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$ folgt das Zählen: 1, 2, 3, 4.“

Schon vor dem Erscheinen des Rät herschen Rechenwerkes habe ich in meiner Schrift über Pestalozzis rechenmethodische Grundsätze geltend gemacht: „In der Periode vor Pestalozzi pflegte man das Zählen als eine besondere Operation von den vier Grundrechnungsarten zu unterscheiden. Auch heutzutage noch trifft man häufig, ja fast

allgemein, die Ansicht, das Zählen sei eigentlich noch kein Rechnen, es sei vielmehr die Vorstufe desselben, die Grundlage, auf welcher erst das Rechnen sich aufbauen könne. — In Wirklichkeit ist es gerade umgekehrt. Das Zählen in der allgemein üblichen Form hat das Rechnen als Voraussetzung, geht aus dem Rechnen hervor. Das Vorwärtzzählen ist eine in der Bezeichnung abgekürzte, fortschreitende Addition von Einheiten. Die ursprüngliche Form dieser Addition ist: $1 + 1 = 2$, $2 + 1 = 3$, $3 + 1 = 4$ etc. Man kommt aber allmählig dazu, im Interesse der Kürze sich bei der Bezeichnung mit der Angabe der aufeinanderfolgenden Additionsresultate zu begnügen, also in der Form zu zählen: 1, 2, 3, 4 etc.“

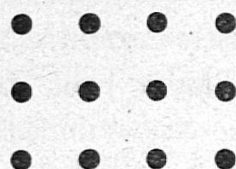
Lay nimmt ins Rechenpensum des ersten Schuljahres ausser dem Addiren und Subtrahiren im Zahlenraum von 1 bis 20 auch das Vervielfachen und Messen auf. Das Teilen aber schliesst er deshalb aus, weil bei dieser Operation der Divisor eine abstrakte Zahl sei. Dass ein eifriger Verfechter des Rechnens mit Zahlenbildern so etwas behaupten kann, ist mir unbegreiflich. Messen und Teilen sind die beiden Umkehrungen der Multiplikation. Beim Messen hat man aus dem Produkt und dem Multiplikanden den Multiplikator zu bestimmen, während beim Teilen aus dem Produkt und dem Multiplikator der Multiplikand zu suchen ist. Wenn nun beim Teilen der Divisor eine abstrakte Zahl wäre, so müssten ganz ohne Zweifel auch der Quotient beim Messen und der Multiplikator beim Vervielfachen abstrakte Zahlen sein. In der Tat wird dies von andern Methodikern als Grund angeführt, um das Multiplizieren und das Messen aus dem Rechenpensum des ersten Schuljahres auszuschliessen. Beim Rechnen nach dem hergebrachten Zählverfahren, das ohne ausreichend anschauliche Grundlage mit symbolischen Begriffen operirt, ist ganz ohne Zweifel das Vervielfachen mit seinen Umkehrungen für das erste Schuljahr zu schwierig und zu abstrakt; aber dies liegt nicht im Charakter der Operationen, sondern im unrichtigen Lehrverfahren. Wenn auf Grund zweckmässiger Zahlenbilder gerechnet wird, so hat der Schüler nicht nur beim Addiren und Subtrahieren, sondern auch beim Vervielfachen, Messen und Teilen nur mit konkreten Zahlen zu operiren. Nehmen wir an, es werde ihm der Laysche Zwölfertypus



zur Anschauung vorgelegt. Dieses Zahlenbild ist unter anderem eine anschauliche Darstellung der Multiplikation $3 \cdot 4 = 12$. Wo sind nun

da die abstrakten Zahlen, von welchen so viel gefabelt wird? Eine Gruppe mit ihren 4 Einheiten ist Multiplikand, die Zahl der Gruppen Multiplikator. Dieser aber ist eine eben so konkrete Zahl als der Multiplikand; die Anzahl der Gruppen ist als Dreierbild gerade so anschaulich wie eine Gruppe als Viererbild. Arbeite man doch mit klaren Anschauungen, statt mit leeren Worten, dann wird der dem Vervielfachen angedichtete abstrakte Charakter ohne weiteres verschwinden. Um die Umkehrungen der Multiplikation $3 \cdot 4 = 12$ auszuführen, hat der Schüler beim Messen die Anzahl der Gruppen, beim Teilen aber die Zahl der in einer Gruppe enthaltenen Einheiten anzugeben. Was hier von ihm gefordert wird, kann ihm keine Schwierigkeit bereiten; er braucht ja nur auszusprechen, was er in klaren Bildern vor Augen sieht. Auch der Divisor der Teilungsaufgabe ist als anschauliches Dreierbild der Gruppen eine konkrete Zahl.

Das Laysche Zwölferbild enthält nun auch eine Reihe von vier Dreiergruppen. Aber diese sind so wenig anschaulich ausgeprägt, dass ihre Zahl nicht unmittelbar aus der Anschauung erfasst werden kann, also einen mehr abstrakten Charakter hat. Diese Sachlage ist aber nicht im Wesen der Operation begründet, sondern sie fällt dem unzumutbaren Zahlenbilde zur Last. Wählt man aber die Gruppe



zur Veranschaulichung, so ist auch die Vierzahl der Dreier anschaulich dargestellt.

Vervielfachen, Messen und Teilen unterscheiden sich vom Addiren und Subtrahiren gar nicht dadurch, dass sie abstrakter und deshalb schwieriger wären, wohl aber dadurch, dass man beim Addiren und Subtrahiren nur mit einfachen Einheiten, beim Vervielfachen, Messen und Teilen aber ausserdem mit Vielheiten zu operiren hat, welche als Kollektiveinheiten aufgefasst und als solche gezählt werden müssen. Diese Operationen sind also ganz ohne Zweifel komplizirter. Bei zweckmässiger Veranschaulichung durch Zahlenbilder erschweren sie aber gerade im ersten Schuljahr die Arbeit des Schülers gar nicht, im Gegenteil, sie dienen ihm als Mittel, um die mit der Auffassung grösserer Zahlen verbundene Schwierigkeit dadurch zu überwinden, dass er sich eine über 4 hinausgehende Menge als anschaulich ausgeprägte Vielheit eben so anschaulicher, kleinerer Vielheiten vorstellt.

Hier habe ich einer scheinbar gewichtigen Einwendung zu begegnen. Man wird sagen, was der Schüler aus der Anschauung eines zweckmässigen Zwölferbildes ohne weiteres erkenne, das sei „ $4 + 4 + 4$ “ oder „ $3 + 3 + 3 + 3$ “. Dies seien aber gewöhnliche Additionen. Man könne also Zahlenbilder anwenden, ohne das Vervielfachen einzuführen. Erst wenn man den Begriff „mal“ und das ihm entsprechende Multiplikationszeichen anwende, habe man es mit wirklichen Multiplikationen zu tun. Aber gerade das ist's, was ich entschieden bestreite. Man wird zugeben, dass ein Begriff dadurch, dass man ihm nachträglich aus Gründen der Zweckmässigkeit eine andere Bezeichnung gibt, gar nicht zu einem anderen Begriff wird. Die Ausdrücke „ $1 + 1 + 1$ “ und „ 3 “ bezeichnen den gleichen Begriff. Das Gleiche gilt für die Darstellungen „ $4 + 4 + 4$ “ und „ $3 \cdot 4$ “; sie bezeichnen beide die gleiche Operation, nämlich eine Multiplikation. Was bedeutet denn „ $3 \cdot 4$ “ anderes als eben „ $4 + 4 + 4$ “?

Es wird aber ferner geltend gemacht, man könne ja zugeben, dass auch der Ausdruck „ $4 + 4 + 4$ “ eine Multiplikation bezeichne, da in der That auch nach dieser Darstellung die Zahl 4 verdreifacht werde. Dem rechnenden Schüler aber komme diese Sachlage nur dann zum Bewusstsein, wenn er nicht nur addire, sondern zugleich auch die Zahl der gleichen Summanden mit in Rechnung bringe. Dies ist richtig, steht aber gerade mit meiner Auffassung in vollem Einklang. Soll der Schüler aus der Anschauung der Zwölfergruppe eine wirkliche Zahlvorstellung gewinnen, so muss er zu der sichern Einsicht gelangen, dass diese Gruppe drei Reihen und jede derselben vier Einheiten enthält, d. h. er muss multiplizieren, ob nun diese Operation in Zeichen so oder anders dargestellt werde.

Damit der Schüler auch über 4 hinaus zu klaren Zahlvorstellungen gelange, muss man ihm Gelegenheit bieten, die Zahlen an anschaulich geordneten Gruppen von Gegenständen aufzufassen. Aber gerade diejenigen Zahlenbilder, welche eine gegebene Menge von Dingen als Vielheit gleicher Summanden darstellen, also nach dem Gesetz der Multiplikation anschaulich aufgebaut sind, werden von den Schülern leichter und sicherer als andere aufgefasst und in der Vorstellung festgehalten. Wenn man also im Rechenunterricht des ersten Schuljahres zweckmässige Zahlenbilder anwendet, so wird dadurch das Vervielfachen, und mit diesem das Messen und Teilen, tatsächlich in den Vorstellungskreis des Schülers eingeführt. Aus der Anschauung des Zwölferbildes erkennt er leicht, dass die Gruppe drei Reihen von je vier Einheiten enthält, dass also $3 \cdot 4 = 12$ und 4 in 12 dreimal enthalten ist

Die gleiche Anschauung zeigt ihm aber auch, dass jeder der drei gleichen Teile (Reihen), in welche die Gruppe anschaulich gegliedert ist, vier Einheiten in sich fasst, dass also der dritte Teil von $12 = 4$ ist. Lässt man also den Schüler des ersten Schuljahres an Zahlenbildern solcher Art rechnen, so braucht man gar nicht mehr zu entscheiden, ob man das Vervielfachen mit seinen Umkehrungen einführen wolle oder nicht, da man dies schon getan hat. Es kann sich dann nur noch um die Frage handeln, ob es methodisch gerechtfertigt sei, auch die für die drei Operationen übliche Bezeichnungsweise schon auf dieser Stufe anzuwenden. Beim Rechnen nach dem hergebrachten Zählverfahren wäre diese Bezeichnungsweise für das erste Schuljahr offenbar zu abstrakt und zu schwierig. Der Schüler vermag sich ja bei diesem Verfahren nicht einmal den Inhalt der einzelnen Zahlzeichen, geschweige denn die Bedeutung ihrer operativen Verknüpfung klar und deutlich vorzustellen. Es wird ihm zugemutet, Vorstellungen zu haben und zu verbinden, welche er nicht hat, nicht haben kann und deshalb auch in seinem Denken nicht zu verknüpfen vermag. Beim Rechnen mit zweckmässigen Zahlenbildern besteht diese Schwierigkeit nicht; denn der Schüler sieht ja die Zahlen, die Operation und ihr Resultat in einem klaren Bilde vor Augen. Wenn das Kind in solcher Weise zu klaren und deutlichen Anschauungen, Vorstellungen und Begriffen gelangt, so wird ihm auch die Darstellung der Operationen in Zeichen viel leichter, als es bei dem altgewohnten Zählverfahren mit seiner öden, abstumpfenden Gedächtnisarbeit möglich ist. Dazu kommt aber noch, dass der Stufengang fortschreitend abstrakter werdender Bezeichnung, welchen der Schüler hier durchlaufen muss, für ihn nicht etwas neues ist, das er erst noch zu lernen hätte. Nachdem er sich vorher schon daran gewöhnt hat, die Zeichenverbindung „ $1 + 1 + 1$ “ durch das eine Zeichen „ 3 “ zu ersetzen, kann ihm der Übergang von der Darstellung „ $4 + 4 + 4$ “ zu der Bezeichnung „ $3 \cdot 4$ “ unmöglich schwer fallen. Er braucht ja nur auf anschaulich und einheitlich ausgeprägte Vielheiten anzuwenden, was er an einfachen Einheiten geübt hat.

Der Kampf, welchen die Typenrechner gegen eine methodisch verfehlte Behandlung des Zählens führen, hat seine volle Berechtigung. Aber sie schütten das Kind mit dem Bade aus und setzen an die Stelle einer Einseitigkeit eine andere. Wenn sie glauben, dass das Kind die ersten Zahlen durch das bloss Anschauen von Zahlenbildern aufzufassen vermöge, so wird durch diese rettungslos irrtümliche Meinung an der Tatsache, dass der Schüler trotzdem zählt und auch beim Rechnen mit Zahlenbildern zählen muss, nicht das geringste geändert. Wenn also

mit dem Typenrechnen zugleich auch das Zählen in Worten verbunden wird, so schadet dies nicht nur gar nichts, sondern es wird dadurch ein wesentlicher Gewinn erzielt. Dieses von den einen masslos überschätzte, von den andern aber ebenso verständnislos absprechend beurteilte Zählen in Worten ist nun einmal eine Operation, in welcher der Schüler zu sicherer Fertigkeit gelangen muss. Übt er sie also an klarer Anschauung, wie die Zahlenbilder sie bieten, so gewöhnt er sich daran, sich nicht so leicht mit unklaren Mengebildern oder mit leeren Worten zu begnügen.

Wenn man sich ohne Vorurteil die Dienste vergegenwärtigt, welche Typenrechnen und Zählen, jedes in seiner Art, dem ersten Rechenunterricht zu leisten vermögen, so wird man leicht einsehen, dass es sich nicht um ein Entweder — Oder handeln kann. Die beiden Operationen schliessen einander nicht aus, im Gegenteil, sie fordern und ergänzen sich gegenseitig. Das Typenrechnen gibt Klarheit, das Zählen Gewissheit. Das blosse Zählen in Worten, d. h. das Operiren mit symbolischen Begriffen, welchen die anschauliche Grundlage fehlt, ist ein Gaukelspiel mit leeren Worten, durch welches Lehrer und Schüler sich gegenseitig täuschen. Durch das blosse Anschauen von Zahlenbildern aber gelangt das Kind nicht zu wirklichen Zahlbegriffen; es gewinnt dadurch lediglich die unerlässlich notwendige Grundlage, auf welcher einzig sein Denken eine sichere und klare Synthesis von Einheiten zu vollziehen vermag. Typenrechnen ohne Zählen und Zählen ohne klare Anschauung sind Halbheiten; das einzig Richtige ist die innige Verschmelzung beider Operationen, das Zählen am Leitfaden anschaulicher Zahlenbilder. Von den beiden Halbheiten stiftet aber das einseitige Typenrechnen den geringeren Schaden; denn es bietet dem Schüler, freilich ohne dass dies beabsichtigt wäre, doch wenigstens die Mittel, sich durch sein eigenes Denken aus dem Banne des pedantischen Lehrverfahrens herauszuarbeiten und trotz desselben mit gutem Erfolge zu zählen. Dem Schüler aber, welcher angehalten wird, im Gebiete der ersten Zahlen ohne ausreichend anschauliche Grundlage in Worten zu zählen, wird dadurch auch die Möglichkeit vorenthalten, das zu klarer Zahlauffassung Fehlende aus eigener Kraft zu erwerben. An die methodische Bildung und an das praktische Geschick des Lehrers stellt ein psychologisch und methodisch sicher begründetes Typenrechnen, bei welchem auch Vervielfachen, Messen und Teilen in den Dienst der Zahlauffassung gezogen werden müssen, offenbar höhere Anforderungen als das altgewohnte Zählverfahren. Für den Schüler aber ist das Rechnen mit Zahlenbildern viel leichter, anregender und von ungleich höherem Bildungswert, als das mechanische Eindrillen von Zählresultaten, welchen der klar vorstellbare Inhalt fehlt.