Zeitschrift: Schweizerische Polytechnische Zeitschrift

Band: 2 (1857)

Heft: 3

Rubrik: Maschinenkunde und mechanische Technologie

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 04.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Maschinenkunde und mechanische Technologie.

Ueber die Festigkeit und Elastizität einiger Federarten.

Von F. Reuleaux,
Professor am eidgen. Polytechnikum.

(Schluss.)

Taf. 8.

III. Die Schraubenfedern.

Die schraubenförmig gewundenen oder Schraubenfedern finden in kleinem und grossem Massstab, und zwar in ersterm am meisten, eine sehr ausgedehnte Anwendung, und sie eignen sich auch in der That zu den verschiedenartigsten Zwecken. Namentlich wird ihre Anwendbarkeit dadurch begünstigt, dass sie so leicht anzufertigen sind, indem das schraubenförmige Aufwickeln eines Drahtes sehr leicht zu bewerkstelligen ist, und dass schon die gewöhnlichen käuflichen Eisen- und Messingdrahtsorten Schraubenfedern von nicht unbedeutender Tragkraft und dauernder Elastizität abgeben. Diess kann man unter anderm in unzähligen Beispielen an den Polsterfedern bemerken. Für die Zwecke des Maschinenbaues wählt man mehr den Stahl, erhält aber daraus auch Federn von so bequemer Form, von einem verhältnissmässig so geringen Gewicht und einer so grossen Dauerhaftigkeit, als man nur immer wünschen kann. In den Lehrbüchern der Mechanik findet man die Schraubenfeder in der Regel nicht behandelt, obschon es für die Praxis häufig von grossem Werth sein würde, darüber Anhaltpunkte, wenn auch nur allgemeine, zu besitzen; man begnügt sich meist mit der Beobachtung, dass sich diese Federn im Verhältniss der ziehenden und drückenden Kräfte ausdehnen oder verkürzen und überlässt das Uebrige dem Praktiker.

Poncelet bespricht in seiner »Anwendung der Mechanik auf Maschinen« die Schraubenfeder. Er behandelt sie als Beispiel in dem ausgezeichneten Abschnitt: Vom Widerstande fester Körper, in welchem er die Festigkeitgleichungen in ihrer allgemeinsten Form aufstellt. Hierbei leitet er aus dem allgemeinen Fall auch die Formel für die cylindrische Schraubenfeder von constantem Querschnittt, wie gesagt beispielsweise, ab, und führt zugleich Arbeiten des berufenen italienischen Geometers Giulio*) über denselben Gegenstand an, deren Einsicht mir die Güte des Herrn Verfassers möglich gemacht hat. Die Formeln aber, auf welche beide kommen, sind, weil sie die Aufgabe mit aller nur erreichbaren Strenge (und überdiess nur für die eine Federgattung) lösen, zu verwickelt, um für die Praxis anwendbar zu sein. Die Theorie der Schraubenfedern lässt sich aber, wenn man einige für die Praxis ganz zulässige Vernachlässigungen begeht, auch einfacher darstellen, und ist dann, das Verständniss der Hauptlehren über die Festigkeit der Materialien vorausgesetzt, durchaus nicht schwierig.

Um diese Theorie, die im Folgenden zu geben versucht wird, zu prüfen und zu bewahrheiten, hat der Verfasser mit einem besonders dafür gebauten Apparat am eidgenössischen Polytechnikum eine grosse Reihe von Versuchen ausgeführt, und dabei Schraubenfedern von verschiedenem Material, von verschiedener Grösse und verschiedenen Formen im Querschnitt und Aufwicklung der Prüfung unterworfen.

Diese Versuche haben mit aller für die Praxis nur wünschbaren Genauigkeit die Richtigkeit und Anwendbarkeit der zu Grunde gelegten Theorie bestätigt; sie konnten für die in Probe genommenen Materialien aufs beste dazu dienen, die vom Material abhängigen Constanten, d. h. die hier in Frage kommenden Festigkeits-Coëffizienten zu bestimmen.

Suchen wir zunächst ganz allgemein festzustellen, welche Art von Verschiebung der Moleküle in einem schraubenförmig gewundenen Stabe eintritt, wenn man auf denselben ziehende oder drückende Kräfte in derselben Weise wirken lässt, wie diess bei den Schraubenfedern geschieht. Fig. 21 (Taf. 8) stelle einen solchen Stab, dessen Achse schraubenförmig um einen beliebigen Drehungskörper gewunden sei, dar. Von jedem der beiden Enden A und B gehe ein fest mit dem Stab verbundener Arm AA_1, BB_1 aus; an den Endpunkten dieser Arme denken wir uns die beiden gleichen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte P, P angreifend. Dadurch werden sie zunächst die anfängliche Form der Feder verändern, dann aber (vorausgesetzt, dass ihre Grösse ein gewisses Mass nicht überschreite) mit den innern Kräften der Feder ins Gleichgewicht kommen. Dabei muss für jeden Querschnitt der Feder Gleichgewicht herrschen zwi-

*) Mémoires de l'Académie des Sciences de Turin, 1841, Série II. T. IV.

schen den äusseren Kräften einerseits und den in dem Querschnitt durch die Formänderung hervorgerufenen inneren Kräften, welche die Urform der Feder wieder herzustellen suchen, andererseits. Ist die Art und Weise, wie diese Kräfte ins Gleichgewicht treten, erkannt, so ist die gesuchte Theorie in ihren Grundzügen gefunden.

Betrachtet man die Einwirkung der Kräfte PP auf einen beliebigen Querschnitt C, der mit $A,B,$ in einer Ebene liegt, so sieht man, dass die Verhältnisse dieselben, oder doch fast dieselben sind, welche bei der Drehungsfestigkeit vorliegen. Denken wir uns nämlich auf einen Augenblick bei C die Feder entzwei geschnitten, und dann wieder solche Kräfte zwischen den beiden Schnittflächen angebracht, wie sie vorher dort bestanden, so sehen wir, dass die nach oben wirkende Kraft P die zu A gehörige Schnittfläche gegen die zu B gehörige zu verdrehen strebt, und zwar bildet das Stück A,AC der Feder das feste System, mittelst dessen seine Kraft P, die P_a genannt werden möge, die Schnittfläche bei C angreift. Ganz Aehnliches gilt von der nach unten wirkenden Kraft P, die wir einstweilen P_b nennen wollen, indem dieselbe die zu B,BC gehörige Schnittfläche im entgegengesetzten Sinne zu drehen sucht. Der feste Punkt, um welchen diese Drehung angestrebt wird, ist, wie sich ebenso wie bei der Drehfestigkeit nachweisen lässt, der Schwerpunkt der Schnittfläche. Dabei vernachlässigt man zwar eine Einwirkung der Kräfte P_a und P_b. Es ergibt sich nämlich beim Verlegen dieser Kräfte in den Schwerpunkt des Schnittes bei C ausser dem drehenden Kräftepaar auch noch eine Kraft P zum Abscheeren des Querschnittes; allein diese ist gegen das Moment der Verdrehung in der Regel sehr klein, so dass man sie mit demselben Recht vernachlässigen kann, wie man die abscheerende Kraft bei einem auf Biegung beanspruchten Körper gewöhnlich unberücksichtigt lässt, ein Fall, über welchen weiter oben (I. Heft S. 2) gesprochen wurde.

Ist nun ϱ der Abstand des Schwerpunktes des untersuchten Querschnittes von $A,B,$, so ist das statische Moment, mit welchem jede der beiden Kräfte den Querschnitt zu drehen sucht:

$$P\varrho.$$

Diesem Moment wird das Gleichgewicht gehalten durch die Summe der statischen Momente der innern Kräfte, bezogen auf eine durch den Schwerpunkt des Schnittes gehende Achse, und zwar ist die Summe dieser Momente allgemein =

$$\mathfrak{S} \cdot \frac{J}{a},$$

wenn man unter J das polare Trägheitmoment des Querschnittes, unter a den grössten im Querschnitt vorkommenden Abstand vom Schwerpunkt, und unter $\mathfrak{S}$ die in der Entfernung a pro Flächeneinheit herrschende Spannung zwischen den Molekülen versteht. Man hat also als Grundgleichung für jeden einzelnen Querschnitt der Feder:

$$P\varrho = \mathfrak{S}\frac{J}{a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (27)$$

Liegt $AA,$ in der Achse des Drehkörpers, in welchem die Schwerpunkte aller Querschnitte liegen, so sind die Werthe von ϱ die von Halbmessern jenes Drehungskörpers. Die gefundene Gleichung bleibt ungeändert, wenn man die Richtungen der Kräfte P_a und P_b umkehrt, d. h. P_a nach unten statt nach oben, und P_b nach oben statt nach unten wirken lässt.

Es handelt sich nun um eine zweite Ermittlung, nämlich um die der Verlängerung oder Verkürzung, welche die Feder in Folge der Einwirkung der Kräfte PP erfährt. — Bei der Belastung der Feder mit den Kräften PP verdreht sich jede einzelne Molekülschicht gegen die benachbarte, und zwar möge der kleine Winkel dieser Verdrehung $= d\Theta$ sein. Der Angriffpunkt der Kraft P durchläuft dann in Folge dieser einzelnen Verdrehung das Wegelement $\varrho d\Theta$ in der Kraftrichtung. Nennt man also die ganze Verlängerung oder Verkürzung f, so hat man deren auf die einzelne Molekülschicht kommendes Element:

$$df = \varrho d\Theta.$$

Nun ist nach der Festigkeitlehre der Verdrehungswinkel Θ eines prismatischen Stabes von der Länge l:

$$\Theta = \frac{\varrho}{J}\,\frac{P}{G}\,l,$$

und demnach dessen Elementartheil:

$$d\Theta = \frac{\varrho}{J}\,\frac{P}{G}\,dl.$$

Hierbei bezeichnet G den sogenannten Drehungsmodul, einen von Material abhängigen Coëffizienten, welcher in einem gewissen Verhältniss zum Elastizitätsmodel E steht. Für dl ist in unserem Falle ein aus der Form der Feder abgeleiteter Werth einzuführen. Bezeichnet man den Winkel, welchen eine durch die Schwerpunkte sämmtlicher Querschnitte gehende Linie um die Achse $AA,$ durchläuft, mit φ (siehe Fig. 22), so ist das Längenelement der Feder $= \varrho d\varphi$. Diesen Werth in die letzte Gleichung eingeführt, und darauf $d\Theta$ in die obige Formel für df eingesetzt, gibt:

$$df = \frac{\varrho^3}{J}\,\frac{P}{G}\,d\varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (28)$$

Dieses ist die zweite Grundgleichung für die Schraubenfedern; durch Integration derselben lässt sich in jedem besondern Falle die Verlängerung oder Verkürzung f finden. Auch hiebei wird die Formänderung vernachlässigt, welche durch die obenerwähnte Abscheerungskraft herbeigeführt wird, indem dadurch die Formeln wiederum viel verwickelter ausfallen würden. Es würde hier zu weit führen, zu zeigen, wie man die abscheerende Kraft berücksichtigen kann. Sollen Gleichung (27) und (28) benutzt werden, so ist zuerst bei der zu untersuchenden Federart festzustellen, in welchem Zusammenhang die in der Formel vorkommenden Grössen untereinander stehen; durch diese Untersuchungen, bei welchen man sich für die anzuwendenden Vernachlässigungen entscheiden kann, gelangt man zu den Formeln für die einzelnen Fälle. — In der zur Gleichung (28) führenden Betrachtung wurden die Arme $AA,$ und $BB,$ unberücksichtigt gelassen. Diess kann aber füglich geschehen; denn erstens ist ihre Einbiegung immer sehr gering, wenn sie keinen kleinern Querschnitt als die Federwindungen haben, und zweitens

befestigt man die Feder-Enden gewöhnlich nicht vermittelst solcher Arme, sondern etwa so, wie es Fig. 23 andeutet, wo denn jeder Einfluss der Befestigungstheile wegfällt, oder auch auf andere, ähnlich wirkende Weise.

Die gebräuchlichste Schraubenfeder ist die cylindrische, und unter diesen die mit kreisförmigen Querschnitten, mit andern Worten die aus rundem Draht gewundene, deren Fig. 23 eine darstellt. Der Werth für ϱ in Formel (27) ist im unbelasteten Zustand der Feder = deren mittlerem Halbmesser R, und nimmt mit zunehmender Belastung etwas ab; doch begeht man keinen merklichen Fehler, wenn man ϱ constant $= R$ setzt. Die Querschnitte des Federdrahtes, welche man durch Achsenschnitte erhält, sind streng genommen Ellipsen, deren Achsenverhältniss durch den Steigungswinkel der Schraube bedingt ist, und sich mit zunehmender Belastung P ebenfalls ändert; auch hiervon können wir ohne grossen Fehler absehen und haben dann das polare Trägheitmoment J des Drahtquerschnittes, wenn der Durchmesser desselben $= d$ ist:

$$J = \frac{\pi}{32} d^4.$$

Nun ist a hier $= \frac{d}{2}$; es geht also Gleichung (27) über in:

$$PR = \mathfrak{S} \cdot \frac{\pi}{16} d^3,$$

woraus:

$$P = \mathfrak{S} \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{R} \quad \ldots\ldots \quad (29)$$

Man sieht, dass die Tragkraft der vorliegenden Schraubenfeder mit der dritten Potenz der Drahtdicke steigt, dagegen dem Federhalbmesser verkehrt proportional ist. Will man also eine sehr starke Schraubenfeder erhalten, so braucht man nur d gross zu nehmen; freilich nimmt dann aber, wie sich zeigen wird, auch die Dehnbarkeit der Feder ab. Der Werth, den man für $\mathfrak{S}$ einzuführen hat, hängt vom Material der Feder ab; überschreitet $\mathfrak{S}$ den der Elastizitätsgrenze entsprechenden Werth, so ändert die Feder ihre Form bleibend.

Ist der Querschnitt des Federdrahtes rechteckig, wie es Fig. 24 und 25 zeigen, so ist für J nicht gerade das polare Trägheitsmoment, sondern ein davon etwas verschiedener Werth einzuführen. Die strenge Theorie der Drehungsfestigkeit weist diess nach und die Versuche bestätigen es vollkommen, und zwar wird die Abweichung dadurch nothwendig, dass die Querschnitte durch die Verdrehung windschief werden. Beim Rechteck von den Seiten b und h hat man zu setzen für J den Werth: $\frac{b^3 h^3}{3(b^2 + h^2)}$ und für $\frac{J}{a}$ den Werth $\frac{b^2 h^2}{3\sqrt{b^2 + h^2}}$. Den letztern Werth in Formel (27) eingesetzt, gibt für die cylindrische Feder mit rechteckigem Drahtquerschnitt:

$$P = \mathfrak{S} \cdot \frac{b^2 h^2}{3R\sqrt{b^2 + h^2}} \quad \ldots\ldots \quad (30)$$

Ist $b = h$, d. h. ist der Querschnitt des Federdrahtes quadratisch, so erhält man endlich:

$$P = \frac{\mathfrak{S}\, b^3 \sqrt{2}}{6 \cdot R} = \frac{0{,}236\, \mathfrak{S}\, b^3}{R} \quad \ldots\ldots \quad (31)$$

Andere Querschnitte, als die drei behandelten, kommen in der Praxis wenig vor. Die vorstehenden Formeln können auch dazu dienen, den verhältnissmässigen Materialaufwand der Federn mit verschiedenen Querschnittformen zu bestimmen. Obgleich es scheinen könnte, und man beim Vergleich mit der Biegungsfestigkeit glauben möchte, dass der rechteckige Querschnitt eine günstigere Materialverwendung habe, als der kreisförmige, so ist das doch nicht der Fall. Es lohnt sich der Mühe, dieses durch Rechnung nachzuweisen. Setzt man bei einer Feder mit rundem und einer mit rechteckigem Draht P, G und $\mathfrak{S}$ gleich, und setzt ausserdem $h = ab$, so erhält man durch Vereinigung von (29) mit (30) die Gleichung:

$$\frac{\pi}{16} \frac{d^3}{R} = \frac{a^2 b^3}{3R_1\sqrt{1 + a^2}},$$

woraus folgt:

$$\frac{b}{d} = \sqrt[3]{\frac{R_1}{R}} \sqrt[3]{\frac{3\pi\sqrt{1 + a^2}}{16a^2}} \quad \ldots\ldots \quad (32)$$

Nun hat man die Fläche F des kreisförmigen Querschnittes $F = \frac{\pi}{4} d^2$, und die Fläche F_1 des rechteckigen Querschnittes $F_1 = bh = ab^2$, mithin:

$$\frac{F_1}{F} = \frac{4a}{\pi} \frac{b^2}{d^2}.$$

Hierin für $\frac{b}{d}$ den so eben gefundenen Werth eingesetzt, gibt nach kleiner Reduktion:

$$\frac{F_1}{F} = \sqrt[3]{\frac{R_1^2}{R^2}} \sqrt[3]{\frac{9(1 + a^2)}{4\pi a}} \quad \ldots\ldots \quad (33)$$

Die zweite der Wurzeln bleibt, wie man auch a annehmen möge, grösser als die Einheit, d. h. die Feder mit rechteckigem Drahtquerschnitt braucht bei gleichem R und gleicher Federlänge $\mathfrak{S}$ stets mehr Material, als die mit rundem. Ist z. B. $a = 6$, so wird, wenn $\frac{R_1}{R} = 1$ ist,

$$\frac{F_1}{F} = \sqrt[3]{\frac{9 \cdot 37}{24 \cdot \pi}} = 1{,}64.$$

Das für die Materialersparniss günstigste Verhältniss der Rechteckseiten erhält man (wie sich durch Differentiation von (33) nachweist), wenn man $a = 1$ macht, d. h. beim quadratischen Querschnitt, wobei aber die Wurzel immer noch $= \frac{9}{8}$ wird. Daraus könnten wir schon den Schluss ziehen, dass der runde Querschnitt da vorzuziehen sein werde, wo Materialersparniss wichtig ist, wollen aber eine genauere Untersuchung dieses Umstandes erst vornehmen, wenn wir auch die Dehnung, welche die Feder durch die Kraft P erfährt, mit in Rücksicht zu ziehen im Stande sind. Das eben Gefundene lässt sich aber schon für den Vergleich des Materialverbrauchs prismatischer stabförmiger Körper, welche auf Drehungsfestigkeit beansprucht sind, nützlich verwenden.

Die Formeln (29) bis (31) geben noch zu einer andern Bemerkung Veranlassung. Da nämlich die Spannung $\mathfrak{S}$ bei den betrachteten Federn in allen Querschnitten den

gleichen Werth hat, so ist die cylindrische Schraubenfeder mit constantem Drahtquerschnitt ein Körper von gleicher Festigkeit und zwar von gleicher Drehungsfestigkeit.

Die Verlängerung oder Verkürzung f, welche bei den drei besprochenen Federarten durch die Kraft P hervorgerufen wird, lässt sich unter Begehung derselben Vernachlässigungen, die oben gemacht wurden, leicht aus Formel (28) finden. Wir haben wieder P constant und $= R$ anzunehmen, und für J die den verschiedenen Querschnitten zukommenden Werthe einzuführen. Man erhält daher aus (28) (wenn man integrirt):

$$f = \frac{R^3}{J}\frac{P}{G}\varphi$$

Ist nun n die Zahl der Windungen der Feder, so ist $\varphi = 2\pi n$, und mithin:

$$f = \frac{R^3}{J}\frac{P}{G}2\pi n \quad \ldots\ldots\ldots \quad (34)$$

Beim kreisförmigen Drahtquerschnitt ist $J = \frac{\pi}{32}d^4$, und somit:

$$f = 64 \cdot n \cdot \frac{P}{G}\frac{R^3}{d^4} \quad \ldots\ldots \quad (35)$$

Es zeigt sich also die Verlängerung oder Verkürzung proportional der Kraft P; sie wächst ferner mit der dritten Potenz von R, so dass also eine Vergrösserung des Federhalbmessers sehr stark auf die Grösse der Dehnung einwirkt, während diese dagegen mit der vierten Potenz der Drahtdicke abnimmt, mithin z. B. eine Verdickung des Drahtes auf das Doppelte bei Erhaltung der übrigen Abmessungen die Verlängerung schon auf $^1/_{16}$ des ersten Werthes herabbringen würde. Diese Formel belehrt uns jedoch eigentlich ungenügend über den Grad der Dehnbarkeit und Zusammendrückbarkeit der vorliegenden Feder, indem sie gar nicht zeigt, wie die Dimensionenänderungen auf die eintretende Maximalspannung $\mathfrak{S}$ wirken, aus welcher doch einzig auf die Sicherheit und mithin die Güte der Konstruktion geschlossen werden kann. Um hierin Einsicht zu gewinnen, schlagen wir ein ähnliches Verfahren ein, wie oben bei den Blattfedern. Setzt man nämlich in die letzte Formel für P dessen Werth aus (29), so folgt sogleich als zweiter Ausdruck für die Verlängerung f:

$$f = \frac{64}{16}\pi \cdot n \cdot \frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{d^3R^3}{Rd^4}$$

oder

$$f = 4\pi n\frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{R^2}{d} \quad \ldots\ldots \quad (36)$$

Hieraus sehen wir, dass die Aenderungen von R und d lange nicht so stark auf f wirken, wenn man die Spannung $\mathfrak{S}$ unverändert halten will, als es oben bei Constantsetzung von P der Fall war. Theilt man noch die letzte Gleichung auf beiden Seiten durch R, so erhält man:

$$\frac{f}{R} = 4\pi n\frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{R}{d} \quad \ldots\ldots \quad (37)$$

Den Quotienten $\frac{f}{R}$ kann man die Dehnbarkeit und Zusammendrückbarkeit oder kürzer ebenso wie früher die Biegsamkeit der Feder nennen. Es zeigt sich hier eine auffallende Aehnlichkeit zwischen den Ausdrücken für die Biegsamkeit der Blattfedern und der Schraubenfedern, wie z. B. ein Vergleich mit Formel (6) zeigt. Auch hier ist wieder die Biegsamkeit proportional der Spannung $\mathfrak{S}$ und also auch deren grösstem Werth, welcher zum Tragmodul Z oder Z_1 in einem festen Verhältniss steht, und verkehrt proportional dem Elastizitätsmodul E, da G einen festen Bezug zu E hat. Ferner wird die Biegsamkeit durch das einfache Verhältniss $\frac{nR}{d}$ bemessen, ähnlich wie bei den Blattfedern die einfache Beziehung $\frac{l}{h}$ die Biegsamkeit beurtheilen lehrte. Man braucht also bei den Schraubenfedern nur den Halbmesser im Verhältniss zur Drahtdicke gross zu machen, und viele Windungen anzuwenden, um eine recht geschmeidige biegsame Feder zu erhalten. Welche Werthe von $\mathfrak{S}$ und G in die Rechnungen einzuführen sind, wird weiter unten erörtert werden.

Gehen wir nun zu dem rechteckigen Querschnitt des Federdrahtes über, so haben wir nur für J einen neuen Werth einzuführen. Dieser ist, wie oben vor Formel (30) gesagt wurde, $= \frac{b^3h^3}{3(b^2+h^2)}$. Bei Einführung desselben erhält man:

$$f = 6\pi n \cdot \frac{P}{G}\frac{R^3(b^2+h^2)}{b^3h^3} \quad \ldots\ldots \quad (38)$$

Hierin wiederum für P dessen Werth aus (30) eingesetzt, gibt:

$$f = 2\pi n\frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{R^2\sqrt{b^2+h^2}}{bh} \quad \ldots\ldots \quad (39)$$

oder, wenn man $h = ab$ setzt,

$$f = 2\pi n \cdot \frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{R^2}{b}\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}} \quad \ldots\ldots \quad (40)$$

Um den Ausdruck für die Biegsamkeit zu erhalten, theilen wir wieder auf beiden Seiten durch R, worauf sich ergibt:

$$\frac{f}{R} = 2\pi n\frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{R}{b}\sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}} \quad \ldots \quad (41)$$

Auch hier sind die Beziehungen wieder ziemlich einfach. Eine starke Biegsamkeit erfordert ausser einer grossen Windungszahl einen im Verhältniss zu b grossen Halbmesser R.

Beim quadratischen Drahtquerschnitt ist $a = 1$, also

$$\frac{f}{R} = \pi n\frac{\mathfrak{S}}{G}\frac{R}{b}\sqrt{8}.$$

Es entsteht hier nun die schon oben angeregte Frage, ob die Schraubenfedern mit kreisförmigem oder die mit rechteckigem Drahtquerschnitt besser seien, oder genauer gesagt, welche von beiden bei gleichen Forderungen am wenigsten Material verbrauche. Das Verhältniss der Dehnungen dieser beiden Federarten findet man, wenn man Gleichung (40) durch (36) theilt; es ergibt sich dabei, wenn man die auf die Feder mit vierseitigem Draht bezüglichen Buchstaben durch Markirung unterscheidet:

$$\frac{f_1}{f} = \frac{2\pi n_1}{4\pi n} \frac{\mathfrak{S}_1}{G_1} \frac{G}{\mathfrak{S}} \frac{d}{R^2} \frac{R_1^2}{b} \sqrt{\frac{1+a^2}{a^2}}$$

Bei gleichem Material und gleicher Sicherheit ist $G = G_1$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$, also

$$\frac{f_1}{f} = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{R_1^2}{R^2} \cdot \frac{d}{b} \sqrt{\frac{1+a^2}{4a^2}} \quad . \; . \; . \; (42)$$

Nun ist der Körperinhalt V der Feder mit rundem Draht $= 2\pi n R F$, und der der andern Feder $V_1 = 2\pi n_1 R_1 F_1$, mithin das Verhältniss der Inhalte, oder was gleichbedeutend ist, der Gewichte der Federn:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{n_1}{n} \frac{R_1}{R} \frac{F_1}{F}$$

Da nun die Dehnungen, welche die gleiche Kraft bei beiden hervorruft, gleich sein sollen, so hat man für $\frac{n_1}{n}$ dessen Werth aus (42) und zwar für $f_1 = f$ zu setzen. Ferner ist für das Verhältniss $\frac{F_1}{F}$ der in (33) gefundene Werth oder auch der nächstvorige einzuführen, und man hat also:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{R^2}{R_1^2} \frac{b}{d} \sqrt{\frac{4a^2}{1+a^2}} \cdot \frac{R_1}{R} \cdot \frac{4a}{\pi} \frac{b^2}{d^2}$$

Für $\frac{b}{d}$ ist hier dessen Werth aus (32) zu setzen, da derselbe unter Voraussetzung von $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$ entwickelt ist; somit hat man:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{R}{R_1} \cdot \frac{R_1}{R} \cdot \frac{3 \cdot \pi \cdot \sqrt{1+a^2}}{16a^2} \cdot \sqrt{\frac{4a^2}{1+a^2}} \cdot \frac{4a}{\pi}$$

was sich vereinfacht auf:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{3}{2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (43)$$

Das Verhältniss der Materialverwendungen in den beiden Federn ist hiernach unabhängig von R sowohl als von a.

Soll also eine cylindrische Schraubenfeder mit rechteckigem Drahtquerschnitt gleiche Belastung, gleiche Sicherheit und gleiche Dehnung mit einer runddrähtigen, aus dem gleichen Material gefertigten, ebenfalls cylindrischen Schraubenfeder haben, so bedarf sie stets $1\frac{1}{2}$ Mal so viel Material als dieser, gleichviel wie sich die Federhalbmesser oder die Querschnittseiten des vierseitigen Drahtes verhalten.

Die Materialien wurden in der vorstehenden Entwickelung gleich angenommen; sind diese auch noch verschieden, so ist $\mathfrak{S}_1$ nicht $= \mathfrak{S}$ und G_1 nicht $= G$; führt man die Rechnung mit Annahme dieser verschiedenen Coëfficienten durch, so erhält man

$$\frac{V_1}{V} = \frac{3}{2} \frac{G_1}{G} \frac{\mathfrak{S}^2}{\mathfrak{S}_1^2}$$

oder wenn man für $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_1$ die ihnen entsprechenden Tragmodel Z und Z_1 einsetzt:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{3}{2} \frac{G_1}{G} \frac{Z^2}{Z_1^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (44)$$

Hier kommen die Festigkeitcoëfficienten also genau in demselben Verhältniss in Betracht, wie bei den Blattfedern, wie ein Vergleich mit Formel (26) zeigt. Jedenfalls spricht Formel (43) ganz entschieden in den Fällen für die runddrähtige Feder, wo die Materialersparniss von Wichtigkeit ist.

Aus Formel (43) kann man schon den Schluss ziehen, dass alle runddrähtigen cylindrischen Schraubenfedern aus demselben Material, welche bei gleicher Belastung dieselbe Dehnung oder Kürzung f erfahren und dabei gleiche Sicherheit gewähren, ein und dasselbe Gewicht haben. Es ist dies in der That der Fall, gilt aber ebenso von den Schraubenfedern mit kantigem Draht, und, was noch interessanter ist, überhaupt von allen Federn gleicher Construction oder gleichen Systems. Der Beweis hiefür ist der folgende.

Nennt man F diejenige Durchschnittfläche einer Feder, welche bei Aufstellung ihrer Festigkeitgleichung in Betracht gezogen wird, also bei der Schraubenfeder die des Drahtes, bei der Blattfeder die an der Befestigungsstelle, und M dasjenige Hauptmaass der Feder, welches die Entfernung des Lastpunktes von dem Schwerpunkte jener Fläche angibt (z. B. bei der Schraubenfeder der Halbmesser R multiplizirt mit der Zahl n der Windungen, bei der Blattfeder die Länge l), so hat man als Ausdruck für den Körperinhalt V der Feder ganz allgemein:

$$V = \text{Const. } F \cdot M$$

und für den Inhalt V_1 einer zweiten Feder von derselben Construction aber andern Maassen

$$V_1 = \text{Const. } F_1 \cdot M_1.$$

(Die Constante ist z. B. bei den Schraubenfedern $= 2\pi$, bei den Rechteckfedern $= 1$, bei den Dreieckfedern $= \frac{1}{2}$ u. s. w.) Demnach ist das Verhältniss der Inhalte oder bei einerlei Material das der Gewichte jener Federn:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{F_1}{F} \frac{M_1}{M}$$

Nun weist die Mechanik nach, dass F immer $= p\frac{J}{a^2}$ worin p immer eine für jede Querschnittart verschiedene Constante ist, so dass man also auch hat:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{J_1}{J} \frac{a^2}{a_1^2} \frac{M_1}{M}$$

Ferner lautet die Festigkeitgleichung für eine Feder stets:

$$P = \frac{\mathfrak{S}}{q \cdot M} \frac{J}{a}$$

worin q wiederum eine von der Art des Querschnittes abhängige Constante bezeichnet; mithin hat man, wenn die zweite Feder mit P_1 belastet ist:

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1} \frac{J}{J_1} \frac{a_1}{a} \frac{M_1}{M}$$

woraus sich ergibt:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{P_1}{P} \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1} \frac{J}{J_1} \frac{M_1}{M}$$

Diesen Werth in die obige zweite Gleichung für $\frac{V_1}{V}$ eingeführt, gibt:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{P_1^2}{P^2} \frac{\mathfrak{S}^2}{\mathfrak{S}_1^2} \frac{J}{J_1} \frac{M_1^3}{M^3}$$

Nun haben wir ferner für die Senkung f des Lastpunktes in Folge der Belastung P allgemein:

$$f = \frac{PM^3}{rEJ} \text{ und } f_1 = \frac{P_1 M_1^3}{rE_1 J_1}$$

wobei r abermals eine von der Querschnittart abhängige constante Grösse vorstellt; man erhält also durch Division dieser Gleichungen:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{P}{P_1} \frac{M^3}{M_1^3} \frac{E_1}{E} \frac{J_1}{J}$$

woraus:

$$\frac{M_1^3}{M^3} = \frac{f_1}{f} \frac{P}{P_1} \frac{E_1}{E} \frac{J_1}{J}$$

Führen wir nun noch diesen Werth in die letzte Gleichung für $\frac{V_1}{V}$ ein, so heben sich die J und M, d. h. diejenigen Werthe, welche einzig noch Dimensionen der Federn enthalten, heraus, und es folgt:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{P_1}{P} \frac{f_1}{f} \frac{\mathfrak{S}^2}{\mathfrak{S}_1^2} \frac{E_1}{E} \quad \ldots \ldots (45)$$

eine allgemeine Gleichung, welche zeigt, dass das Verhältniss der Gewichte der beiden Federn (gleiches specifisches Gewicht bei beiden vorausgesetzt) ohne Kenntniss ihrer Dimensionen bestimmt werden kann, und nur von ihrer Materialgüte $\left(\frac{\mathfrak{S}^2}{E}\right)$ und ihrer Belastung und Senkung f abhängt, von welcher Gleichung Formel (26) z. B. nur ein besonderer Fall ist. Setzt man Belastung, Senkung des Lastpunktes, Material und Sicherheit bei beiden Federn gleich, so wird:

$$V_1 = V$$

d. h., wie auch immer man die Verhältnisse der Abmessungen der Federn wählen möge, sie fallen stets gleich schwer aus.*) Die Blattfedern für einen Eisenbahnwagen erhalten demnach, wenn man dasselbe Material verwendet, und die Federn so construirt, dass sie gleiche Sicherheit gewähren und sich bei gleichen Belastungen gleich viel biegen, stets dasselbe Gewicht, ob man ihnen viel oder wenig Blätter gibt, diese lang oder kurz, schmal oder breit, dick oder dünn mache. Wenn also Fabriken bei Lieferungen von Eisenbahnwagenfedern concurriren, so können sie, vorausgesetzt, dass sie die im II. Abschnitt entwickelten einfachen Bedingungen für die gleiche Festigkeit ihrer Construktionen gleich gut erfüllen, nur durch die Güte des angewandten Materials Erfolge erlangen. Die Güte des Materials, die sich durch den Coefficienten $\frac{\mathfrak{S}^2}{E}$ oder $\frac{Z^2}{E}$ bemisst, ist übrigens, wie schon im II. Abschnitt gezeigt wurde, von ganz bedeutendem Einfluss auf das Federgewicht.

Interressant ist auch die Folgerung aus Formel (45), dass bei einem und demselben Material das Gewicht der Feder der Belastung P und der Senkung f direkt proportional ist. Hätte man also bei allen Wagen einer Eisenbahn alle Federn von gleicher Construction und aus dem gleichen Material herzustellen, wendete man z. B. nur gussstählerne Blattfederwerke an, so könnte man das Verhältniss der Gewichte aller Federn einfach aus dem Verhältniss der Gewichte der beladenen Wagen und des vorgeschriebenen Spiels der Federn ermitteln. Bei Personenwagen ist das Federspiel ziemlich constant, etwa gleich 5 Centimeter. Bei diesen verhalten sich also die Federgewichte wie die Gewichte der beladenen Wagen. Im Mittel findet sich z. B. für die gussstählernen Federn für Personenwagen ein Gewicht von etwa 1 Procent der beladenen Wagen. Wiegt also ein solcher 360 Centner, so wiegen alle Federn (Blattfederwerke vorausgesetzt) 360 Pfund zusammen.

Wir kehren nun von dieser Verallgemeinerung der für die Schraubenfedern gefundenen Sätze wieder auf diese selbst zurück. Als eine aus dem oben Behandelten folgende Eigenthümlichkeit derselben verdient es bemerkt zu werden, dass in den Schraubenfedern mit rechteckigem Drahtquerschnitt die Lage des Querschnittes gegen die Federachse weder auf die Festigkeit noch auf die Biegsamkeit der Feder einen Einfluss übt, obgleich man beim ersten Anblick einen Unterschied anzunehmen geneigt sein möchte. In den betreffenden Formeln kommen nämlich b und h stets symmetrisch vor, so dass man sie, ohne die Werthe zu ändern, miteinander vertauschen darf. Es ist also für die Festigkeit und Biegsamkeit ganz gleichgültig, ob man die grössere Seite des Rechtecks mit der Federachse parallel stellt, wie in Fig. 24, oder ob man sie senkrecht dazu anbringt, wie in Fig. 25. Bei den Versuchen des Verfassers fand sich dies vollkommen bestätigt. In einer anderen Hinsicht aber, welche für die Praxis wichtig ist, bietet das Flach-Aufeinanderlegen der Windungen, wie in Fig. 25, den Vortheil, dass die Feder dann eine geringere Gesammtlänge, als bei der andern Anordnung und selbst als bei der runddrähtigen Feder erhält. Dies benutzt man nicht selten in der Praxis, indem man z. B. Federn aus flachgewalztem Messingdraht, den man so rollt, wie es Fig. 25 zeigt, herstellt. Braucht man auch dabei etwas mehr Draht als bei einer runddrähtigen Feder, so erreicht man doch dafür den genannten Vortheil, wie sich folgendermassen nachweisen lässt.

Zum Vergleich einer Feder aus rundem Draht mit einer andern, bei welcher der gleiche Draht flachgewalzt angewendet wird, und welche denselben Bedingungen wie jene entsprechen soll, setzen wir die Gesammtlänge der runddrähtigen Feder $= L$ und die der anderen $= L_1$. Nehmen wir nun der Einfachheit wegen an, bei beiden Federn lägen in unbelastetem Zustande die Gänge dicht aufeinander, so hätten wir $L = nd$, und $L_1 = n_1 b$, woraus:

---

*) Demjenigen, der sich der Formel für die Widerstandsfähigkeit der festen Körper gegen lebendige Kräfte erinnert, werden die Einfachheit und Eigenthümlichkeit der so eben gefundenen Formel, sowie der Formeln (43), (44) und (50) erklärlich sein. Man kann nämlich Formel (46) auch so schreiben:

$$Pf = \left(\frac{P_1 f_1 E_1}{V_1 \mathfrak{S}_1^2}\right) \frac{\mathfrak{S}^2}{E} V.$$

Hierin ist Pf die Arbeit der Kraft P während ihres Weges f; dabei ist Klammer, da sie nur Grössen enthält, welche an der zum Vergleich herangezogenen Feder vorkommen, als eine Constante zu betrachten. Es ist also dieser Ausdruck ähnlich dem bekannten, welcher besagt, dass die Arbeit Pf dem sogenannten „Arbeitsmodul" $\frac{\mathfrak{S}^2}{E}$ des Materials des angegriffenen Körpers und dessen Inhalt V proportional ist.

$$\frac{L_1}{L} = \frac{n_1 \cdot b}{n \cdot d}$$

Nun soll dieselbe Last bei beiden Federn die gleiche Dehnung hervorrufen; mithin haben wir in (42) $\frac{f_1}{f} = 1$ zu setzen, und haben dann daraus für unsern Fall, wenn wir auch $R = R_1$ voraussetzen:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{b}{d}\sqrt{\frac{4\alpha^2}{1+\alpha^2}}$$

und somit:

$$\frac{L_1}{L} = \frac{b^2}{d^2}\sqrt{\frac{4\alpha^2}{1+\alpha^2}}$$

Der Voraussetzung gemäss haben ferner die Drähte gleichen Querschnitt, indem ja der eine aus dem andern hergestellt wurde. Man hat deshalb nach der zu (33) leitenden Gleichung:

$$\frac{b^2}{d^2} = \frac{\pi}{4\alpha}$$

mithin endlich:

$$\frac{L_1}{L} = \frac{\pi}{4\alpha}\sqrt{\frac{4\alpha^2}{1+\alpha^2}} = 1{,}57\sqrt{\frac{1}{1+\alpha^2}}$$

Für alle Werthe von α, die grösser als 1,2 sind, fällt die Länge L_1 kleiner aus als L, und zwar kann die Ersparniss an Länge leicht ziemlich hoch gebracht werden. Bei einer von Herrn Mechanikus Goldschmidt in Zürich vor kurzem angefertigten grossen Federwaage waren z. B. Messingfedern aus flachgewalztem Draht angewandt, dessen Querschnitt 5,86 auf 2,2 Millimeter Grösse hatte. Hier betrug also α etwa 2,6 und somit:

$$\frac{L_1}{L} = 1{,}57\sqrt{\frac{1}{1+2{,}6^2}} = 0{,}56.$$

Die Federn fielen also nicht ganz $^6/_{10}$mal so lang aus, als sie bei Anwendung des runden Drahtes hätten werden müssen (gleiche mittlere Halbmesser in beiden Fällen vorausgesetzt). Dabei verlangten aber diese flachdrähtigen Federn, wie wir aus (43) wissen, $1^1/_2$mal so viel Draht, als die runddrähtigen gebraucht haben würden.

Eine für die Praxis sehr vortheilhafte Eigenschaft der Schraubenfedern lässt sich noch aus den Formeln für f, z. B. aus Formel (35) herauslesen. Man sieht nämlich aus derselben, dass die Verlängerung oder Verkürzung f direkt proportional ist der Zahl n der Windungen. Vermehrt oder vermindert man also n, so wird auch die Dehnung f, welche einer und derselben Kraft P zukommt, vermehrt oder vermindert. Es ist aber ganz leicht, die Aufhängung der Feder-Enden so einzurichten, dass man n verändern kann. Hiezu sind z. B. die in Fig. 23 angegebenen Einrichtungen schon ganz brauchbar, indem man nur die Anhänge-Oesen etwas mehr oder weniger auf die Feder hinaufzuschrauben braucht, um n abzuändern. Diese Bequemlichkeit im Einstellen (Justiren) der Schraubenfeder lässt sich häufig gut benutzen, z. B. bei der Anfertigung der Federwaagen. Hat man für eine solche auf Grund der Berechnung oder auch nach einem Muster eine Feder so angefertigt, dass die Streckung pro Einheit der Belastung (also pro Kilogramm oder pro Pfund) ungefähr auf ein gewisses Mass, z. B. auf 1 Millimeter, auskommt, so kann man unbedenklich eine wirkliche Millimetertheilung zur Skala nehmen. Man hat dann nur beim letzten Einstellen der Feder die eine Aufhänge-Oese so lange auf- oder abwärts zu schrauben, bis die Theilung wirklich genau zutrifft.

Aus demselben Grunde braucht man es mit dem in die Rechnung einzuführenden Drehungsmodul G nicht so genau zu nehmen, dass man z. B. jedesmal besondere Versuche über das zu gebrauchende Material zu Rathe ziehen müsste, sondern kann recht gut die Mittelwerthe dieser Zahl benutzen, welche frühere Versuche geliefert haben, indem man mittelst des Einstellens doch schliesslich genau zu dem erwünschten Endergebniss gelangen kann. Was nun die in die Rechnungen einzuführenden Festigkeitcoëfficienten selbst anlangt, so ist darüber das Folgende zu sagen. Man thut wohl, für die Maximalspannung $\mathfrak{S}$ nie grössere, für die Feder-Waagen lieber etwas kleinere Werthe einzusetzen, als die halben Zug-Tragmodel, deren Werthe schon oben, S. 3, für eine Reihe von Materialien in einer Tabelle gegeben wurden. Der Drehungsmodul G beträgt nach Theorie und Versuchen sehr nahe $^2/_5$ des Elasticitätsmoduls E, so dass man die in jener Tabelle gegebenen Werthe von E nur mit 0,4 zu multipliciren hat, um die entsprechenden Werthe von G zu erhalten. — Zur bessern Verdeutlichung des Besprochenen mögen jetzt einige Zahlenbeispiele folgen.

1. Beispiel. Es sei die oben S. 4 und 6 berechnete stählerne Blattfeder durch eine cylindrische Schraubenfeder aus rundem Messingdrahte und von 25^{mm} Halbmesser zu ersetzen. Gesucht: die Anzahl der Windungen und die Dicke des Drahtes. — Bei ganz geöffneter Klappe soll der Zug der Feder nach der Aufgabe $= 10^k$ sein. Setzen wir fest, dass dabei die Maximal-Spannung $\mathfrak{S}$ in der Feder 6^k pro Quadratmillimeter betragen solle (nach der Tabelle S. 3 ist der Tragmodul für Messingdraht $= 14^k$), so haben wir nach (29):

$$10 = \frac{6 \cdot 3{,}14..}{16} \cdot \frac{d^3}{25}$$

woraus

$$d = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 16 \cdot 25}{6 \cdot 3{,}14}} = 5{,}96^{mm}$$

wofür wir, um abzurunden, 6^{mm} nehmen wollen. Zur Auffindung der Zahl n der Windungen benutzen wir Formel (37). Schon oben, S. 4, wurde ermittelt, dass die ganze Dehnung der Feder 100^{mm} betragen solle; es ist also in (37) für $\frac{f}{R}$ zu setzen: $\frac{100}{25} = 4$. Ferner ist nach der Tabelle S. 3 für Messing $E = 10000$, mithin $G = 4000$ zu setzen. Die nun bekannten Grössen in (37) eingeführt, gibt:

$$4 = 4 \cdot 3{,}14 \cdot n \cdot \frac{6}{4000} \cdot \frac{25}{6}$$

woraus:

$$n = \frac{4000}{25 \cdot 3{,}14} = 51$$

was bei ziemlich dichter Lage der Gänge im unbelasteten Zustande einer Gesammtlänge von etwa 32 Centimeter entspräche. Sollte dies uns im vorliegenden Falle noch zu viel Raum beanspruchen, so hätten wir entweder R

grösser zu nehmen, oder ein stärkeres Material anzuwenden. Bei gehärtetem Stahldraht würde man annehmen dürfen: $\mathfrak{S} = 40^k$, und $G = {}^2|_5 \cdot 20000 = 8000^k$. Damit erhielte man:

$$d = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 16 \cdot 25}{40 \cdot 3{,}14}} = 3{,}17^{mm}$$

und

$$n = \frac{4 \cdot 40 \cdot 625 \cdot 3{,}14}{317 \cdot 8000} = 25{,}4.$$

Dies ergäbe für den unbelasteten Zustand eine Gesammtlänge von nur etwa 10 Centimeter.

2. Beispiel. Bei einer Federwaage von 80^k Tragkraft soll eine cylindrische Schraubenfeder aus rundem Gussstahldraht von 6^{mm} Dicke angewandt werden; es wird verlangt, dass die Theilstriche, welche den einzelnen Kilogrammen entsprechen, 2^{mm} auseinander liegen sollen; die Feder wird gehärtet. Gesucht: die Zahl der Windungen und der Halbmesser R der Feder.

Aus Formel (29) hat man:

$$R = \frac{3{,}14 \cdot 40 \cdot 6^3}{16 \cdot 80} = 21{,}2^{mm}$$

wobei $\mathfrak{S} = 40$ eingeführt wurde. Zur Aufsuchung von n liefert uns Formel (35):

$$n = \frac{f}{64} \frac{G}{P} \frac{d^4}{R^3}$$

Hierin ist für $P = 1$, $f = 2$ zu setzen, damit der Vorschrift über die Entfernung der Theilstriche genügt werde; ferner ist für G gemäss der Tabelle S. $3\frac{2}{5} \cdot 25000 = 10000$ zu nehmen, und $d = 6$, $R = 21{,}2$ einzuführen, wodurch man erhält:

$$n = \frac{2 \cdot 10000 \cdot 1296}{64 \cdot 9528{,}13} = \text{nahe } 43.$$

Die Feder erhält also 43 Windungen und etwas über 21^{mm} Halbmesser. In der Praxis wendet man bei so starken Federwaagen in der Regel zwei ineinanderliegende Schraubenfedern an. Damit beide dann gleiche Sicherheit erhalten, muss die Drahtdicke der inneren Feder eine geringere sein, als die der äusseren, und auch die Windungsanzahl danach gerichtet werden. Doch dürfte wohl das Besprochene genügende Anleitung dazu geben, auf welche Weise man zwei Schraubenfedern von gleicher Dehnung, aber verschiedenem R und n zu berechnen hat, wenn in ihnen stets gleiche Spannungen $\mathfrak{S}$ entstehen sollen.

3. Beispiel. Für den Buffer eines Eisenbahnwagens ist eine cylindrische Schraubenfeder aus Gussstahl anzufertigen. Sie soll im zusammengedrückten Zustand einen Widerstand von 2000^k leisten, und sich bei dieser Belastung um 40^{mm} unter ihre Normallänge verkürzen; der mittlere Halbmesser betrage 50^{mm}. Gesucht: Die Zahl der Windungen und die Dicke des anzuwendenden Rundstahles.

Wenn wir eine, übrigens nicht hoch gegriffene, Maximalspannung von 50^k eintreten lassen, so erhalten wir aus (29):

$$2000 = \frac{50 \cdot 3{,}14}{16} \cdot \frac{d^3}{50}$$

woraus

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 2000}{3{,}14}} = 22^{mm} \text{ nahe.}$$

Ferner hat man noch (36):

$$n = \frac{f}{4\pi} \frac{G}{\mathfrak{S}} \frac{d}{R^2} = \frac{40}{4 \cdot 3{,}14} \cdot \frac{10000}{50} \cdot \frac{22}{2500} = 5{,}6.$$

Die Gänge müssen im unbelasteten Zustand so weit aus einander liegen, dass die Summe der Zwischenräume noch 50^{mm} ausmacht. Dies ergibt eine Gesammtlänge von etwa 200^{mm}, was vielleicht etwas hohe Bufferbüchsen abgeben möchte. Hier fordern die Schraubengänge den grössten Theil des Raumes, da sie sich im zusammengepressten Zustand der Feder aufeinanderlegen.

Dieser Umstand ist manchmal etwas hinderlich; er kommt aber nicht vor, wenn man die Schraubengänge statt um einen Cylinder, um einen nicht allzu spitzen Kegel windet; man erhält alsdann eine zweite Art von Schraubenfedern, die man Kegelschraubenfedern oder kürzer Kegelfedern nennen kann. Die Theorie derselben bietet manche interessante Verschiedenheiten von der der Cylinderfedern dar, weshalb sie hier in Kürze besprochen werden soll. Ihre Grundformeln sind in den zu Anfang entwickelten allgemeinen Gleichungen (27) und (28) ebenfalls enthalten.

Fig. 26 zeigt eine Kegelfeder mit rundem Drahtquerschnitt, der an jeder Stelle von derselben Grösse sein möge; die Kräfte P_1P seien wie oben in der Achse der Feder angebracht. Für jeden Querschnitt des Drahtes, der mit AA_1 in derselben Ebene liegt, gilt nun wieder die Gleichung (28), wobei ϱ den Abstand des Schwerpunktes des Querschnittes von AA_1 bezeichnet. Bei constantem Querschnitt ist auch $\frac{J}{a}$ constant, mithin aber die Spannung $\mathfrak{S}$ veränderlich; ihren grössten Werth wird diese Spannung da haben, wo ϱ am grössten ist und dies ist an der Grundfläche des Kegels der Fall, wo $\varrho = R$. Versteht man daher unter $\mathfrak{S}$ ausschliesslich die grösste in der ganzen Feder vorkommende Spannung, so hat man als Festigkeitgleichung für die Kegelfeder mit constantem Drahtquerschnitt:

$$P = \frac{\mathfrak{S}}{R} \frac{J}{a}$$

Für den Kreisquerschnitt ist $\frac{J}{a} = \frac{\pi}{16} d^3$, mithin wieder

$$P = \frac{\mathfrak{S}\pi}{16} \frac{d^3}{R} \quad \ldots\ldots \quad (47)$$

Für den rechteckigen Querschnitt ist für $\frac{J}{a}$ wie früher zu setzen: $\frac{b^2h^2}{3\sqrt{b^2+h^2}}$, also hier:

$$P = \mathfrak{S}\frac{b^2h^2}{3R\sqrt{b^2h^2}} = \frac{\mathfrak{S}b^3a^2}{3R\sqrt{1+a^2}} \quad \ldots \quad (48)$$

Diese Gleichungen stimmen also ganz mit denen überein, welche wir oben für die Cylinderfedern fanden; ein Hauptunterschied besteht aber zwischen den Festigkeiten beider Federarten, der nämlich, dass die so eben behandelten Kegelfedern keine Körper von gleicher Festigkeit sind, wie die cylindrischen, sondern bei dem

grössten ϱ, also hier bei $\varrho = R$ einen sog. gefährlichen Querschnitt haben. Kegelfedern mit rechteckigem Drahtquerschnitt sind die häufig bei den Buffern angewandten Schneckenfedern, deren Fig. 28 eine zeigt. Man macht sie gewöhnlich von constantem Gangquerschnitt. Hier könnte man sich auch die Bedingung stellen, die Querschnitte von dem grössten Halbmesser aus so abnehmen zu lassen, dass in allen dieselbe Maximalspannung $\mathfrak{S}$ einträte; allein die sich ergebende Verjüngung fällt so wenig einfach aus, und dann würde durch Anbringung derselben auch wieder die Anfertigung so sehr erschwert, dass man wohl davon absehen kann, obschon eine ziemlich grosse Materialersparniss dabei zu erzielen wäre. Die Kegelfedern haben nun erstens den Vortheil, dass sich ihre Gänge beim Zusammendrücken ineinanderschieben, so dass man oft sehr an Raum dadurch gewinnt, und zweitens dass man sie aus flachen Stahlbändern leicht herstellen kann. Die Kegelfedern aus rundem Draht finden bekanntlich als Polsterfedern eine sehr zahlreiche Anwendung. Hier wird ihre Eigenschaft, die Gänge in einander zu schieben, recht nützlich, indem sie sich in Folge dessen auf eine sehr geringe Höhe zusammenpressen lassen.

Was die Verlängerung oder Verkürzung f angeht, so lässt sich dieselbe auch aus Formel (28) ableiten. Freilich aber sind die Vernachlässigungen der Schraubensteigungswinkel hier fühlbarer als bei den Cylinderfedern, so dass dieselben mit in Rechnung gezogen werden müssen, wenn man ein genaues Ergebniss erhalten will. Hier würde nicht wohl der Ort sein, auf diese weit verwickelteren Rechnungen, mittelst deren sich übrigens f sehr genau ermitteln lässt, einzugehen. Es möge hier genügen, dass bei den Federn mit constantem Gangquerschnitt der Verlängerung oder Verkürzung f zwischen $1/3$ und $1/4$ von derjenigen fällt, welche einer Cylinderfeder vom gleichen Gangquerschnitt und einem Halbmesser gleich dem der Kegelgrundfläche zukommt, vorausgesetzt, dass der Kegel bis nahe zu seiner Spitze ausgeführt ist. In Folge der Veränderlichkeit des Steigungswinkels fällt auch f nicht ganz proportional P aus, sondern nimmt bei starker Zusammenpressung etwas langsamer zu als P.

Im Ganzen ist zu erwarten, dass die Schraubenfedern in grösserem Massstab im Maschinen- und namentlich beim Eisenbahnwesen immer mehr Anwendung finden werden. Zunächst sind die Schraubenfedern sehr leicht anzufertigen, jedenfalls sehr viel leichter, als die Blattfederwerke. Man könnte dieselben nämlich um schraubenförmig geschnittene Kaliber wickeln, bei welchen die Gänge oben und unten für einen Theil einer Umdrehung ohne Steigung ausliefen, um für die Feder ebene Enden zu erhalten. Die Härtung könnte dann sogleich vorgenommen werden. Die Blattfederwerke dagegen müssen aus verschieden langen Stücken zusammengesetzt werden, welche noch besonders vorgerichtete Enden erhalten, bei denen es Bearbeitung und Materialverlust gibt; dann werden sie gesprengt, gebohrt und mit der Anhängeöse versehen, und können darauf erst gehärtet werden. Sie erfordern also weit mehr Bearbeitung als jene. Sodann sind die Schraubenfedern sehr leicht an ihrem Bestimmungsort anzubringen, wo sie weit einfachere Befestigungsvorrichtungen erheischen, als die Blattfederwerke. Dabei sind sie wenigstens ebenso dauerhaft als diese, da ihre Beanspruchung ohne Reibungen und ohne die Möglichkeit einer Verschiebung vor sich geht, wenn man sie in runde Büchsen, die man behufs der Beobachtung theilweise offen lassen kann, einsetzt. Endlich aber bedürfen sie weit weniger Material als die Blattfedern. Diese Umstände zusammengenommen, und vor allem der letzte werden den Schraubenfedern bei der Wichtigkeit der durch sie entstehenden Kosten sicherlich bald bei Bahngesellschaften und Fabrikanten Eingang verschaffen; denn es handelt sich hier bei grossen Wagenanschaffungen sogleich um Tausende. Der Beweis des geringen Materialverbrauches der Schraubenfedern gegenüber den besten Blattfederwerken möge den Schluss dieses Abschnittes bilden.

Der Körperinhalt eines Blattfederwerkes, welches nach den im II. Abschnitt gefundenen Grundsätzen regelrecht, also durchaus sparsam, gebaut ist, beträgt für jeden der beiden aus dem Federgehäuse hervorragenden Schenkel bei n Blättern von der Dicke h, der Länge l und der Breite b:

$$V = \frac{nbhl}{2}$$

und der Inhalt V_1 einer cylindrischen runddrähtigen Schraubenfeder von n_1 Gängen:

$$V_1 = n_1 \cdot 2\pi \cdot Rd^2\frac{\pi}{4}$$

wenn der Federhalbmesser $= R$ und die Drahtdicke $= d$ ist. Man hat somit:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{n_1}{n}\,\pi^2\,\frac{R}{l}\,\frac{d^2}{bh} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad , \quad (49)$$

Nun haben wir jede Federhälfte durch eine Schraubenfeder zu ersetzen. (Man könnte auch das ganze Federwerk und nicht jede Hälfte durch eine einzige Schraubenfeder, welche unmittelbar über dem Zapfenlager läge, ersetzen; es würde dabei dasselbe Ergebniss herauskommen, welches wir jetzt erhalten werden.) Es wird also die Gleichung (49), wenn man in dieselbe diejenigen Beziehungen zwischen den Federabmessungen einführt, welche aus den, beiden Federn gemeinschaftlichen Bedingungen abzuleiten sind, den gesuchten Vergleich liefern.

Beide Federn müssen zunächst in Folge ihrer Belastung P gleiche Senkungen f der Angriffpunkte der Kraft erfahren; es folgt deshalb aus (22) und (36):

$$\frac{\mathfrak{S}}{E}\,\frac{l^2}{h} = 4\pi n_1 \frac{\mathfrak{S}_1}{G}\,\frac{R^2}{d}$$

Da wir gleiches Material und gleiche Sicherheit voraussetzen wollen, so ist $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$, $G = {}^2/_5 E$, mithin erhalten wir aus der letzten Gleichung:

$$\frac{l^2}{h} = 10 \cdot \pi \cdot n_1 \frac{R^2}{d}$$

also:

$$n_1 = \frac{1}{10 \cdot \pi} \cdot \frac{l^2}{R^2} \cdot \frac{d}{h}$$

Dieser Werth könnte bei einer wirklich vorzunehmenden Ersetzung eines Blattfederwerkes durch zwei Schraubenfedern aus dem gleichen Material ohne weiteres benutzt werden, um bei angenommenem R und d die Zahl der Windungen, welche man den Schraubenfedern zu geben

hätte, zu ermitteln. Setzt man zunächst diesen Werth in (49) ein, so ergibt sich:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\pi}{10 \cdot n} \frac{l}{R} \frac{d^3}{bh^2}$$

Nun liefert uns noch der Umstand, dass beide Federn gleich stark belastet sind, mittelst (20) und (29) die Gleichung:

$$\frac{\mathfrak{S} n b h^2}{6l} = \frac{\mathfrak{S}_1 \pi}{16} \frac{d^3}{R}$$

woraus, da wiederum $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$ zu setzen ist:

$$\frac{d^3}{bh^2} = \frac{16n}{6\pi} \frac{R}{l}$$

Setzen wir nun endlich diesen Werth in die letzte Formel für $\frac{V_1}{V}$ ein, so erhalten wir:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{16 \cdot \pi}{6 \cdot 10 \cdot \pi} = \frac{4}{15}$$

oder:

$$V_1 = \frac{4}{15} V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

Auch hier also verschwinden wieder die Verhältnisse der Federabmessungen sämmtlich aus der Rechnung, so dass das Verhältniss der Gewichte ein constantes ist. Es bedürfen nach dieser Ermittlung die cylindrischen runddrähtigen Schraubenfedern, welche denselben Bedingungen, wie die Blattfederwerke genügen sollen, nur $\frac{4}{15}$ oder etwa 27 Procent des Materials, welches die Blattfederwerke beanspruchen, gleiches Material bei beiden vorausgesetzt. Dieses Verhältniss ist zu günstig, als dass man es unberücksichtigt lassen dürfte. Bringt man die Verringerung der Bearbeitungskosten, welche oben besprochen wurde, gar nicht einmal in Anschlag, so ergäbe das Gefundene eine Ersparniss von etwa 250 Franken auf einen 6räderigen Personenwagen. Man rechne auch nur 200 Franken, so würde auf 100 Wagen die Summe von 20,000 Franken, also etwa der Preis eines vollständigen, fein eingerichteten Personenwagens erspart. Es bedarf wohl kaum mehr als dieser Anregung, um die Schraubenfedern beim Eisenbahnwagenbau in allgemeinere Aufnahme zu bringen.

IV. Die Spiralfedern.

Die spiralförmig gewundenen Federn finden bekanntlich ihre Hauptanwendung in den Uhren, wo sie zweierlei Verwendung finden, nämlich als Treibfedern und als Unruhfedern. Die Art ihrer Wirksamkeit unterscheidet sich dadurch sehr deutlich von den bisher besprochenen Benutzungen der Elastizität, dass sie Achsendrehungen hervorzubringen oder anzustreben haben, während die bisher behandelten Federn in mehr oder weniger gerader Richtung ihre Kraft auszuüben bestimmt sind. Die Achsendrehungskräfte, welche die Uhren beanspruchen, sind fast immer klein, namentlich bei den Unruhfedern, so dass jedenfalls die Spiralfedern meistens in kleinem Massstab ausgeführt werden; doch wendet auch der Maschinenbau nicht selten Spiralfedern an, namentlich leistet ihm eine besondere Art derselben, die um ihre Achse verwundene Schraubenfeder, manchmal gute Dienste. Sowohl wegen dieser Anwendungen in grösserem Massstab, als wegen der ersterwähnten wird es von Interesse sein, die Theorie der Spiralfeder hier anzuschliessen. Kennt auch der Federnfabrikant sowohl als der Uhrmacher die Eigenschaften der Spiralfedern, so vermag ihm doch diese Theorie vielleicht noch manche Aufschlüsse zu geben, zu denen ihn das nicht durch mathematische Betrachtungen unterstützte Nachdenken unmöglich führen kann; für das Verständniss der Theorie der Uhren ist ohne Zweifel die Federtheorie unentbehrlich. Was ferner den Maschinenbau in dieser Hinsicht betrifft, so dürfte ihm die Kenntniss der Theorie der Spiralfeder insofern von Nutzen sein, als er diese Federn vielleicht häufiger in Anwendung bringen wird, als bisher, wenn er von ihrer Wirkungsweise eine bestimmtere Anschauung erhält, und ihm der Weg zur Berechnung ihrer Abmessungen gezeigt wird.

Es ist dem Verfasser nicht bekannt, ob schon vor ihm Theorien der Spiralfedern aufgestellt worden sind, doch darf man dies wohl als wahrscheinlich ansehen, da man bei der Theorie der Uhren die ihrer Federn zu nothwendig bedarf, um sie unberücksichtigt lassen zu können. Die Theorie, welche im Nachfolgenden zu geben versucht wird, ist als nicht schwierig zu bezeichnen, indem man die Wirkungsweise der Spiralfeder auf die in der Festigkeitlehre geläufigen Anschauungen zurückführen kann. In Folge dessen ist es nicht schwer, sich von der Wirkungsweise der vorliegenden Federn eine klare Vorstellung zu machen. Für die Festigkeitlehre endlich bildet diese Theorie einen in sofern gewiss interessanten Beitrag, als sie wiederum einige als solche nicht bekannte Körperformen von gleicher Festigkeit nachweist.

Fig. 29 stellt eine Spiralfeder dar. Ihr inneres Ende B ist auf einem Cylinder OB befestigt, der so angebracht sein möge, dass er sich um seine Achse drehen, aber nicht verschieben kann. Das äussere Ende C der Feder ist mit einem Gelenkstücke CD in Verbindung, dessen Drehpunkt D festgehalten sei; den Zweck dieses Gelenkes besprechen wir später. Mit OB ist ein fester Kreis K verbunden, an dessen Umfang wir eine Kraft P tangential angreifend denken. Diese bringt dadurch eine Verwindung der Feder hervor. Es sei durch dieselbe ein Punkt des Kreises K, der anfänglich in p lag, nach q gekommen, so ist der Bogen pq der Weg des Lastpunktes, welchen wir früher mit f bezeichneten. Durch die Verdrehung um pq wird die Krümmung der Feder verändert, und es entstehen dadurch Spannungen in ihren Querschnitten, welche mit der Kraft P ins Gleichgewicht treten. Es ist nun hier wieder zweierlei zu suchen: die Bedingung für das Gleichgewicht zwischen P und den innern Kräften der Feder, welche deren Urform wieder herzustellen streben, und die Abhängigkeit des Bogens $pq = f$ von P sowohl, als von dem Material und den Abmessungen der Feder.

Da die Achse des Cylinders OB sich nicht verschieben kann, so strebt die Kraft P nur, dieselbe mit dem statischen Moment PA zu drehen, wenn A der Abstand des Angriff-

punktes der Kraft P von O oder der Halbmesser des Kreises K ist. Diesem Moment widersteht die Festigkeit jedes einzelnen Querschnittes der Feder. Betrachten wir z. B. den Querschnitt bei m, der in einer durch die Achse von OB gelegten Ebene liegt, so muss das Moment des dort eintretenden Widerstandes gleich dem Moment PA sein. Liegt der Schwerpunkt des Schnittes m um x von O entfernt, so hat man, wenn die dort normal zu mO wirkende Kraft Q genannt wird:

$$Qx = PA$$

oder:

$$Q = \frac{PA}{x}$$

Es erfährt also jeder Querschnitt der Feder (unter Querschnitt immer solche Schnitte verstanden, deren Ebenen durch die Achse von OB gehen) eine Beanspruchung auf Zugfestigkeit, welche dem radialen Abstand des Querschnittes verkehrt proportional ist. Wäre die Kraft P umgekehrt gerichtet, so würde die Beanspruchung eine solche auf Druckfestigkeit sein. Allein es ist nicht dies die einzige und bei weitem nicht die Hauptwirkung der Kraft P. Es sucht nämlich die Kraft Q auch noch die Feder zu biegen. Errichtet man auf Om das Loth On und betrachtet die Einwirkung von Q auf den Querschnitt bei n, so sieht man, dass Q die Feder bei n zu biegen sucht, und zwar ist der Hebelarm der Kraft Q das von m auf die Richtung von Q zu fällende Loth, welches hier $= Om$, also $= x$ ist. Es muss also nach den Gesetzen der Biegungsfestigkeit sein:

$$Qx = \mathfrak{S}\frac{T}{a}$$

wenn man unter T wieder wie bei den Blattfedern das Trägheitmoment des Querschnittes n, unter $\mathfrak{S}$ die stärkste in ihm vorkommende Spannung, und unter a den Abstand seiner stärkst gespannten Faser von seiner neutralen Achse versteht. Setzt man nun für Q dessen oben gefundenen Werth in die letzte Gleichung, so erhält man:

$$\mathfrak{S}\frac{T}{a} = PA \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

d. h. das statische Moment der jeden einzelnen Querschnitt biegenden Kraft ist constant und gleich dem Moment der die Feder verdrehenden Kraft. Gegen diese biegende Kraft kann man die Zug- oder Druckkraft Q, welche ausserdem noch jeden Querschnitt beansprucht, als sehr klein vernachlässigen, und zwar mit demselben Recht, wie dies bei den bisher behandelten Federn mit den ähnlich auftretenden kleinen Kräften geschah. Bei Begehung dieser Vernachlässigung ist in Formel (51) bereits die Festigkeitgleichung unserer Feder gefunden. Ist der Querschnitt der Feder, wie es in der Regel der Fall ist, ein Rechteck von der (in radialer Richtung gemessenen) Höhe h und der Breite b, so so ist $T = \frac{bh^3}{12}$ und $a = \frac{h}{2}$, und man hat:

$$P = \frac{\mathfrak{S}bh^2}{6A} \quad \ldots\ldots \quad (52)$$

wobei als Maximalwerth von $\mathfrak{S}$ der Zugtragmodul Z einzuführen ist, von welchem für neu zu construirende Federn wieder am besten etwa die Hälfte genommen wird. Ist T constant, d. h. der Querschnitt der Feder überall derselbe, so ist $\mathfrak{S}$ ebenfalls constant, d. h. die Feder ist ein Körper von gleicher Biegungsfestigkeit. Indem man für h die Dicke der Feder nimmt, vernachlässigt man den Steigungswiukel der Spirale; allein dies kann man unbedenklich thun, da dieser Winkel gewöhnlich sehr klein ist.

Es handelt sich nun darum, die Grösse $pq = f$ zu bestimmen. Wenn die Feder um den Bogen pq verdreht wird, so geht die Spirallinie, welche anfänglich die Grundform bildete, in eine andere Spirale über, und zwar werden bei der in Fig. 29 gezeichneten Richtung der Kraft P die Krümmungen stärker, es nähern sich alle Punkte der Feder dem Mittelpunkte. Dasselbe sucht auch der Punkt C zu thun, indem er aus seiner anfänglichen Stellung C_0 nach O hin rückte. Um ihm dies zu gestatten, wurde das Gelenkstück CD angebracht. Nicht immer wird bei den praktischen Ausführungen der Spiralfedern das äussere Ende so befestigt, dass ihm jene radiale Bewegung möglich ist, sondern z. B. der Punkt C oft geradezu in einem festen Abstand von O befestigt. Es treten dadurch in dem Endstücke der Feder noch andere Spannungen auf, als wir so eben betrachteten, welche durch das im Nachfolgenden zu entwickelnde Gesetz nicht ausgedrückt werden würden. Das angebrachte Gelenkstück vermittelt diesen Umstand, so dass die genannten Spannungen so klein ausfallen, dass wir sie vernachlässigen können, namentlich, wenn die Zahl der Windungen der Feder nicht zu klein ist. Zu den Verbesserungen, welche in neuerer Zeit an den Unruh-Uhren gemacht wurden, gehören auch eine Reihe von Befestigungsarten des äusseren Feder-Endes bei der Unruhfeder, die man auch im Allgemeinen neuerdings weit länger macht, als sonst. Eine dieser Befestigungsarten (die Bréguet'sche) ist z. B. in Fig. 30 angedeutet; hier ist das Federende wieder nach der Mitte zu gebogen (coudé, recourbé) und in der Nähe der Unruhspindel befestigt. Hiedurch wird demselben ebenfalls die Freiheit gegeben, bei dem Spielen der Feder gehörig nachzugeben.

Indem wir also jenen Umstand vernachlässigen, betrachten wir die Feder so, als ob für alle Stellen die obige Gleichung streng richtig wäre. In Fig. 31 sei nun $tuvw$ ein kleines Stück der Feder, NN_1 die neutrale Schicht, tu und vw zwei benachbarte Schnittflächen. Im unbelasteten Zustand sei die Feder an dieser Stelle nach dem Halbmesser $nz = n_1z = \varrho$ gekrümmt, und es sei der Winkel $nzn_1 = d\Theta$, so ist das Längenelement $nn_1 = ds$ der Feder.

$$ds = \varrho d\Theta \quad \ldots\ldots \quad (53)$$

Ertheilen wir nun der Feder eine stärkere Biegung, so dreht sich der Querschnitt tu gegen vw um seine neutrale Achse, deren Projection man in n sieht. Der Krümmungshalbmesser ϱ gehe dabei in $nz_1 = \varrho_1$ über, während der Punkt t (unter der Voraussetzung, dass die Schnittfläche eben bleibt) nach t_1 in die Verlängerung von z_1n rückt. Nennt man nun den Winkel t_1zt, um welchen t gegen vz verdreht wurde, $d\omega$, so kann man zunächst, da der Unterschied zwischen ϱ und ϱ_1 nicht gross ausfällt, $\angle t_1z_1v = d\Theta + d\omega$ setzen, und hat dann auch sehr annähernd:

$$nn_1 = ds = \varrho_1(d\Theta + d\omega)$$

und somit wegen (53):

$$\varrho_1(d\Theta + d\omega) = \varrho d\Theta,$$

woraus:

$$d\omega = \left(\frac{\varrho}{\varrho_1} - 1\right)d\Theta = \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right)\varrho d\Theta \quad . \quad . \quad (54)$$

Wäre $\varrho_1 > \varrho$ gewesen, so würde die letzte Klammer lauten: $\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_1}\right)$

Nun weist die Lehre von der Biegungsfestigkeit nach, dass wenn ein Stab, dessen Querschnitte das Trägheitmoment T haben, aus einer Krümmung vom Halbmesser ϱ in eine andere vom kleineren Halbmesser ϱ_1 übergeführt werden soll, sich für das biegende Moment PA die folgende Gleichung ergibt:

$$\frac{PA}{TE} = \left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right)\frac{\varrho}{\varrho + a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

woraus:

$$\left(\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho}\right) = \frac{PA}{TE}\,\frac{\varrho + a}{\varrho}$$

Diesen Werth in (54) eingesetzt, gibt:

$$d\omega = \frac{PA}{TE}(\varrho + a)\,d\Theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

welches die Differenzialgleichung für den Winkel ω ist, um welchen die Kraft P unsere Feder verdreht. Um das Differenzial von $pq = f$ zu finden, haben wir nur $d\omega$ mit A zu multipliciren. ϱ bezeichnet in (56) den Krümmungshalbmesser der Feder im unbelasteten Zustande. Kennen wir also das Gesetz der Spirallinie, nach welcher die Feder geformt ist, oder legen wir ein solches Gesetz als bestehend zu Grunde, so können wir die letzte Gleichung integriren. Wir wollen hier annehmen, die Feder sei nach einer Kreis-Evolvente vom Grundkreishalbmesser r (Fig. 32) gerollt, so hat man für den Krümmungshalbmesser ϱ beim Abwicklungswinkel Θ:

$$\varrho = r\Theta, \text{ also } d\Theta = \frac{d\varrho}{r}$$

Diesen Werth in (56) eingesetzt, gibt, wenn man die Multiplication mit A ausführt:

$$A\omega = f = \frac{PA^2}{rTE}\int(\varrho + a)\,d\varrho.$$

Die Grenzen, zwischen denen zu integriren ist, sind der Krümmungshalbmesser bei C und der bei B, Fig. 29, beides im unbelasteten Zustand der Feder. Setzt man $CO = R$, und $BO = R_0$, so hat man für die zugehörigen Krümmungshalbmesser ϱ_0 und ϱ_1:

$$\varrho_0 = \sqrt{R^2_0 - r^2} \quad \text{und} \quad \varrho_1 = \sqrt{R^2 - r^2}$$

Diese Werthe als Integrationsgrenzen in die letzte Gleichung eingeführt und die Quadrirungen ausgeführt, gibt:

$$f = \frac{PA^2}{rTE}\,\frac{R^2 - r^2 + 2a\sqrt{R^2 - r^2} + a^2 - R_0^2 + r^2 - 2a\sqrt{R_0^2 - r^2} - a^2}{2}$$

Vernachlässigt man in den beiden Wurzeln das gegen R_0 und R meist sehr kleine r, so wird:

$$f = \frac{PA^2}{rTE}\left(\frac{R^2 - R_0^2}{2} + a(R - R_0)\right)$$

Nun hat man aber bei n Windungen der Feder sehr annähernd:

$$2r\pi = \frac{R - R_0}{n}$$

oder:

$$r = \frac{R - R_0}{2n\pi}$$

womit man nach einer kleinen Reduktion aus der letzten Gleichung für f endlich erhält:

$$f = \pi \cdot n \cdot \frac{PA^2}{TE}(R + R_0 + 2a) \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

Ist der Querschnitt der Feder ein Rechteck von der Höhe (Federdicke) h und der Breite b, so hat man also:

$$f = 12\pi \cdot n \cdot \frac{A^2}{bh^3}\,\frac{P}{E}(R + R_0 + h) \quad . \quad . \quad (58)$$

(Bei den immer sehr dünnen Uhrfedern kann man auch das h in der Klammer noch weglassen.) Es ist also f wieder, wie bei den Blatt- und Schraubenfedern proportional der Kraft P, welche die Verwindung hervorruft. Um den Ausdruck für die Biegsamkeit zu finden, theilen wir auf beiden Seiten durch A. Dadurch erhalten wir links $\frac{f}{A}$. Dies ist aber nichts anders, als der in Bogenmass ausgedrückte Winkel ω, um welchen die Feder verwunden wird, indem A der Halbmesser des Bogens f ist. Man erhält daher als Ausdruck für die Biegsamkeit der Spiralfedern mit constantem Querschnitt aus (57) allgemein:

$$\omega = \pi \cdot n \cdot \frac{PA}{TE}(R + R_0 + 2a) \quad . \quad . \quad (59)$$

und aus (58) für den in der Praxis fast allein angewandten rechteckigen Federquerschnitt:

$$\omega = \frac{12 \cdot \pi \cdot n \cdot A}{bh^3}\,\frac{P}{E}(R + R_0 + h) \quad . \quad . \quad (60)$$

Hiebei ist ω stets in Theilen des Halbmessers ausgedrückt. Um die Beziehung zwischen ω und der eintretenden Spannung $\mathfrak{S}$ zu finden, führen wir wieder in diese Formeln, ganz wie früher bei den andern Federarten für P dessen Werth aus der Festigkeitgleichung der Feder, hier Formel (51), ein. Man hat nach der letzteren:

$$P = \frac{\mathfrak{S}}{A}\,\frac{T}{a}$$

also hier allgemein aus (57):

$$f = \pi \cdot n \cdot \frac{A}{a}\,\frac{\mathfrak{S}}{E}(R + R_0 + 2a) \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

ferner aus (59):

$$\omega = \pi \cdot n \cdot \frac{\mathfrak{S}}{E}\,\frac{R + R_0 + 2a}{a} \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

und also für den Rechteck-Querschnitt, wo $a = \frac{h}{2}$:

$$\omega = 2\pi n \cdot \frac{\mathfrak{S}}{E}\,\frac{R + R_0 + h}{h} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (63)$$

Der Zusammenhang ist nicht verwickelt. Soll die Biegsamkeit gross sein, so muss die Summe der beiden Halbmesser R und R_0 gross gemacht werden. Allein man kann diese Formeln alle noch etwas anders schreiben. Es ist nämlich, wie sich leicht zeigen lässt, $\pi \cdot n \cdot (R + R_0)$ nichts anderes, als die Länge der Spiralfeder. Schon an (53) konnte man dies sehen, indem $\varrho d\Theta$ das Differenzial der Länge der Evolvente ist. *) Setzt man für $\pi \cdot n\,(R + R_0)$

*) Man hat nämlich nun, da $d\Theta = \frac{d\varrho}{r}$ und $r = \frac{R - R_0}{2n\pi}$, für die Länge l der Feder:

$$l = \int\varrho d\Theta = \frac{2\pi n}{R - R_0}\int\varrho d\varrho,$$

woraus unter Integration zwischen den Grenzen $\sqrt{R^2 - r^2}$ und $\sqrt{R_0^2 - r^2}$ ähnlich angenähert wie oben folgt: $l = \pi n(R + R_0)$.

die Länge l in die Formeln ein, so vereinfachen sich dieselben noch wesentlich. Man erhält z. B. aus (61):

$$f = A \frac{\mathfrak{S}}{E} \left(\frac{l}{a} + 2\pi n\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

und aus (63)

$$\omega = 2 \frac{\mathfrak{S}}{E} \left(\frac{l}{h} + \pi n\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

also ganz so einfache und übersichtliche Beziehungen, wie bei den andern Federarten. Lässt man, was bei den Uhrfedern wegen ihrer geringen Dicke stets geschehen kann, den Summanden πn in der Klammer noch weg, so zeigt ein Vergleich von (65) mit den Biegsamkeitsformeln der einfachen Blattfedern die interessanteste Analogie. Zunächst hängt, wie auch schon die vorigen Formeln zeigen, die Biegsamkeit gar nicht von der Federbreite b ab, sondern richtet sich nur nach dem Verhältniss $\frac{l}{h}$ und dem Material; ganz dasselbe fanden wir auch bei den Blattfedern. Die Breite b bestimmt bloss die Festigkeit der Feder, ihre Widerstandfähigkeit gegen Verdrehungen. Will man also z. B. eine Uhrfeder anfertigen, die sich ohne Gefahr einer bleibenden Formänderung ebenso vielmal soll umwinden lassen, als eine bestehende, aus dem gleichen Material gefertigte, so braucht man nur bei der neuen Feder das Verhältniss $\frac{l}{h}$ ebenso zu machen, wie bei der alten; soll sie dabei doppelt so stark sein, so hat man sie zweimal so breit zu machen, als jene. Man darf alsdann die Feder um einen Kerncylinder von grossem oder kleinem Halbmesser (R_0) winden, und ihr ursprünglich viel oder wenig Windungen geben, die Verhältnisse bleiben stets dieselben. Die Feder muss in allen Fällen gleichoft um ihre Achse verwunden werden, wenn dieselbe Spannung der Theilchen in ihr hervorgerufen werden soll. (Hiebei darf man indessen doch nicht vergessen, dass bei der Entwicklung der Steigungswinkel der Spirale klein angenommen wurde.) Es ist demnach der Hauptunterschied zwischen starken und schwachen Uhrfedern in ihrer Breite zu suchen. Bei dickeren Federn darf man hingegen das Glied πn nicht weglassen, worauf die Beziehungen etwas anders, und R und R_0 wieder von Einfluss werden.

Vergleicht man Formel (65) unter Hinweglassung des Werthes πn in der Klammer mit Formel (6), S. 3, so sieht man, da dort:

$$\frac{f}{l} = \frac{2}{3} \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{l}{h}$$

ist, dass eine Spiralfeder dreimal so biegsam ist, als eine ihr an Länge und Blattdicke gleiche Blattfeder aus demselben Material. Dagegen ist sie, wie Formel (12) zeigt, nur zweimal so biegsam, als eine Dreieckfeder aus demselben Material und von der gleichen Länge und Dicke. Wie es sich übrigens mit dem verhältnissmässigen Materialaufwand verhält, wollen wir erst weiter unten untersuchen.

Entwickelt man noch aus (59) die Kraft P, so erhält man:

$$P = \omega \frac{TE}{A\pi \cdot n(R + R_0 + 2a)}$$

oder auch, indem man wieder den kleinen Summanden $2a$ in der Klammer vernachlässigt, und für $\pi \cdot n(R + R_0)$ dessen Werth l einführt:

$$P = \omega \frac{TE}{Al} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (66)$$

Man sieht, dass P dem Verwindungswinkel ω direkt proportional ist, mit andern Worten, dass der Widerstand einer verwundenen Feder in demselben Maasse wächst, wie der Verwindungswinkel zunimmt. Diess ist ein Umstand, welcher für die Unruhfeder der Uhren sehr zweckmässig ist, indem, je genauer dies erfüllt wird, die Schwingungen genauer gleichdauernd (isochron) ausfallen. Die Kraft, welche das Schwungrädchen in Bewegung bringt, oder was gleichbedeutend ist, die Schwingungsweite, hat dann keinen Einfluss auf die Schwingungsdauer. Diess wird um so vollkommener richtig sein, je weniger der Mechanismus, welcher auf das Schwungrad wirkt, dessen Bewegung zu behindern oder überhaupt derart zu beeinflussen vermag, dass die Schwingungsdauer nicht einzig von dem Trägheitmoment des Schwungrädchens und von der Unruhfeder abhängt. Da es aber sehr schwer ist, jenen Mechanismus so einzurichten, so haben grosse Veränderungen in der Triebkraft der Uhr dennoch einen Einfluss auf die Schwingungsdauer der Unruhe, wesshalb man suchen muss, die Triebkraft so constant zu erhalten, als es erreichbar ist, und da erscheint denn die Eigenschaft der Spiralfeder, die wir in Formel (66) fanden, für die Treibfeder nicht sehr günstig. Bei der sogenannten Spindeluhr sucht man bekanntlich die Triebkraft durch eine auf eine Schneckentrommel aufgewickelte Kette constant zu machen; bei den Cylinderuhren und andern feinen Werken lässt man die Kette weg, macht dagegen die Feder sehr lang und gibt ihr schon für den abgelaufenen Zustand eine verhältnissmässig grosse Aufwindung ω_0, von welcher die für das Treiben der Uhr bestimmte einen kleinen Bruchtheil, $1/3$, $1/4$ und kleiner, ausmacht. Dann erscheint die Kraft, mit welcher die Feder zurückstrebt, nicht dem Aufziehwinkel ω proportional, sondern nähert sich mehr einem constanten Werth, indem sie dann proportional $[\omega_0 + \omega]$, und nicht proportional ω ausfällt.

Man hat auch schon andere Versuche gemacht, die Triebkraft der Spiralfeder constant zu machen, indem man z. B. die Feder von aussen nach innen an Breite oder auch an Dicke zunehmen liess (Berthoud's Methode). Diess kann aber den beabsichtigten Zweck nie erfüllen. Am deutlichsten sieht man dies aus der Differenzialgleichung (56):

$$d\omega = \frac{PA}{TE} (\varrho + a)\, d\Theta .$$

Das Breitermachen der Feder nach der Mitte zu würde in dieser Formel sich dadurch geltend machen, dass das Trägheitmoment T des Federquerschnittes von dem Erzeugungswinkel Θ der Spirallinie abhängig, also $T = f(\Theta)$ sein würde. Dabei aber bliebe das Verhältniss P und ω ganz ungeändert, indem bei der Integration sich nur das Verhältniss von ω zu R und R_0 anders als jetzt gestalten könnte, während P als unabhängig von allen Werthen, welche man T geben will, seinen Bezug zu ω nicht ändern

könnte. Es können also solche Versuche nie den gewünschten Erfolg haben; vielmehr ist und bleibt die einfache Gestalt des Federblattes, ein Metallstreifen von überall gleicher Dicke und Breite, die beste. Der Fabrikant wird also in eben diesen Eigenschaften der Federn, welche übrigens schon schwer genug zu erreichen sind, und ausserdem in der Gleichmässigkeit des Materials und einer gleichförmigen und wohlgetroffenen Härtung desselben das meiste suchen müssen.

Einige Zahlenbeispiele mögen die entwickelten Hauptformeln in ihren Anwendungen zeigen.

Erstes Beispiel. Um wieviel ganze Umdrehungen kann man eine Uhrfeder aus feinem Stahl auseinander- oder zusammenwinden, ohne ihre Form bleibend zu ändern, wenn ihre Dicke $1/5^{mm}$ und ihre Länge 300^{mm} beträgt?

Um diese Frage zu beantworten, setzen wir die gegebenen Grössen in (65) ein, wobei wir wegen der geringen Dicke der Feder das Glied πn in der Klammer weglassen. Wir haben $l = 300$, $h = 0.2$, mithin:

$$\omega = 2\frac{\mathfrak{S}}{E}\frac{300}{0{,}2} = 3000\frac{\mathfrak{S}}{E}$$

Für E können wir hier bei der grossen Feinheit des Uhrfederstahls wohl 20000 setzen. Für $\mathfrak{S}$ müsste das Tragmodul dieses feinen Stahls eingeführt werden, der aber durch Versuche noch nicht festgestellt ist. Man wird sich indessen wohl nicht irren, wenn man diesen Tragmodul im Mittel $= 150^k$ pro Quadratmillimeter annimmt. Mittelst dieser beiden Werthe kann man nun ω berechnen; man erhält dann diesen Winkel im Bogenmass für den Halbmesser 1, während die Aufgabe die Zahl der Umdrehungen, die u heissen möge, verlangt. Man hat daher, um u zu finden, ω noch durch 2π zu theilen, und erhält demnach:

$$u = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{3000}{2 \cdot 3{,}14}\,\frac{150}{20000} = 3{,}6.$$

Somit kann man, ohne eine bleibende Formänderung besorgen zu müssen, die Feder um 3,6 ganze Umdrehungen auseinanderwickeln oder zusammenrollen, wobei, wie wir schon oben sahen, es keinen merklichen Einfluss hat, ob die Feder im unverdrehten Zustand weite oder enge Windungen hatte, wenn nur die Windungen einander beim Zusammenrollen der Feder nicht hinderlich sind.

Zweites Beispiel. Beim Poncelet'schen Federregulator, welcher im Maschinenbau so bekannt ist, dass seine Beschreibung hier übergangen werden darf, kann man statt der vom Erfinder vorgeschlagenen 6 Blattfedern sehr gut eine oder mehrere Spiralfedern anwenden. Eine solche Spiralfeder sei zu berechnen, und zwar für eine Welle, welche in einem radialen Abstand von 300^{mm} einen Druck von 300^k überträgt; die Feder soll sich bei diesem Druck um 45° gegen ihre Stellung im unbelasteten Zustand verwunden haben. Der Abstand des äussern Federendes von dem Wellenmittel sei $= 150^{mm}$, der des inneren $R_0 = 100^{mm}$.

Als Material nehmen wir Gussstahl, dessen Elastizitätsmodul $E = 25000$, und in welchem eine Maximalspannung von 50^k pro Quadratmillimeter bei dem obigen Druck statthaft sein möge. Die Feder werde von rechteckigem Querschnitt, und zwar von einer Federdicke $h = 8^{mm}$ gemacht; Zu suchen sind: die Breite b der Feder und die Zahl n der Windungen.

Wegen der Grösse von h dürfen wir dasselbe nicht vernachlässigen, können uns also der Formel (63) bedienen. Es ist für dieselbe: ω (= 45 in Graden) $= \frac{\pi}{2}$, $\mathfrak{S} = 50$, $E = 25000$, $R = 150$, $R_0 = 100$, $h = 8$; wir haben demnach:

$$\frac{\pi}{2} = 2 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{50}{25000}\,\frac{(100 + 150 + 8)}{8},$$

woraus die Zahl der Windungen:

$$n = \frac{8 \cdot 25000}{4 \cdot 50 \cdot 258} = 3{,}87.$$

Hieraus finden wir zunächst, da die Länge l der Spirale $= \pi \cdot n(R + R_0)$, annähernd

$$l = \pi \cdot 3{,}87 \cdot (150 + 200) = 0{,}68^{mm}$$

als Länge der Feder vom Befestigungspunkt am inneren Ende bis zur Oese des äusseren Endes. Nun ist noch die Federbreite b zu suchen. Hierfür haben wir in (52) zu setzen: $P = 300$, $A = 300$, $\mathfrak{S} = 60$, und $h = 8$, und erhalten also:

$$300 = \frac{60 \cdot 64 \cdot b}{6 \cdot 300},$$

woraus

$$b = \frac{6 \cdot 90000}{60 \cdot 64} = \text{sehr nahe } 140^{mm}.$$

Diese Breite könnte man, wenn es für die Ausführung vorgezogen werden sollte, auf zwei Federn, jede von der halben Breite vertheilen. Der auf die besprochene Weise umgestaltete Regulator lässt sich wegen der Vereinfachung seiner Form auch gut als Kraftmesser benutzen, indem man ihm z. B. entweder als Wellenkupplung gestaltet, oder ihn, wie es der Verfasser bereits ausführte, in eine Riemscheibe hineinlegt, u. s. w.

Wir schreiten jetzt zur Besprechung der letzten, in dieser Abhandlung zu betrachtenden Feder. Man erhält nämlich eine der Spiralfeder ganz ähnlich wirkende, d. h. zur Hervorbringung von Achsendrehungen geeignete Feder, wenn man die Schraubenfeder, statt sie auszudehnen oder zusammenzupressen, um ihre Achse verwindet. Wir wollen, um kurz davon reden zu können, eine auf diese Weise beanspruchte Schraubenfeder eine Drehschraubenfeder nennen, und ihre Theorie in Kürze aufsuchen. Diese ist, nachdem die der Spiralfeder vorausgegangen ist, leicht zu finden.

Die verdrehende Kraft P wirke wieder (s. Fig. 33) an einem festen Kreise K vom Halbmesser A, der mit der Feder an ihrem obern Ende so verbunden sei, dass diese sich um ihre Achse drehen, letztere aber nicht aus ihrer Richtung kommen kann. Das untere Ende der Feder sei festgehalten. Die Kraft P biegt nun alle einzelnen Elemente der Feder ganz ähnlich wie bei der Spiralfeder, und zwar ist das statische Moment der Feder auch hier wieder constant und gleich PA, so dass man wie bei der Spiralfeder [Gleichung (51)] hat:

$$PA = \mathfrak{S}\frac{T}{a}$$

Hierin ist das Trägheitmoment T constant, wenn alle Querschnitte gleich sind, wie wir es auch fernerhin stets

annehmen wollen. Dann aber ist auch $\mathfrak{S}$ constant, und mithin auch die Drehschraubenfeder mit constantem Drahtquerschnitt ebenfalls ein Körper von gleicher Biegungsfestigkeit. — Während sich bei der Spiralfeder nur der rechteckige Querschnitt gut eignet, ist bei der Drehschraubenfeder auch der kreisförmige ganz tauglich, weshalb die obige Gleichung für beide Drahtquerschnitte zu entwickeln ist. Für den Kreisquerschnitt hat man $T = \frac{\pi}{64} d^4$, $a = \frac{d}{2}$, also

$$P = \mathfrak{S} \cdot \frac{\pi}{32} \frac{d^3}{A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (68)$$

Beim Rechteck-Querschnitt ist $T = \frac{bh^3}{12}$, $a = \frac{h}{2}$, also:

$$P = \mathfrak{S} \frac{bh^2}{6A} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (69)$$

wobei aber angenommen ist, dass die Breite des Querschnittes der Achse parallel laufe. Hier ist die Lage der Querschnittdimensionen gegen die Federachse nicht mehr gleichgültig, wie es sich für die Längenbeanspruchung der Schraubenfeder ergab, sondern unter h stets die radial gerichtete Seite des Querschnittes, unter b die mit der Federachse parallele zu verstehen.

Der Verdrehungswinkel ω ist hier leichter zu finden, als bei der Spiralfeder, und zwar erhält man seine Gleichung wie folgt. Wegen der gleichen Festigkeit der Feder wird bei allen Elementen derselben die anfängliche Krümmung durch die Verwindung um gleichviel geändert, und zwar wird der Krümmungshalbmesser grösser, wenn man die Feder auseinander windet, und kleiner, wenn man sie zusammendreht. Ist der anfängliche Krümmungshalbmesser $= R$, so hat man für den Winkel Θ, welchen eine durch die Schwerpunkte aller Querschnitte gehende Linie um die Federachse durchläuft,

$$\Theta = \frac{2\pi n R}{R} = \frac{l}{R}$$

wenn man unter l die Länge des Federdrahtes versteht. Geht nun R in Folge der Verwindung in ϱ, und dabei Θ in Θ_1 über, so hat man bei der ganz zulässigen Vernachlässigung der auf jeden Querschnitt kommenden Zug- oder Druckkraft (vergl. S. 75): $2\pi n_1 \varrho = 2\pi n R = l$, d. h. die Länge der Feder wird durch das Verwinden nicht geändert, und es ist deshalb:

$$\Theta_1 = \frac{2\pi n_1 \varrho}{\varrho} = \frac{l}{\varrho}$$

Der Verwindungswinkel ω ist aber gleich dem Unterschied zwischen Θ_1 und Θ, so dass man hat:

$$\omega = \Theta_1 - \Theta = \frac{l}{\varrho} - \frac{l}{R} = 2\pi n R \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}\right)$$

Nach Gleichung (55) gilt nun für die Aenderung des Krümmungshalbmessers R in ϱ durch das Moment PA die Beziehung:

$$\frac{PA}{TE} = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}\right) \frac{R}{R + a}$$

woraus:

$$\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{R}\right) = \frac{R + a}{R} \frac{PA}{TE}$$

Diesen Werth in die so eben gefundene Gleichung für ω eingeführt, gibt:

$$\omega = 2\pi n \cdot \frac{PA}{TE} (R + a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (70)$$

woraus man für den Bogen $A\omega = f$, welchen die Punkte des Kreises K beschreiben:

$$f = A\omega = 2\pi n \cdot \frac{PA^2}{TE} (R + a) \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

Man erhält dasselbe Ergebniss, ob ϱ kleiner oder grösser als R ist; d. h. ob man die Feder auseinander- oder zusammenwinde, die gefundenen Beziehungen bleiben dieselben. Für die Befestigung des unteren Feder-Endes braucht man hier keine solche Vorsicht zu treffen, wie bei der Spiralfeder für das äussere Feder-Ende, indem hier die Aenderungen des Krümmungshalbmessers nicht so störend sein können, als dort. Ein Vergleich mit den Formeln für die Spiralfeder zeigt, dass man (70) und (71) auch aus den betreffenden Gleichungen der Spiralfeder erhält, wenn man $R_0 = R$ setzt.

Setzt man wieder für PA dessen Werth aus (67), so erhält man:

$$f = 2\pi n \cdot \frac{A}{a} \frac{\mathfrak{S}}{E} (R + a) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (72)$$

und

$$\omega = 2\pi n \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{R + a}{a} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Für den rechteckigen Drahtquerschnitt erhält man aus (71) und (72):

$$\left.\begin{aligned} f &= 24\pi \cdot n \frac{PA^2}{Ebh^3} \left(R + \frac{h}{2}\right) \\ \text{und} \quad f &= 4\pi \cdot n \cdot \frac{A}{h} \frac{\mathfrak{S}}{E} \left(R + \frac{h}{2}\right) \end{aligned}\right\} (74)$$

wobei h stets in radialer Richtung zu messen ist. Ferner wird hiefür der Verdrehungswinkel ω:

$$\left.\begin{aligned} \omega &= 24 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{PA}{Ebh^3} \left(R + \frac{h}{2}\right) \\ \text{oder} \quad \omega &= 4\pi \cdot n \cdot \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{R + \frac{h}{2}}{h} \end{aligned}\right\} (75)$$

Für den kreisförmigen Querschnitt endlich hat man:

$$f = 128 \cdot n \frac{PA^2}{Ed^4} \left(R + \frac{d}{2}\right) = 4\pi \cdot n \frac{A}{d} \frac{\mathfrak{S}}{E} \left(R + \frac{d}{2}\right) \quad . \quad (76)$$

und

$$\omega = 128 \cdot n \frac{P}{E} \frac{A}{d^4} \left(R + \frac{d}{2}\right) = 4\pi n \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{R + \frac{d}{2}}{d} \quad . \quad . \quad (77)$$

Auch hier liesse sich jedesmal $2\pi n R$ herausziehen und dessen Werth l in die Formel einsetzen, unter l die Länge des Federdrahtes verstanden. Doch zeigt sich eine andere Besonderheit dieser Formeln darin, dass zum Halbmesser immer noch die halbe Federdicke addirt wird, dass man also die Hälfte des äusseren Durchmessers der Feder, statt der des mittleren in die Rechnung einführt.

Die Drehschraubenfeder lässt sich sehr gut zu ähnlichen Zwecken verwenden, wie die Spiralfeder, z. B. als Unruhfeder, wenn die Höhe des Uhrwerkes dies gestattet, und möchte hierzu wohl sehr geeignet sein, indem die Befestigung der Feder-Enden hier kaum einen störenden Einfluss ausübt. Sie wird auch hiezu, sowie zu mancherlei technischen und gewerblichen Zwecken benutzt, z. B. als Polsterfeder, in der

in Fig. 34 angedeuteten Form) als Thürschliesser-Feder u. s. w., und lässt sich in der Regel auch darum sehr gut benutzen, weil sie leicht verborgen angebracht werden kann. Um ein Zahlenbeispiel zu berechnen, wollen wir die oben für den Poncelet'schen Regulator berechnete Spiralfeder durch eine Drehschraubenfeder ersetzen. Geben wir dieser dieselbe Federdicke wie jener, machen also $h = 8^{mm}$, und stellen wir die Forderung, dass unser R hier = dem innern Halbmesser R_0 jener Feder, also $= 100^{mm}$ sein soll, so haben wir in (75) zu setzen: $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\mathfrak{S} = 50$, $E = 25000$, $R + \frac{h}{2} = 104$, $h = 8$ und erhalten:

$$\frac{\pi}{2} = 4 \cdot \pi \cdot n \cdot \frac{50}{25000} \cdot \frac{104}{8}$$

woraus die Anzahl n der Windungen:

$$n = \frac{8 \cdot 25000}{8 \cdot 50 \cdot 104} = \text{sehr nahe } 4{,}8.$$

Die Federbreite b fällt gerade so aus, wie für die Spiralfeder, da die betreffenden beiden Gleichungen sich nicht von einander unterscheiden.

Was den Vergleich des Materialaufwandes zwischen den Spiralfedern unter sich und mit anderen Federarten betrifft, so ist der auf Weniges zu beschränken. Die wirklichen spiralförmigen Federn wird man wegen des guten Aufeinanderlegens immer bandförmig, d. h. von rechteckigem Querschnitt gestalten, und wir wissen aus (45) und den daran geknüpften Folgerungen, dass die Querschnittverhältnisse bei einer und derselben Federart, was den Materialaufwand betrifft, gleichwerthig sind. Man kann also auch bei solchen Spiralfedern, bei denen der Materialverbrauch in Anschlag zu bringen ist, die Querschnittverhältnisse unbesorgt so annehmen, wie es die anderen Rücksichten gebieten, indem man sicher ist, dass die Feder in der einen Gestalt gerade so viel wiegen wird, als in der andern.

Die Drehschraubenfedern lassen sich hingegen auch sehr leicht aus rundem Draht fertigen, und zwar wohl noch leichter, als aus flachem, und es kann daher manchmal die Frage aufgeworfen werden, bei welcher Querschnittform der geringste Materialverbrauch erzielt werde, so dass hiefür der allgemeine Vergleich angestellt werden möge. — Der Körperinhalt V der Drehschraubenfeder mit rechteckigem Querschnitt von der radialen Höhe h und der Breite b beim Halbmesser R ist:

$$V = 2\pi n R b h$$

und der Inhalt V_1 einer zweiten Drehschraubenfeder aus rundem Draht von der Dicke d und dem Halbmesser R_1:

$$V_1 = 2\pi n_1 R_1 \frac{d^2 \pi}{4}$$

mithin hat man zunächst:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{n_1 R_1}{n R} \frac{\pi}{4} \frac{d^2}{bh}$$

Nun verhalten sich die beiden Verdrehungswinkel ω_1 und ω nach (77) und (75) wie folgt:

$$\frac{\omega_1}{\omega} = \frac{n_1}{n} \frac{\mathfrak{S}_1}{E_1} \frac{E}{\mathfrak{S}} \frac{R_1 + \frac{d}{2}}{R + \frac{h}{2}} \frac{h}{d}$$

Hierin darf man die kleinen Additionen $\frac{d}{2}$ und $\frac{h}{2}$ vernachlässigen, worauf man aus der Gleichung erhält:

$$\frac{n_1}{n} = \frac{\omega_1}{\omega} \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{E_1}{\mathfrak{S}_1} \frac{R}{R_1} \frac{d}{h}$$

Diesen Werth in die obige Gleichung für $\frac{V_1}{V}$ eingesetzt, gibt:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{\pi}{4} \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1} \frac{E_1}{E} \frac{\omega_1}{\omega} \frac{d^3}{bh^2}$$

Ferner hat man, wenn man (68) durch (69) theilt:

$$\frac{P_1}{P} = \frac{\mathfrak{S}_1}{\mathfrak{S}} \frac{A}{A_1} \frac{6\pi d^3}{32 \cdot bh^2}$$

woraus:

$$\frac{d^3}{bh^2} = \frac{32}{6\pi} \frac{P_1}{P} \frac{A_1}{A} \frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1}$$

Dies wieder in die letzte Gleichung für $\frac{V_1}{V}$ eingeführt, liefert endlich:

$$\frac{V_1}{V} = \frac{4}{3} \frac{P_1}{P} \frac{A_1 \omega_1}{A \omega} \frac{\mathfrak{S}^2}{\mathfrak{S}_1^2} \frac{E_1}{E} \quad \ldots \quad (78)$$

Bei Federn aus dem gleichen Material, welche beide den gleichen Zweck zu erfüllen haben, ist $P = P_1$, $A_1\omega_1 = A\omega$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1 = E = E_1$ und somit:

$$V_1 = \frac{4}{3} V \quad \ldots \quad (79)$$

d. h. die Feder mit rundem Drahtquerschnitt gebraucht hier das $^4/_3$fache des Materials, welches die mit Rechteck-Querschnitt beansprucht.

Der Vergleich zwischen dem Materialverbrauch der Spiralfeder und den Blattfedern oder den in ihrer Achsenrichtung beanspruchten Schraubenfedern dürfte nicht oft vorkommen, da die ersteren doch hauptsächlich für Achsendrehungen, und diese für geradlinige Bewegungen anzuwenden sind. Führt man übrigens dennoch den Vergleich aus, so findet man, dass die Spiralfeder bei gleichen f, P und gleichem Material gerade so viel Material verbraucht, als die Dreieckfeder, also $^1/_3$ so viel, als die Rechteckfeder, dass also, wenn man eine Rechteckfeder zur Spiralfeder aufrollt, ihre Güte als Feder sich verdreifacht, wobei freilich nicht zu vergessen ist, dass man die Spiralfeder auch so anbringen muss, dass ihr Kerncylinder von der äusseren Kraft um seine Achse gedreht wird. *)

Hiermit werde die vorliegende Abhandlung geschlossen. Zwar gibt es noch einige Federarten, welche für den Maschinenbau von Wichtigkeit sind, z. B. die Kreisfeder oder Ringfeder, mit welchen man die Ringe der Dampfkolben aus einander treibt; unter diesen der federnde Kolbenring selbst, sodann die Adam'sche Bogenfeder, u. a. m. Doch gestattet der Raum in diesen Blättern nicht, auf so viele Einzelheiten einzugehen. Aus demselben Grunde

*) Als ein vielleicht nutzenbringendes Curiosum möge hier der Vergleich zwischen den Gewichten der Polsterfedern nach Fig. 27 und nach Fig. 34 stehen. Die Kegelfeder aus rundem Draht gebraucht für gleiches P, f, $\mathfrak{S}$ und E, wie sich aus dem Früheren leicht nachweisen lässt, zweimal so viel Material als die runddrähtige Cylinderfeder, während diese nur $^1/_{15}$ mal so schwer ausfällt, als eine das Gleiche leistende Drehschraubenfeder. Mithin fallen bei gleichem Material die neuerdings in Mode gekommenen Federn nach Fig. 34 nahe doppelt so schwer aus, als die älteren nach Fig. 27, wenn sie dasselbe leisten sollen.

musste einer der interressantesten Theile der Federtheorie, nämlich das auf die Federschwingungen Bezügliche weggelassen werden. Im Ganzen haben wir aber gesehen, dass die Theorien der behandelten Federn sich sämmtlich auf Sätze von grosser Einfachheit und Anschaulichkeit zurückführen liessen, trotzdem, dass der erste Anschein sehr verwickelte Sätze und Eigenschaften zu verheissen scheint. Namentlich ergaben die Vergleiche des Materialaufwandes sehr einfache und allgemein anwendbare Sätze, welche von manchen nutzlosen Versuchen abzuhalten und den rechten Weg bestimmt vorzuzeichnen im Stande sein möchten.

Druckfehler

in den beiden ersten Theilen der vorstehenden Abhandlung.

Heft	S.	Spalte	Zeile	
I.	5	II.	12 v. u.	soll es heissen l statt l^2
I.	5	II.	12 v. u.	,, ,, ,, (12) statt (11)
II.	34	I.	7 v. u.	,, ,, ,, $\frac{9 \quad 1500}{6^2/_3}$ statt $\frac{9 \cdot 1500}{6^2/_3} l$
II.	34	II.	26 v. o.	,, ,, ,, l statt l^2
II.	35	II.	26 v. o.	,, ,, ,, h^3 statt h_3.
II.	36	II.	1 v. u.	,, ,, ,, z^3 und bh^3 statt z_3 u. bh_3.
II.	38	II.	1 v. o.	,, ,, ,, h^2 statt h_2
II.	38	II.	7 v. o.	soll es immer heissen h^2 statt h_2 und m^2 statt m_2
II.	38	II.	9 v. o.	soll es heissen $\frac{1}{m^2}$ statt $\frac{1}{m_2}$
II.	38	II.	11 v. o.	,, ,, ,, $\frac{1}{m^3}$ statt $\frac{1}{m_3}$
II.	39	II.	12 v. o.	,, ,, ,, $\frac{E}{\mathfrak{S}^2}$ statt $\frac{E}{\mathfrak{S}_2}$
II.	39	I.	22 v. u.	,, ,, ,, $\frac{E}{Z^2}$ statt $\frac{E}{Z_2}$

Traubenpresse.

Von Dutertre & Cerisier.

Taf. 9. Fig. 1 und 2.

Diese Maschine soll gegenüber den bisher gebräuchlichen Schraubenpressen zum Auspressen der Trauben folgende Vortheile darbieten: 1. Sie erfordert weniger Kraft, indem das Auspressen der Masse in kleinern Abtheilungen, aber fast gleichzeitig vorgenommen wird und ein einziger Mann zur Bedienung der Presse genügt, ohne desshalb die Arbeit zu verzögern, oder ein unvollkommeneres Auspressen zur Folge zu haben; 2. die Presse dient für kleinere, wie für grosse Massen; 3. sie nimmt sehr wenig Raum ein und kann längs einer Wand aufgestellt werden; 4. behufs der Reinigung kann sie sehr leicht auseinandergenommen und wieder zusammengesetzt werden.

Fig. 1. Vertikaler Schnitt in der Längenrichtung der Presse.

Fig. 2. Querdurchschnitt.

Die Presse besteht aus einem langen Kasten A, welcher durch verstellbare Wände D in quadratische Räume abgetheilt werden kann. In der Mitte jeder solcher Abtheilung befindet sich eine stehende Schraubenspindel B, B^1, B^2, an welcher der Druck ausgeübt wird. Der vorliegende Apparat enthält drei solche Abtheilungen; allein durch Verlängerung des Kastens könnte die Zahl derselben leicht vergrössert werden. Die vordere Wand a hängt in Charnieren und lässt sich behufs der Reinigung vorn herunterlegen. Die innern Seiten der Wände und des Bodens sind gefurcht, um den ausgepressten Saft abfliessen zu lassen, welcher von der den Kasten umgebenden Rinne C aufgenommen und an geeigneter Stelle in ein untergestelltes Gefäss geleitet wird.

Wenn für die auszupressende Quantität Trauben nur eine einzige Abtheilung in Anspruch genommen werden muss — welcher Fall in vorliegender Zeichnung angenommen wurde — so wird die eingesetzte Zwischenwand D durch eingelegte Stangen gesperrt.

Zu jeder Abtheilung gehört eine gewisse Anzahl starker Bohlen E, welche unmittelbar auf die Masse zu liegen kommen. Quer über dieselben werden starke Hölzer F gelegt, welche mit einem Ausschnitte versehen sind, um sich von der Seite einschieben zu lassen.

Beim Beginne der Pressung bedient man sich des Hebelkreuzes H, dessen Armlänge eine continuirliche Drehung gestattet. Wird der Widerstand zu gross, so setzt man einen längern Gabelhebel K (Fig. 2) ein, welcher die Schraubenmutter G umfasst und sich an die auf der Nabe J des Hebelkreuzes vorstehenden Stifte i stützt. Die Bewegung dieses Hebels kann natürlich nur ruckweise geschehen, und es muss derselbe immer wieder von Neuem eingesetzt werden.

Wenn der ganze Kasten zum Pressen benutzt werden soll, so werden keine Zwischenwände D eingesetzt, sondern man überdeckt die Masse mit Bohlen E in der ganzen Länge desselben und setzt die Querhölzer F darauf. Der Arbeiter treibt nun die Schraubenmuttern G mit Hülfe der Hebel successive bei allen drei Schrauben herunter und gelangt am Ende zum vollständigen Auspressen, ohne sich übermässig angestrengt zu haben. Auch soll durch diese Vertheilung der Masse und des Druckes ein viel besseres Resultat erreicht werden, als bei den gewöhnlichen Pressen, wo der Druck nur von einer einzigen Stelle aus über die ganze Masse sich verbreitet. Dass diese Construction der Presse sich in verschiedenen für gewisse Zwecke geeigneten Grössen ausführen lässt, versteht sich von selbst.

(Gén. industr.)

Keilpresse.

Eine neue Art Keilpresse zeigt die Fig. 3, Taf. 9. Es ist a eine Fussplatte mit einem starken Rahmen a^1, welcher die bewegliche Pressplatte b umschliesst, deren unterer Theil b^1 eine doppelte schiefe Ebene bildet. In einer Nuthe auf der obern Seite der Fussplatte sind verschiebbare Schraubenmuttern $c\,c$ eingesetzt, deren obere Flächen sich genau an die schiefen Ebenen b^1 anlegen. Das Gestelle trägt ferner eine Spindel d, welche von der Mitte aus nach der einen Seite mit einem linken, nach der andern mit einem rechten Gewinde versehen ist und durch eine Kurbel oder Schwungrädchen e gedreht werden kann. Durch Umdrehen der letztern nähern sich die Schraubenmuttern c einander, treiben die Platte b in die Höhe, oder sie entfernen sich von der Mitte und lassen die Platte abwärts gehen.

Dass sich mittelst dieser einfachen Vorrichtung ein sehr bedeutender Druck hervorbringen lässt, ist einleuchtend.

Maschine zum Schärfen der Sägezähne.

Von Breton und Gobert.

Taf. 9. Fig. 4—7.

Das Schärfen der Sägezähne, welches fast allgemein von Hand mit der Feile ausgeführt wird, ist eine mühsame und schwierige Arbeit; die Zähne werden selten so genau ausgearbeitet, dass ihre Spitzen (bei geraden Sägen) in einer geraden Linie sind; namentlich tritt dieser Uebelstand bei den Kreissägen hervor, wo die Zahnspitzen genau in einem Kreise liegen sollten. Um so werthvoller dürfte eine Maschine sein, welche das Schärfen der Zähne mit einer Regelmässigkeit ausführt, die nichts zu wünschen übrig lässt und mittelst welcher zugleich der schneidenden Kante die erforderliche schiefe Richtung gegeben werden kann.

Fig. 4. Vorderansicht der vollständigen Maschine.

Fig. 5. Vertikaler Schnitt durch die Mitte derselben.

Fig. 6. Grundriss.

Fig. 7. Durchschnitt des Wagens zum Aufspannen gerader Sägeblätter.

Das Gestelle *A* ist von Holz und seine Gestalt lässt sich aus der Zeichnung leicht erkennen. Ein beweglicher Rahmen *B* dient als eine Art Schraubstock zum Einspannen der zu schärfenden Sägeblätter. Es trägt ein ausgeschlitztes eisernes Querstück B^1, welches durch den Schraubenbolzen b^1 festgehalten wird. In dem Schlitze *b* liegt ein anderer Bolzen b^2 mit angeschobener Hülse, auf welchen das Kreissägeblatt *J* gesteckt und festgedrückt wird. Die exzentrische Stellung des Bolzen b^2, oder dessen Entfernung vom Bolzen b^1 bedingt den Winkel, unter welchem die schiefen Flächen der Zähne geneigt sein sollen.

Um dem an der Maschine beschäftigten Arbeiter das Stellen des Zapfens b^2 für einen gegebenen Winkel zu erleichtern, ist die obere Fläche des Stückes B^1 mit einer nummerirten Skale versehen (Fig. 6). Der Zapfen b^1 und mit demselben das Querstück B^1, lässt sich in einem vertikalen Schlitze b^3 des Rahmens *B* verstellen, und es können somit Sägeblätter von verschiedenem Durchmesser aufgespannt werden. Ein Hebelgewicht *j* drückt beständig den Klemmstock b^4 gegen das Blatt.

Um den Sägezähnen in der Dicke des Blattes die Meisselform zu geben, muss der so eben beschriebene Rahmen *b* einer Drehung um eine vertikale Achse fähig sein. Zu diesem Zwecke steht derselbe auf einem Zapfen *l*; seine obere gusseiserne Platte *k* ist mit einem kreisförmigen Schlitze k^1 versehen, durch welchen ein Stellbolzen geht, der dieselbe mit der Platte K^1 fest verbindet. Auch diese trägt eine Bogenskale (Fig. 6), wodurch das Einstellen in die gewünschte Lage vermittelt wird.

Der Schmirgelscheibe *E* können ebenfalls verschiedene Stellungen nach der einen und andern Seite gegeben werden. Die Arme *D*, welche die Spindel derselben tragen, sind in Gelenken an dem gusseisernen Ringe *D* befestigt und dieser lässt sich an der mit Gradbogen versehenen, am Gestelle angebrachten Platte C^1 in eine beliebige Lage bringen, in welcher er mit den Bolzenschrauben c^1 festgehalten wird. Die Spindel der Schmirgelscheibe trägt zwei Kehlrollen *a* und a^1, welche durch eine von der Rolle d^1 ausgehenden Schnur gedreht werden. Die Spindel d^2 der letztern hat eine feste Riemenscheibe *F* und eine lose F^1, und wird durch einen Riemen von einer beliebigen Triebvorrichtung aus in Bewegung gesetzt. Der Riemen läuft um die Spannrollen *g* und g^1, und diese werden durch eine Hebelvorrichtung $G\,g^2$ gehalten, mittelst welcher die Maschine sehr leicht angelassen und abgestellt werden kann.

Um die Tiefe, auf welche die Schmirgelscheibe in die Zähne zu schneiden hat, genau zu reguliren, sind die Arme *D* mittelst einer Kette *I* an dem mit Gegengewicht *P* versehenen Hebel D^1 aufgehangen, welches das Gewicht der Arme und der Scheibe equilibrirt. Drückt man aber auf die Griffe I^1, so lässt sich die Scheibe soweit hinabbewegen, als es die Stellschraube *i* am obern Hebel gestattet, deren Spitze auf die Platte i^1 stösst und von dieser aufgehalten wird.

Zum Schärfen gerader Sägeblätter wird der in Fig. 7 im Durchschnitte gegebene Wagen an die Stelle des Rahmen *B* eingesetzt. Dieser ist wiederum so beschaffen, dass das Sägeblatt sich in horizontaler Richtung in verschiedene Stellung bringen und zugleich mittelst einer Kurbel *M*, eines Getriebes *m* und einer Kette *n* in der Längenrichtung verschieben lässt, um einen Zahn um den andern der Einwirkung der Schmirgelscheibe auszusetzen.

(Gén. industr.)

Die Getreidemähmaschine.

Von Franz Rummel in München.

Das Grundprinzip dieser Maschine und der Verfahrungsweise, die Getreidekörner von ihrer äusseren Haut (Hornhaut) zu entschälen, besteht darin, die Getreidekörner in einer cylindrischen geschärften Umschliessung, welche mit Zu- und Abflussöffnungen versehen ist, mittelst einer Walze, die auf ihrer Peripherie vorstehende schraubenförmige Schärfungen hat, unter gleichzeitig angemessenem Zufluss von Wasser beständig von der Zuflussnach den Abflussöffnungen der cylindrischen Hülle fortschieben zu lassen; ferner das Fortrücken der Körner aber durch Schieber an den Ausflussöffnungen so zu hemmen, dass dadurch eine gewisse Spannung zwischen dem Getreide und der Thätigkeit der Walze entsteht, wodurch dann die Hornhaut durch den schwachen Zufluss von Wasser etwas feucht geworden, an den scharfen Kanten der Stiften und des Cylinders abgerieben und entfernt wird.

Das Getreide wird zwar allenthalben, behufs der bessern Reinigung, mit den sogenannten Koppmühlen genetzt, bleibt aber in diesem Zustande in der Regel 8, 10 bis 15 Stunden liegen, bis es auf jene Koppmühlen gebracht wird. Das neue Verfahren unterscheidet sich im Wesentlichen dadurch von dem obigen, dass die Körner bei dem Entschälen selbst vorweg durch zufliessendes Wasser befeuchtet werden. Hierdurch ergibt sich einerseits der Vortheil, dass sich das Getreide leichter schälen lässt; und ander-

seits, dass — weil durch die Maschine diese Hornhaut schnellstens abgerieben und in kleinen Fasern sogleich durch die Reiblöcher des Cylinders entfernt wird — das Wasser keine Zeit hat, durch die Kleie in die Mahltheile zu dringen. Die Kleie selbst wird zwar durch die vorgenommene Operation allerdings etwas zäher, hat aber so gerade die Eigenschaft, dass sie beim Vermahlen der Körner von den Mühlsteinen weniger zerrieben werden kann.

Es ergiebt sich hiernach, dass durch diesen Vortheil sogar mit gewöhnlichen deutschen Mahlgängen ein viel reineres, kleienfreieres und mehr für die Dauer geeignetes Mehl aus derartig geschältem Weizen, Dinkel und Roggen erzeugt werden kann.

Der Zufluss von Wasser zur Befeuchtung der Getreidekörner beträgt für je 100 Pfd. Weizen 3 bis 4, und für 100 Pfd. Dinkel und Roggen 2 bis 3 Mass (bair.) Die quantitative Leistung der Maschine wird bei einer Geschwindigkeit von 100 bis 120 Umgängen per Minute in 24 Stunden 10 bis 12 Scheffel betragen.

(K. u. G. Bl. für Baiern.)

Drehbarer Anschlagwinkel.

Dieses in den Figuren 8, 9 und 10, Taf. 9, dargestellte Werkzeug ist so konstruirt, dass damit von einem Punkte aus eine Fläche nach allen Richtungen hin bestrichen werden kann. Die Fig. 8 zeigt eine Ansicht desselben; in Fig. 9 ist dasselbe nach Wegnahme der Anschlaghülse gezeichnet. *a* ist ein konischer Dorn, an welchem die Anschlagleiste *b* festgenietet ist. Derselbe steckt in einer Hülse *c*, in welcher er sich ringsum drehen lässt. Diese Anschlaghülse wird mit ihrer flachen Seite *c'* (siehe Durchschnitt Fig. 10) glatt an eine Fläche des Gegenstandes angelegt, dann steht die innere Kante b' senkrecht darauf. Der Dorn *a* ist an seiner Spitze mit einem Schraubengewinde und hinter demselben mit einem prismatischen Theile versehen, an welchem ein Scheibchen *d* steckt und durch eine Schraubenmutter *e* festgehalten wird. Durch Anziehen der letztern kann dem Dorn ein fester und sicherer Gang in der Hülse erhalten werden.

Faivre's verbesserte Hahnen.

Taf. 9. Fig. 15.

Die gewöhnliche Construction der Hahnen ist selten so sorgfältig ausgeführt, dass dieselben einen vollkommen hermetischen Verschluss geben. Man hat daher eine Menge mehr und weniger complicirte Vorrichtungen vorgeschlagen, welche diesem Uebelstande abhelfen sollten. Eine solche zeigt die Fig. 15 im Durchschnitt. Das Röhrenstück *A* bildet bei *a* ein Knie, dessen obere Oeffnung *b* mit einem breiten Rande *f* umgeben ist, auf welchen der Rand der Glocke *E* geschraubt wird. Zwischen beiden Rändern ist eine Scheibe *D* eingeklemmt, die aus Kautschuk, Guttapercha, Leder etc. bestehen kann. Dieselbe liegt mit ihrer obern Fläche an der untern Platte einer runden Schraubenmutter *C*, welche bei *c* ausgehöhlt ist. Sie umfasst eine Schraube *B*, die bei *g* gehalten und mit dem Schlüssel *e* gedreht wird. Damit sich die Schraubenmutter nicht drehen könne, hat man dieselbe mit zwei Rippen versehen, welche in Nuthen im Innern der Glocke gleiten. Auf welche Weise die Kommunikation zwischen den beiden Theilen des Stückes *A* hergestellt oder unterbrochen werden kann, bedarf keiner weitern Erklärung.

Ramsay's Schmierbüchse für Dampfkolben.

Taf. 9. Fig. 16.

Die vorliegende Abbildung zeigt im Durchschnitte eine sehr zweckmässige Einrichtung eines Schmierhahnens. Das von oben und unten eingebohrte Rohr *a* wird auf den Deckel des Dampfcylinders geschraubt. Ueber dasselbe ist ein Oelgefäss *b* geschoben, welches durch die Schraubenmutter *c* festgehalten wird. Derselbe hat im Innern zwei büchsenförmige Ansätze *d* und *e*, von denen jeder seitwärts bei *d'* und *e'* ausgeschlitzt ist. Die obere Bohrung des Rohres *a* mündet nach der einen Seite bei *a'*; die untere Bohrung dagegen in zwei Oeffnungen a^2 und a^3 nach der entgegengesetzten Richtung. In der gegenwärtigen Stellung steht die Mündung a^1 vor dem Schlitze d^1 und kommunizirt somit mit dem Innern des Gefässes; die andern Oeffnungen a^2 und a^3 sind durch die Hülsen *d* und *e* verschlossen, somit das Gefäss von dem Innern des Dampfcylinders abgesperrt ist. Gibt man nun dem Gefässe *b* eine halbe Drehung, so kommen a^2 und a^3 vor die Schlitze d^1 und e^1 zu stehen und a^1 wird verschlossen. Das Oel kann nun durch a^2 in den Cylinder fliessen und wird keineswegs von dem Gegendruck des Dampfes daran gehindert, weil dieser durch a^3 auch über die Oberfläche der Flüssigkeit gelangen kann.

Vorrichtung zum Schleifen der Drehstähle für feinere Arbeiten.

Bei Anfertigung feiner Arbeiten ist die richtige Schneide der Drehstähle von grosser Wichtigkeit, zumal da, wo Gegenstände wegen ihrer zarten Beschaffenheit kaum ein Nachpoliren aushalten können und somit ihre Vollkommenheit fast ausschliesslich von der Trefflichkeit der Drehstähle abhängt. Besonders müssen die kleinen Stähle mit ihren verschiedenen Winkeln, zum excentrischen und Ornamenten Drehen, sehr genaue, scharfe und gut polirte Schneiden haben, und, wenn sie mangelhaft werden, stets wiederum dieselbe Vollendung der Form und Beschaffenheit durch den Schliff erhalten können. Um nun diesen Werkzeugen einen solchen vollkommenen und gleichmässigen Schliff mit Sicherheit zu geben, wurde in England ein Instrument construirt, welches den Drehstahl unter dem erforderlichen Winkel an den Schleifstein bringt. Dieses Instrument ist eine Art Support, wobei die den Drehstahl haltende Hülse in horizontaler Kreisbewegung auf einer mit Eintheilung versehenen Scheibe sich dreht. Zugleich kann dieser Scheibe sammt der Hülse an einem ebenfalls

mit Eintheilung versehenen Kreissegmente die erforderliche schräge vertikale Richtung gegeben werden, so dass der Drehstahl nach allen Richtungen in dem erforderlichen Winkel angegriffen werden kann. (Durch P. Ct. Bl.)

Regulator für die Bewegung der Drosselspuhlen.

Von C. Abegg in Zürich.

Taf. 9. Fig. 11 und 12.

Die Spuhlen des Drosselstuhls (Watermaschine) bewegen sich frei auf der mit einem Flügel versehenen Spindel welche dem Faden die nöthige Drehung gibt. Das Aufwickeln des Fadens aber, welches gleichzeitig stattfindet, wird durch die Differenz der Geschwindigkeiten zwischen Flügel und Spuhle bewirkt, indem diese nur durch die Spannung des sich aufwickelnden Fadens mitgenommen wird, während die Spindel durch den Mechanismus der Maschine gedreht wird. Theils in Folge des so eben erwähnten Umstandes, hauptsächlich aber durch die an der untern Fläche der Spuhle, welche auf einer horizontalen Bank aufliegt, entstehende Reibung muss sich die Spuhle etwas langsamer drehen als die Spindel. Man hat diese Reibung, die bei zu glatten Flächen zu gering ausfällt, dadurch zu verstärken gesucht, dass man die reibende Fläche mit einem rauhen Ueberzug (Filz etc.) bekleidete; allein trotzdem konnte keine bestimmte, auf dem erforderlichen Grade konstant bleibende Reibung und somit eine fortwährend gleichförmige Aufwicklung erzielt werden und namentlich fehlte es an einem Mittel, die Reibung für jede beliebige Garnsorte reguliren zu können. Hr. Abegg (dem die Spinnerei mehrere bedeutende Verbesserungen und Erfindungen zu verdanken hat, worunter wir die sinnreiche Banc-Abegg zum Vorspinnen besonders hervorheben) hat jene Aufgabe auf ebenso einfache als vollkommen entsprechende Weise gelöst und zwar dadurch, dass er die Spuhle mit einem kleinen Windflügel, wie beim Schlagwerk einer Pendeluhr, versehen, welcher durch den Widerstand, den die beiden Flügelchen desselben in der Luft finden, der Spuhle die nöthige Verzögerung in der Geschwindigkeit beibringt. Der Grad dieser Verzögerung lässt sich durch die mehr oder weniger geneigte Stellung der Flügel aufs Genaueste reguliren. Ein Beweis hievon mag darin liegen, dass die Geschwindigkeit der Spindeln, die ohne diesen Regulator etwa 4500 Umgänge pro Minute betrug, nunmehr auf 6000—7000 Umgänge getrieben werden konnte und dabei Fadenbrüche weniger vorkommen als vorher.

In dem Durchschnitte Fig. 11 bezeichnet *A* die Spindel, *C* den daran befestigten Flügel, *B* die Spuhle, *D* die Spuhlenbank mit dem Lager *a* für den Durchgang der Spindel; *E* eine dünne eiserne Platte, welche zwischen sich und der Spuhlenbank einen freien Raum zur Aufnahme des Regulators offen lässt. In diesem Theile befindet sich eine hölzerne Nuss *F* mit etwas vorstehendem Rande, in welchen die beiden mit einer angelötheten Holzschraube *b* versehenen Flügel *G* aus Weissblech eingeschraubt sind. An die Nuss *F* ist oben ein kurzer Zapfen gedreht, auf welchen die hölzerne Spuhle *B* gesteckt wird.

Bau- und Ingenieurwesen.

Schweizerische Eisenbahnen.

Rheinfallbahn.

Die Tafel 10 zeigt den Grundplan und das Längenprofil der Rheinfallbahn, welche von Schaffhausen nach Winterthur geht und sich hier an die schweizerische Nordostbahn und an die St. Gallen-Appenzellische Bahn anschliesst. Die wichtigsten Theile dieser Linie sind die Flussübergänge über die Thur bei Andelfingen und über den Rhein bei Schaffhausen. Der letztere Uebergang ist durch die steinerne Brücke gebildet, welche sich im letzten Hefte beschrieben und abgebildet findet. Ueber die Thur führt dagegen eine eiserne Gitterbrücke, von welcher wir zwar keine Zeichnung zu geben für nöthig finden, dagegen aber die Art und Weise, wie die Fahrbahn über die Pfeiler geschoben wurde, etwas näher beschreiben wollen.

Die Gitterbrücke über die Thur bei Andelfingen

hat folgende Hauptdimensionen: Vier Oeffnungen mit 94, 110, 110 und 94 Fuss lichter Spannweite.

Dicke der Pfeiler unter dem Gesimse	16',0
Höhe der Fahrbahn über dem mittleren Wasserstand	167',0
Höhe der Pfeiler	94',0
Höhe der beiden Gitterwände (Fahrbahn für einfache Spur)	11',4
Entfernung der Gitterwände von Mittel zu Mittel	10',0

Die Gitterwände haben die gleiche Construktion, wie die der Gitterbrücken auf der schweiz. Centralbahn und sind der ganzen Länge nach aus Einem Stücke hergestellt, mit abwechselnden Stössen der vier Platten in den Flantschen. Die Fahrbahn ruht mittelst Querschwellen oben auf den Gitterbalken; die Querverbindungen, welche von 10 zu 10 Fuss die Gitterwände verbinden, konnten, da sie Nichts zu tragen haben, aus Flach- und Winkeleisen sehr