

Sektion für Mathematik

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden
Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences
Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **131 (1951)**

PDF erstellt am: **06.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag und Sonntag, den 29. und 30. September 1951

Präsident: Prof. Dr. A. PFLUGER (Zürich)

Sekretär: Prof. J. J. BURCKHARDT (Zürich)

1. GABRIEL THIERRIN (Institut Minerve, Villars-sur-Ollon). – *Sur les groupes semi-abéliens.*

Nous dirons qu'un groupe G est *semi-abélien* si le groupe commutateur C de G est sous-groupe propre ou impropre du centre Z de G . Les groupes abéliens sont des cas particuliers des groupes semi-abéliens. Remarquons que tout groupe semi-abélien est résoluble. Nous avons:

Théorème. *Tout groupe semi-abélien fini G est le produit de groupes abéliens n'ayant en commun deux à deux que le groupe commutateur C de G , et dont les ordres sont des puissances de nombres premiers multipliées par l'ordre de C .*

En effet, le groupe-quotient G/C est abélien. D'après le théorème fondamental sur les groupes abéliens finis, il est le produit direct de groupes-quotients cycliques dont les ordres sont des puissances de nombres premiers. Soient $Q_1/C, Q_2/C, \dots, Q_m/C$ ces groupes-quotients cycliques. Les groupes $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ n'ont en commun deux à deux que le groupe commutateur C et les ordres de ces groupes sont des puissances de nombres premiers multipliées par l'ordre de C . Le groupe G est le produit de ces groupes $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$. Nous allons montrer que ces groupes sont abéliens. En effet soit Q l'un quelconque de ces groupes. Le groupe-quotient Q/C est cyclique. Nous avons:

$$Q = C + a_1C + a_2C + \dots + a_{n-1}C \quad (1)$$

Soit a_1C le complexe générateur du groupe-quotient cyclique Q/C , et soit a un élément quelconque de a_1C . Les puissances $a, a^2, \dots, a^{n-1}, a^n$ de l'élément a appartiennent respectivement aux complexes $a_1C, a_2C, \dots, a_{n-1}C, C$. La décomposition (1) peut donc s'écrire:

$$Q = a^nC + aC + a^2C + \dots + a^{n-1}C, \text{ avec } a^nC = C$$

Par hypothèse, C est abélien, et chacun de ses éléments est permutable avec chacun des éléments de G et donc de Q . Soient a^ic_k et a^jc_r deux

éléments quelconques de Q , c_k et c_r étant deux éléments de C . Nous avons :

$$a^i c_k \cdot a^j c_r = a^i a^j \cdot c_k c_r = a^j a^i \cdot c_r c_k = a^j c_r \cdot a^i c_k$$

Par conséquent, le groupe Q est abélien et le théorème est démontré.

Comme exemple de groupe semi-abélien, nous avons le groupe des quaternions. Le groupe commutateur C et le centre Z sont confondus : ± 1 . Les groupes abéliens de la décomposition sont les groupes cycliques engendrés respectivement, soit par i et j , soit par i et k , et soit par j et k . Les groupes hamiltoniens finis les plus généraux sont aussi des groupes semi-abéliens.

2. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel). — *Les systèmes d'éléments générateurs d'un groupe d'ordre fini et leurs groupes associés.*

Soit G un groupe non cyclique d'ordre fini $n > 1$. Soit k un entier > 1 et soit $B_k = \{S_1, \dots, S_k\}$ un système de k éléments indépendants générateurs du groupe G . On a donc $(S_1, \dots, S_k) = G^1$. Pour un groupe donné G , k peut prendre différentes valeurs. Soient $k_1, \dots, k_r$ ($k_1 < \dots < k_r$) ces valeurs. Les nombres $r, k_1, \dots, k_r$ sont des invariants du groupe G . Le nombre total de systèmes B_k est aussi un invariant de G , quel que soit $k = k_1, \dots, k_r$. Soit R un élément quelconque de G et soit $T_i = RS_i R^{-1}$, $i = 1, \dots, k$. Posons $RBR^{-1} = \{T_1, \dots, T_k\}$. On a $(T_1, \dots, T_k) = G$, et $\{T_1, \dots, T_k\}$ est également un système de k éléments indépendants générateurs de G . Soit C le centre de G et soit λ l'ordre de C . L'ensemble des éléments de G qui transforment un système donné $B_k = \{S_1, \dots, S_k\}$ en lui-même forme le premier groupe g_1 associé à B_k . Soit v_1 l'ordre de g_1 . Soit R un élément quelconque de g_1 , soit $RS_i R^{-1} = S_{j_i}$, $i = 1, \dots, k$, et soit $\sigma = \begin{pmatrix} S_1 & \dots & S_k \\ S_{j_1} & \dots & S_{j_k} \end{pmatrix}$. L'ensemble des substitutions σ forme le second groupe g_2 associé à B_k . Le groupe g_1 est v_1/λ fois isomorphe au groupe g_2 .

Soit 1) $B_k^1, \dots, B_k^t$ une suite comprenant t systèmes B_k jouissant des propriétés suivantes. Quels que soient les deux nombres distincts i et j de la suite $1, \dots, t$ et quel que soit l'élément R de G , $B_j \neq RB_i R^{-1}$. D'autre part, quel que soit le système B_k , il existe un système B_k^i de la suite 1) et un élément R de G , tels que $B_k = RB_k^i R^{-1}$. La suite 1) est une suite complète de représentants indépendants des systèmes B_k . Soit g_1^i le premier groupe associé au système B_k^i , $i = 1, \dots, t$, soit v_i l'ordre de g_1^i , et soit n l'ordre du groupe G . Alors le nombre total de différents

systèmes B_k est $\sum_{i=1}^t \frac{n}{v_i}$. Pour déterminer tous ces systèmes, il suffit de déterminer une suite complète 1) ainsi que le premier groupe associé à chaque système de la suite 1).

¹ Le symbole $(S_1, \dots, S_k)$ désigne le groupe engendré par les éléments $S_1, \dots, S_k$.

Soit, à présent, G un groupe d'ordre fini, sous-groupe distingué d'un groupe plus vaste G_1 . Soit C_1 l'ensemble des éléments de G_1 qui sont permutables avec chaque élément de G . C_1 est un sous-groupe de G_1 . Soit λ_1 l'ordre de C_1 . L'ensemble g_3 comprenant tous les éléments de G_1 qui transforment un système donné $B_k = \{S_1, \dots, S_k\}$ de k éléments indépendants générateurs de G en lui-même est un groupe appelé troisième groupe associé à B_k , relatif au groupe G_1 . Soit v_3 l'ordre de g_3 . Soit R_1 un élément quelconque de g_3 . Soit $R_1 S_i R_1^{-1} = S_{h_i}, i = 1, \dots, k$, et soit $\tau = \begin{pmatrix} S_1 & \dots & S_k \\ S_{h_1} & \dots & S_{h_k} \end{pmatrix}$. L'ensemble des substitutions τ forme le quatrième groupe g_4 associé au système B_k . Le groupe g_3 est v_3/λ_1 , fois isomorphe à g_4 .

3. SOPHIE PICCARD (Neuchâtel). — *Les bases du groupe de Klein généralisé et de certains groupes de Mathieu.*

Soit n un entier ≥ 2 et soit, pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$, T_{1+2^i} la substitution régulière de degré 2^n et du second ordre composée des 2^{n-1} transpositions $(j+k2^{i+1} \ j+k2^{i+1}+2^i)$, $j=1, \dots, 2^i$, $k=0, 1, \dots, 2^{n-i-1}-1$. Les substitutions T_{1+2^i} sont indépendantes et permutables deux à deux. Elles engendrent un groupe abélien régulier d'ordre et de degré 2^n dont toutes les substitutions sont du second ordre. C'est le groupe de Klein généralisé G_{2^n} . Il est à base d'ordre n et les substitutions T_{1+2^i} , $i=0, \dots, n-1$, constituent l'une de ses bases. Il existe une substitution de G_{2^n} et une seule qui transforme 1 en h quel que soit $h=1, 2, \dots, 2^n$. Soit T_h cette substitution et soit $T_h(k)$ le nombre que T_h substitue à k , quel que soit $k=1, 2, \dots, 2^n$. Soient $h = h_n 2^n + \dots + h_1 2 + h_0$ et $k = k_n 2^n + \dots + k_1 2 + k_0$ les développements à base 2 des deux nombres h et k . Les nombres $h_0, \dots, h_n, k_0, \dots, k_n$ font tous partie de l'ensemble $\{0, 1\}$. Soit $r(s)$ le plus petit nombre de la suite $0, 1, \dots, n$, tel que $h_r = 1$ ($k_s = 1$) et soit t le plus grand des deux nombres r et s . On a $T_h(k) = |h_n - k_n| 2^n + \dots + |h_{t+1} - k_{t+1}| 2^{t+1} + 1$, si $r = s = t$, et $T_h(k) = |h_n - k_n| 2^n + \dots + |h_{t+1} - k_{t+1}| 2^{t+1} + (h_t + k_t) 2^t - 1_{t-1} 2^{t-1} - \dots - 1_1 2 - 1_0 + 1$, où $1_u = k_u$, $u = 0, \dots, t-1$, si $r > s$, et $1_u = h_u$, si $r < s$.

Le nombre total de bases de G_{2^n} est $(2^n-1)(2^n-2)\dots(2^n-2^{n-1})/n!$. Quelle soit la base $B = \{S_1, \dots, S_n\}$ du groupe G_{2^n} , il existe une permutation $a_1 a_2 \dots a_{2^n}$ des nombres $1, 2, \dots, 2^n$, telle S_i est composée des 2^{n-1} transpositions $(a_{j+k2^i} \ a_{j+k2^i+2^i-1})$, $j=1, 2, \dots, 2^{i-1}$, $k=0, 1, \dots, 2^{n-i}-1$.

Le premier groupe associé à toute base B de G_{2^n} est le groupe G_{2^n} tout entier. Le troisième groupe associé à une base B de G_{2^n} relatif au groupe symétrique $\mathfrak{S}_{2^n}$ des substitutions des éléments $1, 2, \dots, 2^n$ est d'ordre $2^n n!$ et quelle que soit la permutation $i_1 i_2 \dots i_n$ des nombres $1, \dots, n$ il existe une substitution du groupe $\mathfrak{S}_{2^n}$ qui transforme S_j en S_{i_j} , $j=1, 2, \dots, n$. Soit G_{N_n} le groupe formé de toutes les substitutions de $\mathfrak{S}_{2^n}$ qui sont permutables avec le groupe G_{2^n} et soit N_n l'ordre de

ce groupe. On a $N_n = 2^n (2^n - 1) (2^n - 2) \dots (2^n - 2^{n-1})$ et on obtient toutes les bases de G_{2^n} à partir de l'une quelconque de ces bases, en la transformant par les substitutions du groupe G_{N_n} .

Nous ne connaissons aucun exemple de groupe primitif non cyclique qui soit à base d'ordre supérieur à deux. Le groupe de Mathieu de degré douze, cinq fois transitif, peut comme on sait¹ être engendré par les six substitutions suivantes: $A_1 = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7\ 8)$, $A_2 = (1\ 6\ 3\ 8)(2\ 5\ 4\ 7)$, $A_3 = (1\ 9)(2\ 7)(4\ 8)(5\ 6)$, $A_4 = (9\ 10)(2\ 4)(5\ 8)(6\ 7)$, $A_5 = (10\ 11)(2\ 6)(4\ 8)(5\ 7)$ et $A_6 = (11\ 12)(2\ 4)(5\ 6)(7\ 8)$. Soit G_i le groupe engendré par les i substitutions $A_1, A_2, \dots, A_i$, $i = 2, 3, 4, 5, 6$. Les quatre groupes primitifs G_3, G_4, G_5 et G_6 sont à base du second ordre.

4. HANS KÜNZI (Zürich). — *Riemannsche Flächen mit einfach-periodischen und doppeltperiodischen Enden.*

Eine der wichtigsten Aufgaben der Funktionentheorie besteht darin, die Wertverteilung für eine meromorphe Funktion anzugeben, die man nicht explizite, sondern nur durch die sie erzeugende Riemannsche Fläche kennt. Von der allgemeinen Lösung dieses Problems sind wir heute allerdings noch weit entfernt. Wesentliche Resultate in dieser Richtung wurden von Ullrich und Wittich erzielt, indem sie die Wertverteilung für diejenige Klasse Riemannscher Flächen bestimmten, deren Streckenkomplexe aus endlich vielen periodischen Enden bestehen. Wittich zeigte weiter, wie sich durch Asymmetrie im Streckenkomplex die Ordnung der Funktion erhöhen kann. In einer Arbeit untersuchte der Verfasser eine weitere Flächenklasse, deren Streckenkomplexe doppeltperiodische Enden aufweisen. Die Wertverteilung einer Funktion, deren Streckenkomplex sowohl einfachperiodische wie doppeltperiodische Enden aufweist, ist dadurch charakterisiert, daß trotz den vorhandenen logarithmischen Windungspunkten keine Defekte auftreten können. Im weiteren lassen sich Beispiele angeben, in denen durch Verschiebung der Grundpunkte, d. h. Verzweigungspunkte der Riemannschen Fläche, eine Ordnungserhöhung erzielt werden kann.

Eine ausführliche Darstellung erfolgt in den «Commentarii Mathematici Helvetici».

5. MAX GUT (Zürich). — *Kubische Klassenkörper über quadratisch-imaginären Grundkörpern.*

Die Mitteilung erschien in extenso in dem «Nieuw Archief voor Wiskunde», Groningen, Jahrgang 1951, S. 185.

6. CHARLES BLANC (Lausanne). — *Formules d'intégration approchée et fonctions aléatoires.*

On admet en général que toute méthode numérique approchée doit s'accompagner d'une évaluation de l'erreur commise; et de fait, assez

¹ Voir, par exemple, C. Jordan, Traité des substitutions, p. 33.

souvent, on donne en effet un moyen d'effectuer cette évaluation. Pour fixer les idées, considérons les très nombreuses formules de quadrature approchée, par lesquelles on détermine une approximation de $\int_a^b f(x)dx$ au moyen d'une combinaison linéaire de valeurs de $f(x)$ dans (a, b) ; pour chacune de ces formules, il est possible de borner l'erreur au moyen d'une borne d'une des dérivées de $f(x)$. En principe, la situation est donc parfaitement satisfaisante; en fait, on peut formuler deux objections: d'abord la dérivée en question peut ne pas exister, ou être d'un calcul très laborieux; enfin l'ordre des dérivées considérées sera en général différent pour deux formules différentes, ce qui ne permet pas les comparaisons.

Dans ces évaluations, on cherche toujours une borne de l'erreur pour un ensemble assez étroit de données (par exemple les fonctions dont la dérivée n -ième est bornée par un nombre A); or on peut aborder le problème différemment, en attribuant à l'ensemble des fonctions une distribution de probabilité (donc en considérant une fonction aléatoire) et en cherchant la distribution de l'erreur correspondante. Les paramètres de la distribution de l'erreur se calculent facilement à partir de ceux de la fonction aléatoire: par exemple, la variance de l'erreur s'exprime au moyen de valeurs de la fonction d'autocorrélation de la fonction aléatoire. On a alors la possibilité de comparer les formules en ce qui concerne la distribution de l'erreur. De plus, l'ensemble de fonctions considéré est beaucoup plus large.

Il est clair qu'une telle évaluation n'a qu'un caractère de probabilité, mais c'est en somme le seul point de vue que l'on peut adopter dans la plupart des applications, par exemple si l'on veut étudier l'erreur commise dans l'intégration numérique d'une fonction obtenue expérimentalement. Il semble enfin que l'on pourra chercher dans cette voie pour évaluer l'erreur commise dans l'intégration numérique approchée des équations différentielles ou aux dérivées partielles, où l'on ne connaît actuellement, le plus souvent, aucun moyen de borner cette erreur.

7. LOUIS LOCHER (Winterthur). — *Grundlagen einer koordinatenfreien Kurventheorie.*

Eine rein synthetische Kurvengeometrie findet sich in dem Werke *Geometrie der Lage* von G.K.Ch. von Staudt veranlagt, Ansätze finden sich auch bei F. Moebius. Als erster hat wohl Adolf Kneser in zwei Abhandlungen 1889 und 1893 in den «Mathematischen Annalen» eine strenge Grundlegung für eine synthetische Kurvengeometrie vorgeschlagen. C. Juel hat dann die Ansätze ausgebaut und manche schöne Ergebnisse erhalten.

Die Schwierigkeiten, eine elementare, anschauliche Kurvengeometrie aufzubauen, sind durch folgende Umstände gekennzeichnet: Entweder gerät man bald in das Gestrüpp mengentheoretischer Komplikationen oder man beschränkt sich von vornherein auf einen Bereich von Objekten, zum Beispiel auf algebraische Kurven, der zwar abnormale Ver-

hältnisse ausschließt, der aber doch allzu eng erscheint. Für eine anschauliche Kurvengeometrie ist zum Beispiel nicht einzusehen, warum man sich auf Objekte beschränken sollte, die in ihrer Ganzheit bereits durch ein beliebig kleines Stück bestimmt sind. Das war ja das überraschende Ergebnis der Untersuchungen von C. Juel, daß manche Sätze, die man für algebraische Gebilde als typisch betrachtete, sich als viel allgemeiner gültig erwiesen.

Die Aufgabe, eine Einführung in die Juelsche Geometrie zu schreiben, gab den Anlaß, nach einer Grundlage der Theorie zu suchen, welche gewissen bisher wenig beachteten Forderungen genügt. Die gewählten Axiome wurden im Referat kurz skizziert. Eine ausführliche Darstellung erscheint unter dem Titel *Freie Geometrie ebener Kurven* als erstes Heft der Sammlung *Elemente der Mathematik vom höheren Standpunkt aus* im Verlag Birkhäuser (Basel).

8. ROSALIND CECILY YOUNG (London). — *L'œuvre de vulgarisation dans les mathématiques pures*. — Pas reçu de manuscrit.

Es haben noch gesprochen: H. Bieri, Bern; H. Guggenheimer, Basel; G. Hauser, Luzern; Adolf Kriszten, Zürich; Heinrich Meier, Rorbas; K.F. Moppert, Basel.