

Sektion für Mathematik

Autor(en): **[s.n.]**

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden
Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences
Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **102 (1921)**

PDF erstellt am: **29.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

1. Sektion für Mathematik

Sitzung der Schweizerischen Mathematischen Gesellschaft

Samstag, den 27. August 1921

Präsident: PROF. DR. L. CRELIER (Bern)

Sekretär: PROF. DR. A. SPEISER (Zürich)

1. S. BAYS (Fribourg). — *Sur la généralisation du problème des triples de Steiner.*

Appelons n — uple une combinaison n à n , et problème des n — uples, le problème suivant, généralisant le problème des triples de Steiner:

Pour quel nombre N d'éléments, peut-on trouver un système de n — uples, contenant une fois et une seule fois chaque $(n - 1)$ — uple de ces éléments?¹

Je peux établir, pour ce problème général, les résultats suivants. La condition nécessaire pour l'existence d'un système de n — uples, est l'intégrité de tous les quotients:

$$\frac{N(N-1)(N-2)\dots(N-n+2)}{n!}, \frac{(N-1)(N-2)\dots(N-n+2)}{(n-1)!},$$

$$\dots\dots\dots, \frac{N-n+2}{2}$$

I. Il y a, quelque soit n , indéfiniment des N remplissant cette condition nécessaire. Il suffit de prendre $N = m \cdot n! + n$ (m entier positif).

II. Pour un n donné, les N remplissant cette condition nécessaire, sont tous les nombres N tels que $N - n$ n'est pas congru à -1 , suivant un module premier inférieur ou égal à n . Ainsi le problème des triples (de Steiner) est possible pour tous les N tels que $N - 3$ n'est pas $\equiv -1 \pmod{2}$ ou 3 , ce qui donne les formes $N = 6x + 1$ et $6x + 3$. Le problème des quadruples est possible pour $N = 6x + 2$ et $6x + 4$. Le problème des quintuples est possible pour tous les N tels que $N - 5$ n'est pas $\equiv -1 \pmod{2, 3 \text{ ou } 5}$; etc.

III. D'un système de n — uples avec N éléments, j'obtiens un système de $(n - 1)$ — uples avec $N - 1$ éléments,

¹ Exemple: le triple 123 contient les 3 couples 12, 13, 23, et le système de triples (de Steiner) 123, 145, 167, 246, 257, 347, 356 contient une fois et une seule fois chaque couple des 7 éléments 1, 2, ..., 7. Voir Netto. Combinatorik. Chapitre 10 p. 202.

par suite un système de $(n - 2)$ — uples avec $N - 2$ éléments, etc. Si donc, pour un certain n , il n'existe plus de systèmes de n — uples pour aucun N , il n'en existera plus pour aucun n supérieur. Mais ceci est peu probable. Pour tout $N = 6x + 1$ et $6x + 3$, il existe des systèmes de triples (de Steiner).

IV. Appelons système cyclique de n — uples, celui qui possède le groupe cyclique $\{(123 \dots N)\}$. On a le théorème: les systèmes cycliques de n — uples vont par paires de systèmes conjugués; les 2 systèmes de la même paire sont déductibles l'un de l'autre par la substitution $|x, N - x|$ et n'ont aucun n — uple commun.

Je puis donner des systèmes de quadruples ($n = 4$) et de quintuples ($n = 5$) pour les 1^{es} valeurs de N permises, et j'ai le moyen de reconnaître les systèmes de n — uples différents, c'est-à-dire ne provenant pas l'un de l'autre par une permutation des éléments. Exemple: les éléments étant 0, 1, ..., 9, 0', les 2 systèmes cycliques conjugués déterminés par:¹

01235	01269	01278	01347	01368	01579
01239	01247	01256	01348	01357	01469

sont les 2 seuls systèmes cycliques de quintuples pour 11 éléments.

2. EMILE MARCHAND (Zurich). — *Le problème fondamental de l'assurance.*

Le problème fondamental de l'assurance peut être énoncé comme suit:

„Etant donné le principe de la péréquation des ressources avec les engagements, ayant établi une hypothèse quant au développement futur d'un groupement d'assurance et étant connues les prestations futures aux adhérents, comment déterminer les primes et répartir les charges.“

Le problème formulé ainsi d'une manière aussi générale conduit à une infinité de solutions qui toutes doivent satisfaire l'équation suivante:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{r^t} \sum_{x=x_0}^{\omega} \sum_{n=0}^N \frac{1}{r^n} \left(A_{x,n}^t - M_{x,n}^t \cdot p_{x,n}^t \right) = 0 \quad ^2$$

en désignant par

r $1 + i$, i étant le taux annuel de l'intérêt,
 x l'âge des assurés au moment de leur adhésion, x_0 l'âge minimum,
 ω l'âge maximum,

¹ Chaque système est constitué des 66 quintuples découlant des 6 donnés par la permutation cyclique (012...0').

² Dr Julius Kaan: Die Finanzsysteme in der öffentlichen und in der privaten Versicherung. — Versicherungswissenschaftliche Mitteilungen des österreichisch-ungarischen Verbandes der Privat-Versicherungs-Anstalten. Neue Folge. 5. Bd. Wien 1910.

- t l'époque de l'adhésion, comptée à partir de la constitution du groupement,
- n la durée d'assurance, comptée à partir de l'adhésion de l'assuré au groupement, N la plus grande durée qui puisse intervenir,
- $M_{x,n}^t$ le nombre de personnes qui adhèrent au groupement, à l'époque t , âgées de x années, et qui en font encore partie, comme payeurs de primes, à l'époque $t+n$, âgées de $x+n$ années, avec une activité de n années,
- $p_{x,n}^t$ le montant que chacun des $M_{x,n}^t$ assurés doit verser à l'époque $t+n$,
- $A_{x,n}^t$ la valeur des versements aux assurés, à effectuer dans l'intervalle de temps $t+n$ à $t+n+1$, valeur rapportée à l'époque $t+n$, et correspondant à l'ensemble des assurés qui ont adhéré à l'époque t , à l'âge x , et pour lesquels, après n années, des droits aux prestations subsistent pour eux-mêmes ou pour leurs ayants-droit.

Tous les systèmes d'assurance doivent satisfaire cette équation et, réciproquement, de cette équation doivent dériver tous les modes de répartition des charges dans tout groupement d'assurance. Les diverses possibilités pour la répartition des charges diffèrent l'une de l'autre uniquement par la manière dont le groupement total est subdivisé en sous-groupements, tels que chacun subviennne à ses propres charges, sans apport extérieur.

En se servant d'une représentation graphique — deux systèmes de coordonnées rectangulaires dans l'espace, x, n, t : le système des dépenses et celui des recettes — il est aisé de définir les modes les plus usuels de répartition des charges. Il suffit de considérer, entre ces deux systèmes, l'équivalence par points, par droites, par plans, dans diverses positions.

Le rapporteur termine par quelques remarques concernant les principes de la capitalisation des primes et de la répartition des charges annuelles, et indique qu'il a préconisé ce dernier principe pour l'introduction des assurances sociales en Suisse.¹

3. ROLIN WAVRE (Neuchâtel). — *A propos du problème de la médiane à une courbe fermée plane.*

Considérons une courbe plane fermée C sans point multiple, 1, une direction. Il existe deux droites l_1, l_2 de direction 1 telles que C soit contenue dans la bande (l_1, l_2) et que cette bande soit de largeur minimum. C et l_1 ont en commun au moins un point A_1 , C et l_2 au moins un point A_2 . J'ai démontré (voir Ens. math. T. XXI p. 265—277 „Sur

¹ Emile Marchand: A propos de l'introduction des assurances sociales en Suisse. Contribution à l'étude des diverses possibilités pour la répartition des charges. — Bulletin de l'Association des Actuaires suisses, 16^{me} Bull. 1921.

l'équation fonctionnelle $f[\varphi_1(t)] = f[\varphi_2(t)]^a$ que l'on pouvait coordonner le mouvement de deux points mobiles, dont le premier M_1 décrit l'un des arcs $A_1 A_2$ pendant que le second M_2 décrit l'autre en restant sur une même droite mobile 1. Si l'on considère le milieu du segment $M_1 M_2$ son lieu sera appelé, selon M. Plancherel, une médiane de la courbe C relative à la direction 1. Il existe donc au moins une médiane joignant A_1 à A_2 . J'ajouterai ici la remarque suivante: l'ensemble des directions 1, telles qu'il existe une droite de direction 1 qui ait avec la courbe C plus d'un point commun et qui laisse celle-ci toute entière d'un même côté, est dénombrable.

En effet: considérons le segment déterminé sur une droite 1 par le premier et le dernier point commun à 1 et C (ces points existent). Deux segments correspondant à deux valeurs différentes de 1 n'ont aucun point commun si ce n'est une extrémité commune et la somme des longueurs de tous ces segments est inférieure à une borne finie, à savoir le périmètre du polygone convexe formé par un nombre fini de droites 1. Dès lors le nombre des segments de longueur supérieure à $\frac{1}{n}$ est fini quelque soit $n = 1, 2, 3, \dots$. Il en résulte que l'ensemble considéré est dénombrable.

Dans le problème de la médiane, sauf pour une infinité dénombrable de valeurs de 1, les points A_1 et A_2 sont uniques sur 1₁ et 1₂.

4. JULES CHUARD (Lausanne). — *A propos des homologies de H. Poincaré.*

La notion d'homologie est fondamentale en Analysis-Situs. Pour la définir, l'auteur envisage des surfaces fermées de l'espace usuel, qu'il suppose triangulées et orientées de manière à faire apparaître un polyèdre de α_0 sommets, α_1 arêtes et α_2 faces. Il en tire les tableaux de Poincaré: T_1 de rang ϱ_1 et T_2 de rang ϱ_2 .

A la matrice T_1 , il associe un système d'équations linéaires et homogènes, le système A.

Il a démontré, dans sa thèse de doctorat, que:

1. Le système A possède un système fondamental de μ solutions en nombres 0, ± 1 et -1 ($\mu = \alpha_1 - \varrho_1$).

2. A toute solution entière du système A correspond un contour fermé et réciproquement.

3. Si Γ_k ($k = 1, 2, \dots, \alpha_2$) sont les contours limitant les faces, et si la surface est bilatère, l'on peut former un système fondamental avec ϱ_2 solutions Γ_k et $\lambda = \alpha_1 - \varrho_1 - \varrho_2$ autres solutions, de sorte que toute solution entière peut se mettre sous la forme

$$(1) \quad C = \sum_{l=1}^{\lambda} t_l C_l + \sum_{k=1}^{\varrho_2} \tau_k \Gamma_k$$

les t_l et les τ_k étant des entiers.

4. Si la surface est unilatère, le même système de solutions est complet. Il existe alors des solutions entières de la forme (1) dans lesquelles les τ_k sont des fractions multiples de $\frac{1}{2}$.

Les homologies fondamentales étant $\Gamma_k \sim 0$ toutes les autres en résultent. Elles correspondent aux solutions du système A qui dépendent des colonnes de la matrice T_2 uniquement. De $C \sim 0$ on conclut que

$$(2) \quad C = \sum_{k=1}^{Q^2} \tau_k \Gamma_k$$

Les homologies ont toutes les propriétés des solutions d'un système d'équations linéaires et homogènes. Par la division des termes d'une homologie par un entier, on peut être amené, dans le cas d'une surface unilatère seulement, à une expression (2) dans laquelle les τ_k sont des fractions. L'homologie $C \sim 0$ est dite dans ce cas „par division“. Dans tous les autres cas elle est dite „sans division“.

5. C. CARATHÉODORY (Smyrna). — *Ueber allgemeine Legendre'sche Transformationen.*

Autoreferat nicht eingegangen.

6. G. JUVET (Neuchâtel). — *Sur la méthode de la variation des constantes en mécanique céleste.*

L'auteur expose une démonstration qu'il croit nouvelle du résultat bien classique de l'intégration d'un système canonique, dont la fonction caractéristique est la somme de deux fonctions $H_1 + R$; en supposant qu'on sache intégrer le système canonique dont H_1 est la fonction caractéristique, il est possible de ramener le problème posé à un problème analogue, mais où la fonction caractéristique est R (fonction perturbatrice). Le caractère essentiel de la démonstration employée ici, réside dans le fait qu'au lieu de faire des calculs d'élimination où interviennent les crochets de Lagrange, on utilise les propriétés très simples des transformations canoniques.

7. R. WAVRE (Neuchâtel). — *Remarques sur l'équation de Fredholm.*

Autoreferat nicht eingegangen.

8. G. JUVET (Neuchâtel). — *Sur les équations aux dérivées fonctionnelles et la théorie de la relativité.*

Il se présente dans la théorie de la relativité des problèmes de variation où interviennent des intégrales multiples (principes de moindre action). Soit à tirer les conséquences d'un problème lagrangien dont la donnée s'écrit:

$$\delta \int \cdots \int F \left(x_1, x_2 \dots x_k; y_1, y_2 \dots y_n; \frac{\delta y_1}{\delta x_1}, \dots, \frac{\delta y_i}{\delta x_j}, \dots, \frac{\delta y_n}{\delta x_k} \right) dx_1 dx_2 \dots dx_k = 0$$

M. Volterra¹ a montré que les équations qui définissent les fonctions inconnues $y_1, y_2 \dots y_n$ peuvent prendre une forme canonique. Nous avons montré que la fonctionnelle $I = \int \dots \int F dx \dots dx_k$ satisfait à l'équation aux dérivées fonctionnelles partielles :

$$I'_n + H \left(x_1, \dots x_k, y_1 \dots y_n; \frac{dI}{d(y_1, x_1)}, \dots \frac{dI}{d(y_i, x_j)}, \dots \frac{dI}{d(y_n, x_k)} \right) = 0$$

où H est une fonction qui dépend des x_j , des y_i et des $p^{ij} = \frac{\delta F}{\delta \left(\frac{\delta y_i}{\delta x_j} \right)}$

(transformation de Poisson-Hamilton); les expressions $\frac{dI}{d(y_j, x_i)}$ qu'on a mises à la place des p^{ij} dans l'expression de H , sont les dérivées fonctionnelles partielles de la fonctionnelle I par rapport à y_i et dans la direction des x_j ; I'_n est la dérivée normale de la fonctionnelle I .

M. Volterra, dans le mémoire cité, avait obtenu des résultats fort élégants en supposant que F dépend des $\frac{\delta y_i}{\delta x_j}$ par l'intermédiaire des déterminants fonctionnels $\frac{D(y_{i_1}, y_{i_2} \dots y_{i_k})}{D(x_1, x_2 \dots x_k)}$; en particulier, la fonction H se réduit dans ce cas à une constante et les résultats de Jacobi peuvent se généraliser aisément. Dans le cas qui nous occupe, H n'est certainement pas une constante. (Pour de plus amples détails, voir les C. R. de la Société suisse de physique pour 1921, in Arch. de Genève.)

9. CHR. MOSER (Bern). — Ueber Gleichungen für eine sich erneuernde Gesellschaft mit Anwendung auf Sozialversicherungskassen.

Es mögen H Personen zu einer Gesellschaft zusammentreten. Aus verschiedenen Gründen (Tod usw.) wird die Gesellschaft, die wir zunächst als eine geschlossene, sich nicht erneuernde voraussetzen, nach der Zeit t kleiner geworden sein. Die Zahl der Mitglieder sei alsdann noch $Hp(t)$, wo $p(t)$ für ein ursprüngliches Mitglied die Wahrscheinlichkeit darstellt, der Gesellschaft nach der Zeit t noch anzugehören, so dass $p(0) = 1$ und $p(\infty) = 0$ wird. Die Funktion $p(t)$ sei bekannt.

Erneuert sich die Gesellschaft fortwährend in dem Masse, wie sie abnimmt, und zwar durch Erneuerungselemente, die in ihrer Zusammensetzung der Eintrittsgeneration, wie sie zur Zeit ihres Eintrittes war, entsprechen, und lässt sich ferner die Erneuerung zur Zeit τ durch

¹ Rendiconti dei Lincei, VI, 1890, p. 127.

$Hf(\tau) d\tau$ darstellen, so findet man, dass, unabhängig von der Basis H , für alle Werte von t die Gleichung erfüllt sein muss:

$$1 = p(t) + \int_0^t f(\tau) p(t - \tau) d\tau \dots (I).$$

Die Gesellschaft möge zum Zwecke der Sozialversicherung, zur gemeinsamen Tragung eines Risikos, z. B. zur Sicherstellung von Witwenrenten gebildet worden sein, es handle sich etwa um eine Witwenversicherungskasse, die der Witwe eines verstorbenen Gesellschaftsmitgliedes in der Zeit 1 die Witwenrente 1, also im Zeitelement $d\tau$ die Witwenrente $1 \times d\tau$ verabfolgt (vgl. Dr. O. Schenker in Heft 11 der Mitt. schweiz. Versicherungsmathematiker, Bern 1916). Ist $H\omega(t)$ die Zahl aller Witwen, die aus der geschlossenen Gesellschaft $Hp(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$, hervorgegangen und zur Zeit t noch leben und rentenberechtigt sind, stellt mithin $\omega(t)$ die Wahrscheinlichkeit für ein ursprüngliches Mitglied dar, zur Zeit t als Gesellschaftsmitglied schon verstorben zu sein, aber eine noch lebende, rentenberechtigte Witwe hinterlassen zu haben, so lässt sich für die offene, stets sich erneuernde Gesellschaft die Zahl $H\Omega(t)$ der Witwen auf Grund der Gleichung bestimmen:

$$\Omega(t) = \omega(t) + \int_0^t f(\tau) \omega(t - \tau) d\tau \dots (II).$$

In entsprechender Weise kann das Deckungskapital $HZ(t)$ der offenen, stets sich erneuernden Gesellschaft, wenn es für die geschlossene Gesellschaft $Hz(t)$ beträgt, vermittelst der Gleichung gefunden werden:

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t f(\tau) z(t - \tau) d\tau \dots (III).$$

Der Uebergang zum Beharrungszustand ist von besonderem Interesse. Bezeichnet man nämlich die konstante Nettoprämie eines Mitgliedes für die Zeit 1 mit P , also für die Zeit $d\tau$ mit $Pd\tau$, und den Wert des Kapitals, das mit seinen Zinsen in der Zeit 1 zu 1 anwächst, mit v , so dass

$$P = \frac{\int_0^\infty v^t \omega(t) dt}{\int_0^\infty v^t p(t) dt} \dots (IV)$$

ist, und bedenkt man, dass für die Zeit des Beharrungszustandes die Funktionen f , Ω und Z sich Konstanten nähern müssen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{1}{\int_0^{\infty} p(t) dt}, \\ \beta &= \lim_{t \rightarrow \infty} \Omega(t) = \frac{\int_0^{\infty} \omega(t) dt}{\int_0^{\infty} p(t) dt}, \\ \gamma &= \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = \frac{\int_0^{\infty} z(t) dt}{\int_0^{\infty} p(t) dt}, \end{aligned} \right\} \dots\dots (V)$$

so folgen die Beziehungen:

$$e^{\frac{\beta - P}{\gamma}} - 1 = i \dots\dots\dots (VI)$$

und entsprechend:

$$P \int_0^{\infty} p(t) dt + \delta \int_0^{\infty} z(t) dt = \int_0^{\infty} \omega(t) dt \dots\dots (VII),$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen,

$i = \frac{1}{v} - 1$, den Zinsfuss, und

$\delta = \text{Log}(1 + i)$, den logarithmischen Diskont bedeuten.

Zur Zeit des Beharrungszustandes der Kasse ist das Verhältnis R zwischen den Einnahmen aus Zinsen des Deckungskapitals einerseits und aus Prämien andererseits gegeben durch

$$R = \gamma \cdot \delta \cdot \frac{1}{P} = \frac{\int_0^{\infty} z(t) dt}{\int_0^{\infty} p(t) dt} \cdot \delta \cdot \frac{\int_0^{\infty} v^t p(t) dt}{\int_0^{\infty} v^t \omega(t) dt} \dots\dots (VIII).$$

Man sieht, wie leicht und elegant die wichtigen Grössen, die für die Zeit des Beharrungszustandes gelten, ermittelt werden können. Ganz analoge Gleichungen müssen sich auch ergeben, wenn es sich um andere Risiken, z. B. das Invaliditätsrisiko, oder um Kombinationen von verschiedenen Risiken handeln würde.