

Mathematische Sektion

Autor(en): **Fueter / Grossmann, M.**

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden
Gesellschaft = Actes de la Société Helvétique des Sciences
Naturelles = Atti della Società Elvetica di Scienze Naturali**

Band (Jahr): **94 (1911)**

PDF erstellt am: **01.06.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

I

Mathematische Sektion

zugleich Versammlung der Schweizerischen Mathematischen
Gesellschaft

Sitzung : Dienstag, den 1. August 1911

Präsident : Herr Prof. Dr. Fueter, Basel.

Sekretär : » Prof. Dr. M. Grossmann, Zürich.

1. M. le prof. Dr L. KOLLROS, Zurich : *Sur un théorème de Steiner.*

M. Kollros, démontre, par les méthodes élémentaires de la géométrie synthétique, les principales propriétés de l'*hypocycloïde à 3 rebroussements*, h , que Steiner a énoncées sans démonstration (Crelle 53) et que Cremona a déduites de la théorie générale des courbes planes (Crelle 64)¹.

Il communique en outre quelques résultats de ses recherches relatives à une surface de 6^{me} ordre et de 4^{me} classe, τ qui peut être considérée comme une généralisation de l'hypocycloïde h . Cette surface a 4 *points aiguilles* aux sommets d'un tétraèdre régulier t ; le cône tangent en un de ces points se réduit à 2 plans imaginaires se coupant suivant une hauteur du tétraèdre; les quatre hauteurs passent par le centre d'une sphère quadruplement tangente à τ .

L'hypocycloïde h touche la droite à l'infini aux deux points cycliques; elle est l'homologue du cercle inscrit au triangle des rebroussements dans la transformation quadratique dont les points correspondants sont les deux foyers réels des coniques tangentes aux trois côtés du triangle.

¹ M. C. WIRTZ a fait une étude analogue dans sa thèse: *Die Steiner'sche Hypozykloïde.*

La surface τ touche la sphère circonscrite au tétraèdre t le long du cercle imaginaire à l'infini; elle est l'homologue de la sphère inscrite à t dans la transformation cubique dont les points correspondants sont les deux foyers des quadriques de *révolution* tangentes aux 4 faces du tétraèdre.

Les équations homogènes des deux figures h et τ présentent des analogies frappantes. L'équation de h , rapportée au triangle des rebroussements est, en coordonnées ponctuelles:

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} = 0;$$

elle peut s'écrire sous la forme rationnelle :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 & 1 & \frac{1}{y} \\ 1 & 1 & 0 & \frac{1}{z} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou en développant

$$(xy + yz + zx)^2 = 4xyz(x + y + z).$$

$xy + yz + zx = 0$ représente le cercle circonscrit au triangle, c'est-à-dire le lieu des foyers des paraboles inscrites, ou encore le lieu des points tels que les pieds des perpendiculaires abaissées sur les trois côtés du triangle soient en ligne droite : l'enveloppe de ces droites est homothétique à h .

L'équation de τ rapportée au tétraèdre des points aiguilles est, en coordonnées ponctuelles :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{y} \\ 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{1}{z} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{t} \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} & \frac{1}{t} & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$(xyz + yzt + ztx + txy)^2 = 3xyzt(xy + xz + xt + yz + yt + zt).$$

$xyz + yzt + ztx + txy = 0$ représente le lieu des foyers des paraboloïdes de révolution inscrits au tétraèdre, ou encore le lieu des points, tels que les pieds des perpendiculaires abaissées sur les quatre faces soient dans un même plan. Il serait intéressant d'examiner si l'enveloppe de ces plans est homothétique à τ .

Discussion : MM. *Fueter* et *Toeplitz*.

2. Herr Dr. O. TOEPLITZ (Göttingen) : a. *Ueber Integralgleichungen*. b) *Ueber einige Aufgaben der Analysis situs*.

a) Die neuen Untersuchungen von *Hilbert*, die die Theorie der linearen Gleichungssysteme und der orthogonalen Transformation der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen in ihrer vollen Allgemeinheit angreifen und auf die strenge Analogie der Resultate mit den entsprechenden der Algebra verzichten, haben diese junge Disziplin über den Standpunkt der Integralgleichungstheorie und ihres Analogons bei unendlich vielen Variablen (vgl. den 2. Teil von Hilberts 4. Note) um einen wesentlichen Schritt hinausgeführt. Der Vortragende erläutert die neuen Umstände, denen Hilbert hier begegnet ist, an einfachen Beispielen und erwähnt dann noch kurz die neuesten Untersuchungen von *Hellinger* und ihm selbst, die diese Theorie von Hilbert fortgeführt haben.

b) Der Vortragende erzählt von zwei Aufgaben der Analysis situs, zu denen er gelangt ist, und dann von der folgenden dritten, deren Lösung ihm nur für konvexe Kurven gelungen ist : Auf jeder einfach geschlossenen stetigen Kurve in der Ebene gibt es vier Punkte, welche ein Quadrat bilden.

Diskussion : Die Herren *Fueter*, *Speiser*, *Laemmle*, *Stäckel*, *Grossmann*.

3. M. le prof. Dr W. H. YOUNG, F. R. S. (Cambridge-Genève) : *Neue Resultate in der Theorie der Fourier'schen Reihe*.

M. W. H. Young (Cambridge-Genève) referirt über einige seiner *neuen Resultate in der Theorie der Fourier'schen Reihen*.

Auf die Frage « Unter welchen Bedingungen ist eine trigonometrische Reihe eine Fourier'sche Reihe? » giebt er folgende Antworten :

a) wenn die obere und untere Grenzfunktion $U(x)$ und $L(x)$ zwischen endlichen Schranken liegen, wobei $U(x)$ und $L(x)$ die

$$\overline{\lim}_{m=\infty} \sum_{n=1}^m \{a_n \cos nx + b_n \sin nx\}$$

bedeuten.

b) wenn mit Ausnahme einer abzählbaren Menge x -Punkte, die Bedingung a) erfüllt ist, und übrigens $\int |U(x)| dx$ und $\int |L(x)| dx$ existieren.

Referent deutet auf die Bedingung von Riesz-Fischer im Falle, dass die Funktion $f(x)$, deren Fourier'sche Reihe in Betracht kommt das Quadrat summabel hat, und erwähnt, dass im allgemeinen Fall Bedingungen dieser Art nicht aufgestellt werden können. Im Anschluss daran führt er trigonometrische Reihen vor, die auf's Engste mit einer Fourier'schen Reihe

$$\frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

zusammenhängen, ohne selbst Fourier'sche Reihen zu sein, ins Bes. die verwandte Reihe

$$\sum_{n=1} \{b_n \cos nx - a_n \sin nx\}$$

und die Reihe

$$\sum_{n=1} \{a_{n+1} \cos nx + b_{n+1} \sin nx\}.$$

Erwähnenswert ist es dagegen, dass die Reihe

$$\sum_{n=1} n^{-q} (b_n \cos nx - a_n \sin nx), \text{ wo } 0 < q,$$

stets eine Fourier'sche Reihe ist, wie auch die Reihen

$$\sum_{n=1} n^q (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^q (b_n \cos nx - a_n \sin nx),$$

falls $0 < q < d$, und $| (f(x) - f(y))/(x - y)^d | < B$, wo B eine endliche Konstante ist. Ein anderer Satz derselben Art besagt, dass, wenn A_n und B_n , wie a_n und b_n , Fourier'sche Konstanten sind, die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{ (a_n A_n + b_n B_n) \cos nx + (a_n B_n - A_n b_n) \sin nx \}$$

eine Fourier'sche Reihe ist.

Als Beitrag zu der Konvergenztheorie gibt Referent eine Bedingung für die Konvergenz bez. Divergenz der verwandten Reihe, welche derjenigen von de la Vallée Poussin für die Konvergenz der Fourier'schen Reihe selbst entspricht. Ist nämlich

$$\frac{1}{u} \int_0^u \{ f(x+u) - f(x-u) \} du$$

eine Funktion mit beschränkter Schwankung, so konvergiert oder divergiert die verwandte Reihe gegen

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{\pi/n}^{\infty} \left(\frac{f(x+u) - f(x-u)}{u} \right) du$$

falls dieser Limes bestimmt ist, sonst oscilliert die Reihe. Die Untersuchung führt übrigens auf hinreichende Bedingungen von ziemlich grosser Tragweite für die Konvergenz im Cesaro'schen Sinne, sowohl der Fourier'schen wie auch der verwandten Reihe.

Zu den Sätzen aus der Integrationstheorie, wird hervorgehoben, dass die Konvergenz, noch mehr die gleichmässige Konvergenz, eine ganz untergeordnete Rolle spielt. Die Gleichung

$$\int_c^z f(x) g(x) dx = \frac{1}{2} a_0 \int_c^z g(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_c^z (a_n \cos nx + b_n \sin nx) g(x) dx$$

besteht nämlich in folgenden Fällen :

1) g hat beschränkte Schwankung im endlichen oder unendlichen Intervall (c, z) und im letzteren Falle $\lim_{z=\infty} g(z) = 0$ ist;

2) f hat beschränkte Schwankung und g ein absolut konvergentes Integral im endlichen oder unendlichen Intervall (c, z) ;

3) f^{1+p} und $g^{1+1/p}$ haben für $0 < p \leq 1$ absolut konvergente Integrale, und wenn $p < 1$, die Konvergenz im Cesaro'schen Sinne verstanden ist.

Endlich gibt Referent einen Entwurf einer allgemeinen Theorie der Summationsverfahren für die Fourier'sche Reihe, welche diejenigen von Cesàro-Fejér, de la Vallée Poussin, Poisson u. a. umschliessen. Diese Verfahren zerfallen in zwei Abteilungen:

α) Folgen endlicher Reihen,

β) Folgen unendlicher konvergenter Reihen.

Die Methode stützt sich auf die schon besprochene Integration im Falle 1) mit $z = \infty$. In der Gleichung

$$\int_0^\infty \{f(x+kt) + f(x-kt)\} U_k(t) dt = \frac{1}{2} a_0 \int_0^\infty U_k(t) dt + \sum_{n=1}^\infty (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \int_0^\infty U_k(t) \cos nkt dt$$

lassen wir k gegen Null abnehmen. Wenn U von k unabhängig ist, so nimmt die linke Seite unter leicht angebbaren Bedingungen die Gestalt eines konstanten Vielfachen des ersten der Ausdrücke

$$\frac{1}{2} f(x+0) + \frac{1}{2} f(x-0), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \{F_1(x+h) - F_1(x-h)\}/2h, \\ \lim_{h \rightarrow 0} \{G_2(x+h) + G_2(x-h)\}/2h^2$$

an, welcher bestimmt und endlich ist, wobei

$$F_1(x) = \int_0^x f(x) dx, \quad F_2(x) = \int_0^x dx \int_0^x f(x) dx, \dots \\ G_2(x+h) = F_2(x+h) - F_2(x) - hF_1(x), \text{ u. s. w.}$$

Die Methode auf die abgeleiteten Reihen der Fourier'schen Reihe angewandt, giebt unter geeigneten Bedingungen die entsprechenden Ableitungen $f', f'' \dots$

4. Herr Dr. L. LAEMMEL: *Paradoxie in der Wahrscheinlichkeits-Rechnung.*

Als Paradoxie wird die Tatsache erklärt, dass ein gegebenes Problem der Wahrscheinlichkeits-Rechnung häufig mehrere von einander verschiedene und dennoch richtige Lösungen hat. Es zeigt sich, dass dies eine allgemeine Erscheinung ist und dass für die eindeutige Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten die Ausführung des sogenannten Hypothesen-Prozesses notwendig ist, welcher Annahmen zu machen hat über das selektorische Prinzip, welches das Zustandekommen des Ereignisses beherrscht.

5. Herr Prof. Dr. R. VON MISES: *Ueber neuere Probleme der Mechanik.*

Der Vortragende knüpft an die bedeutenden Leistungen an, welche die Schweizer sowohl in der *rationellen* als in der *technischen* Mechanik aufzuweisen haben. Er zeigt, wie diese beiden Forschungsrichtungen insbesondere in der Mechanik der *kontinuierlichen Massen* nebeneinander sich entwickeln müssen. Ueber die gewöhnliche Elastizitätstheorie hinaus hat die rationale Mechanik bisher zwei Ansätze zur Verfügung, welche die an festen Körpern beobachteten Erscheinungen erklären sollen: die Plastizitätstheorie von *Saint-Venant*, die bei den Mathematikern stark in Vergessenheit geraten ist und von den Technikern neuerdings in rudimentären Formen wieder aufgegriffen wurde; dann die von *Boltzmann* und *Volterra* begründete Theorie der elastischen Nachwirkung. Den Vorstellungskreis der Mechanik erweiterte in den letzten Jahren *Duhem*, indem er thermodynamische Begriffe in die Ansätze mit aufnahm. — Schliesslich äusserte sich der Vortragende über das in der Hydrodynamik aktuelle Problem der Turbulenz, und weist auf dessen Zusammenhang mit den Elementen der statistischen Mechanik hin.

6. M. le Dr M. PLANCHEREL, Fribourg: *Sur un procédé de sommation des séries de Laplace et des séries de Bessel.*

Soit $f(x)$ une fonction de la variable réelle x , définie dans

l'intervalle $(-1, +1)$ et assujettie à la seule condition d'être intégrable en valeur absolue dans l'intervalle $(-1, +1)$. $P_k(x)$ désignant le $k^{\text{ième}}$ polynôme de Legendre et

$$a_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_k(x) dx$$

la série

$$a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k P_k(x)$$

est la série de Legendre de $f(x)$. Posons

$$S_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+2)(n+3) \dots (n+k+1)} a_k P_k(x)$$

$$\Sigma_n(x) = a_0 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{(n+1)(n+2) \dots (n+k)} a_k P_k(x)$$

on démontre que

$$\lim_{n=\infty} \inf S_n = \lim_{n=\infty} \inf \Sigma_n, \quad \lim_{n=\infty} \sup S_n = \lim_{n=\infty} \sup \Sigma_n$$

Il suffit donc d'étudier l'une de ces deux expressions. Or, ici, c'est S_n qui se prête le mieux au calcul.

Théorème. $S_n(x)$ converge vers $f(x)$ en tout point de continuité de la fonction. La convergence est uniforme dans tout intervalle entièrement intérieur à un intervalle de continuité de f . En tout point de discontinuité de première espèce, $S_n(x)$ converge vers

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

Plus généralement, $S_n(x)$ converge vers la dérivée de l'intégrale indéfinie de $f(x)$ en tout point où cette dérivée existe.

Dans ce théorème comme dans les suivants, nous supposons pour abrégé, que le point x est un point intérieur de l'intervalle $(-1, +1)$. Je note encore le théorème suivant :

Théorème. Si $f(x)$ est bornée dans un intervalle (α, β) , $S_n(x)$ reste compris dans (α, β) entre les limites inférieure et supérieure de $f(x)$ dans ce même intervalle.

Ce qui constitue le principal avantage du procédé de sommation que nous étudions et ce qui le distingue du procédé de

Cesàro employé par M. Féjer, c'est qu'il permet d'approcher les dérivées de $f(x)$, là où elles existent. Supposons encore $x \neq \pm 1$, nous avons en effet le

Théorème. $\frac{d^p S_n}{dx^p}$ converge, pour $n = \infty$, vers $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$ en tout point où cette dérivée existe. La convergence est uniforme dans tout intervalle entièrement intérieur à un intervalle de continuité de $\frac{d^p f(x)}{dx^p}$. Plus généralement, $\frac{d^p S_n}{dx^p}$ converge vers la dérivée généralisée d'ordre p , là où cette dérivée généralisée existe.

Tous ces théorèmes sont des conséquences immédiates de théorèmes relatifs à l'application du procédé de sommation S_n à la série de Laplace. Le même procédé conduit à des résultats intéressants dans le cas des séries de Bessel. Je n'insiste pas là-dessus. La démonstration de ces théorèmes paraîtra prochainement dans les *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*.

Je note encore que le procédé de sommation Σ_n est dû à M. de la Vallée-Poussin, qui l'a appliqué aux séries de Fourier.

Discussion : MM. Young et Toeplitz.

7. M. G. DUMAS, Zurich : *Sur la résolution des singularités des surfaces*.

M. G. Dumas parle de ses recherches relatives à la résolution des singularités des surfaces.

Prenant un exemple, il considère l'équation

$$1) \quad Az^{30} + Bx^{28}z^{15} + Cx^{15}y^{10} + Dx^{12}y^{12} + Ey^{16}z^6 + Fx^{14}y^{18}z^3 = 0, \\ (A, B, C, D, E \neq 0),$$

à laquelle il fait correspondre une certaine surface polyédrale Π ¹. Prenant ensuite, sur Π , la sommet A correspondant au terme de coefficient A, il établit, relativement à ce dernier point et par le moyen d'un trièdre en rapport avec Π , la substitution :

$$(2) \quad \begin{cases} x = \xi^6 \eta^2 \zeta^3 \\ y = \xi^{12} \eta^3 \zeta^5 \\ z = \xi^7 \eta^2 \zeta^3 \end{cases}$$

¹ Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 13 mars 1911, p. 682.

qui, appliquée à (1), transforme cette équation en une autre

$$(3) \quad A + C\xi^5 + D\xi^6\zeta^6 + E\xi^{24}\zeta^8 + B\xi^{14}\eta^{60}\zeta^{49} + F\xi^{111}\eta^{28}\zeta^{51} = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(4) \quad \varphi(\xi', \zeta) + \eta\psi(\xi, \eta, \zeta) = 0,$$

où φ et ψ sont respectivement en ξ, ζ et en ξ, η, ζ des polynômes entiers.

Mais de (2), on déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi = \frac{z}{x} \\ \eta = \frac{z^6}{xy^3} \\ \zeta = \frac{z^6}{x^3y^2} \end{array} \right.$$

La substitution (2) est ainsi *réversible* et les surfaces (1) et (3) se correspondent point par point.

Si dans (3), respectivement (4), on fait $\eta = 0$, on obtient

$$(5) \quad \varphi(\xi, \zeta) = 0$$

Les points de (4) situés dans le voisinage de la courbe (5) ont donc comme correspondants sur (1) des points constituant dans le voisinage de l'origine une partie de la surface.

L'exemple précédent montre ainsi le rôle des surfaces polyédrales II dans la réduction des singularités des surfaces.

Discussion: MM. *Fueter, Young, Geiser*.

8. M. Lucien BAATARD, Genève : *Extraction d'une racine quelconque d'un nombre quelconque A.*

I

A est une puissance $n^{\text{ième}}$ parfaite.

Posons

$$A = a^n$$

1° Considérons une valeur approchée *par excès* de a et représentons-la par $a + \alpha$.

On a :

$$\frac{A}{(a + \alpha)^{n-1}} = a - (n-1)\alpha + \varepsilon + \frac{r}{(a + \alpha)^{n-1}} \quad [r < (a + \alpha)^{n-1}]$$

$$\frac{a - (n-1)\alpha + \varepsilon + (n-1)(a + \alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon}{n}$$

Le quotient incomplet de cette division est la racine cherchée a ou une valeur approchée par excès de cette racine.

Application :

$$\sqrt[5]{1\,889\,568}; a + \alpha = 20; 1889568 : 20^4 = 11 \text{ quot. inc.};$$

$$\frac{11 + 4 \cdot 20}{5} = 18 \text{ quot. inc.} \quad 18 = \sqrt[5]{1\,889\,568}$$

2° Représentons par $a + \alpha$ une valeur approchée *par défaut* de a .

Après calculs, on obtient

$$\frac{A}{(a - \alpha)^{n-1}} = a + (n-1)\alpha + \varepsilon' + \frac{r}{(a - \alpha)^{n-1}} \quad [r' < (a - \alpha)^{n-1}]$$

$$\frac{a + (n-1)\alpha + \varepsilon' + (n-1)(a - \alpha)}{n} = a + \frac{\varepsilon'}{n};$$

même conclusion que plus haut.

Application :

$$\sqrt[4]{131\,079\,601}; a - \alpha = 100; 131079601 : 100^3 = 131 \text{ quot. inc.};$$

$$\frac{131 + 3 \cdot 100}{4} = 107 \text{ quot. inc.} \quad 107 = \sqrt[4]{131\,079\,601}$$

Formule (ω). Le nombre v_1 , donné par la formule (ω)

$$v_1 = \frac{p + (n-1)(a \pm \alpha)}{n} \text{ quot. inc.,}$$

est ou $\sqrt[n]{A}$ ou une valeur approchée par excès de $\sqrt[n]{A}$; dans ce dernier cas, on opère sur v_1 comme sur $a \pm \alpha$ et ainsi de suite.

Dans cette formule, $a \pm \alpha$ représente une valeur approchée par excès ou par défaut de $\sqrt[n]{A}$ et p , le quotient incomplet de la division de A par $(a \pm \alpha)^{n-1}$.

II

$\sqrt[n]{A}$ est un nombre irrationnel.

Si l'on représente par x et $x + 1$ les deux nombres consécutifs entre les $n^{\text{ièmes}}$ puissances desquels se trouve A , la formule A, la formule (ω) donne x ou une valeur approchée par excès de x . On le démontre en posant $A = x^n + h$ et en remplaçant a par x dans les calculs précédents. Pour obtenir $\sqrt[n]{A}$ à moins de $\frac{1}{z}$ près, par défaut, on se sert de la relation

$$\sqrt[n]{A} = \frac{1}{z} \sqrt[n]{z^n A}$$

Application : calcul de $\sqrt[3]{10}$ à moins de $\frac{1}{100}$ près.

$$\sqrt[3]{10} = \frac{1}{100} \sqrt[3]{10\,000\,000}; a - a = 200;$$

$$10\,000\,000 : 200^2 = 250;$$

$$\frac{250 + 2.200}{3} = 216 \text{ quot. inc.};$$

$$216^2 = 46656;$$

$$10\,000\,000 : 46\,656 = 214 \text{ quot. inc.}; \frac{214 + 2.216}{3} = 215 \text{ quot. inc.}$$

$$2,15 = \sqrt[3]{10}, \text{ à moins de } \frac{1}{100} \text{ près, par défaut.}$$

Utilisation des quotients complets: formule (ω') p' et y , étant les quotients complets des divisions qui donnent p et v , la formule (ω')

$$y = \frac{p' + (n-1)(a \pm a)}{n}$$

donne un nombre fractionnaire qui exprime la valeur de $\sqrt[n]{A}$ avec une erreur par excès; par des applications successives de cette formule, on obtient des valeurs de plus en plus voisines de $\sqrt[n]{A}$ et qui sont toutes $> \sqrt[n]{A}$.

Application : reprenons $\sqrt[3]{10}$.

$$a - a = 2; \frac{\frac{10}{4} + 2 \cdot 2}{3} = \frac{13}{6} = 2,166\dots$$

$$10: \left(\frac{13}{6}\right)^2 = \frac{360}{169}; \frac{\frac{360}{169} + 2 \cdot \frac{13}{6}}{3} = \frac{3277}{1521} = 2,1545\dots$$

On sait que

$$\sqrt[3]{10} = 2,1544\dots$$

Racine carrée. L'application des formules (ω) et (ω') à la racine carrée donne lieu à diverses remarques. Les exemples suivants démontrent la supériorité de (ω') — comme simplicité et rapidité — sur le calcul au moyen du développement de $\sqrt{A}$ en fraction continue

$$\sqrt{2}.$$

Réduites :

$$\frac{1}{1}; \frac{3^*}{2}; \frac{7}{5}; \frac{17^{**}}{12}; \frac{41}{29}; \frac{99}{70}; \frac{239}{169}; \frac{577^{***}}{408}; \frac{1393}{985}; \frac{3363}{2378}; \frac{8119}{5741}; \frac{19601}{13860};$$

$$\frac{47\,321}{33\,461}; \frac{114\,243}{80\,782}; \frac{275\,807}{195\,025}; \frac{665\,857^{****}}{470\,832}; \dots$$

$$(\omega') \quad \frac{3}{2}; \frac{17}{12}; \frac{577}{408}; \frac{665\,857^{****}}{470\,832}; \dots$$

$$\sqrt{11}$$

Réduites :

$$\frac{3}{1}; \frac{10^*}{3}; \frac{63}{19}; \frac{199^{**}}{60}; \frac{1257}{379}; \frac{3970}{1197}; \frac{25077}{7561}; \frac{79201^{***}}{23880}; \dots$$

$$(\omega') \quad \frac{10}{3}; \frac{199}{60}; \frac{79\,201}{23\,880}; \dots$$

$$\sqrt{15}$$

Réduites :

$$\frac{3}{1}; \frac{4^*}{1}; \frac{27}{7}; \frac{31^{**}}{8}; \frac{213}{55}; \frac{244}{63}; \frac{1677}{433}; \frac{1921^{***}}{496}; \dots$$

$$(\omega') \quad a - a = 3 \frac{4}{1}; \frac{31}{8}; \frac{1921}{496}; \dots$$

$$a + a = 4 \frac{31}{8} ; \frac{1921}{496} ; \dots$$

Dans ces exemples, (ω') fournit les réduites de rang 2^{me}. Ce n'est cependant pas toujours le cas.

9. M. René DE SAUSSURE, Genève : *Sur la géométrie des feuillets*.

Dans un article intitulé « Die Kinematik der Herren de Saussure und Bricard », (voir n° Juillet-Août 1910 die *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung*. M. le prof. Study a fait un compte-rendu de mon dernier ouvrage intitulé « Exposé résumé de la Géométrie des Feuillets » (librairie Kündig, Genève, 1910).

Dans cet article, M. Study fait une réclamation de priorité relativement à cette nouvelle géométrie, dont je me considère comme l'auteur, géométrie qui est une généralisation de la géométrie réglée, avec cette différence que l'élément primitif qui lui sert de base est non pas une droite, mais un « feuillet », figure équivalente à une *position* d'un corps solide de forme quelconque.

Je crois que la seule manière impartiale d'éclaircir la question de priorité soulevée par M. Study, est d'établir la liste chronologique des différents articles et travaux que l'on peut considérer comme les précurseurs de la géométrie des feuillets. On pourra laisser ainsi au public impartial le soin de rendre à chacun ce qui lui est dû et de dire après avoir relu ces articles, quel est l'auteur qui a le premier clairement conçu cette nouvelle géométrie et en a défini les formes fondamentales. Voici la liste des travaux à consulter.

1. *Tait*, Théorie élémentaire des quaternions (trad. française Plarr, 1884, 2^e éd., T. II, p. 165).

2. *Stéphanos*, Math. Ann. (22^e vol., 1883).

3. *Study*, Math. Ann. (39^e vol., 1891).

4. *de Saussure*, Cinématique des fluides (*Arch. des Sc. Ph. et Nat.* de Genève V, 497 ; VI, 296 (1898).

5. — Sur le mouvement le plus général d'un corps solide qui possède

deux degrés de liberté autour d'un point fixe. *Comptes rendus*, Paris 1901.

6. — Théorie géométrique du mouvement des corps, *Arch. des Sc. Ph. et Nat.* de Genève, XIII, 425 : XIV, 144 ; 209 (1902).

7. — Mouvement des fluides, *Id.* XIII, 618 (1902).

8. *Study*, Géométrie der Dynamen, Leipzig (1903).

9. *de Saussure*, Théorie géométrique du mouvement des corps, *Arch. des Sc. Ph. et Nat.* de Genève, XVIII, 25 (1904).

10. — Mouvements infiniment petits d'un corps solide, *Id.* XVIII, 512 (1904).

11. — Théorème de cinématique, *Id.* XVIII, 602 (1904).

12. — Mouvements des fluides, *Id.* XX, 717 (1905).

13. — Théorie géométrique du mouvement des corps, *Id.* XXI, 36, 129 (1906).

14. — La géométrie des feuilletés, *Id.* XXI, 134, 262 (1906).

15. — Classification des systèmes géométriques, *Id.* XXI, 342 (1906).

16. — Théorème fondamental de la géométrie de l'espace feuilleté, *Id.* XXIV, 391 (1907).

17. — Géométrie des flèches, *Id.* XXVII, 86 (1909).

18. — Géométrie des feuilletés, *Id.* XXVIII, 425, 651 (1909).

19. — Les systèmes de corps solides, *Id.* XXVIII, 429, 652 (1909).

20. — Les systèmes de corps solides cotés, *Id.* XXIX, 96, 310, 484, (1910).

21. — Les formes fondamentales de la géométrie des feuilletés, *Id.* XXIX, 638 (1910).

22. — Sur les corps solides opposés, *Id.* XXX, 198 (1910).

23. — Exposé-résumé de la géométrie des feuilletés, janvier 1910. *Mémoire de la Soc. de Phys.* de Genève.

24. *Bricard*, La géométrie des feuilletés de M. René de Saussure, *Nouv. Ann. de Math.*, Paris (1910).

25. *de Saussure*, Sur les corps solides opposés, *Comptes rendus*, Paris (1910).

26. *Study*, *Comptes rendus*, Paris (1910).

27. *Bricard*, *Comptes rendus*, Paris (1910).

28. *de Saussure*, *Comptes rendus*, Paris (1910).

29. *Cailler*, Sur la pentasérie linéaire de corps solides, *C. R.*, Paris (1910).

En résumé, on peut voir d'après ce tableau, que les huit coordonnées homogènes d'un corps solide apparaissent pour la

première fois chez M. Tait et ensuite chez M. Study, mais ces coordonnées n'ont été appliquées à la géométrie des feuillettes qu'en 1903 par M. Study. De mon côté, sans me servir de ces coordonnées, j'ai fondé la géométrie des feuillettes en 1898 par la méthode synthétique, laquelle a l'avantage de mettre cette géométrie à la portée des études mathématiques élémentaires, et de 1898 à 1910 j'ai trouvé l'une après l'autre les formes fondamentales de cette géométrie.

10. Herr Prof. Dr. H. FEHR (Genf) berichtet über den gegenwärtigen Stand der Arbeiten der Internationalen mathematischen Unterrichtskommission, insbesondere über die Arbeiten der schweizerischen Subkommission. Anschliessend hieran legt Herr Prof. Dr. M. GROSSMANN (Zürich) den Bericht über den mathematischen Unterricht an der Eidgenössischen Technischen Hochschule vor.

11. Herr Prof. Dr. F. RUDIO: *Bericht über den Stand der Herausgabe der Werke Leonhard Eulers.*

Herr Rudio Legte den ersten Band der Euler-Ausgabe, die *Algebra*, vor und knüpfte daran einige Mitteilungen über den Stand der Arbeiten. Wegen der Kürze der Zeit musste er sich auf das Wichtigste beschränken. Fertig gesetzt und korrigiert, aber noch nicht ganz fertig gedruckt ist der *erste Band* der *Dioptrik*. An dem *zweiten Band* wird auch schon gesetzt, so dass dieser wohl gleichzeitig mit der *Mechanik*, von der die Hälfte gesetzt ist, erscheinen kann. Mit fünfzehn Herausgebern sind die Verträge abgeschlossen. Diese sind also an der Arbeit und zwei davon, die Herren *Kowalewski* und *Krazer*, haben ihre Bearbeitung bereits vollendet, so dass ihre Bände, nämlich die *Instit. calc. different.* und die *Abhandlungen über die Elliptischen Integrale*, bald in Angriff genommen werden können.

Mit der Durchsicht der *Petersburger Manuskripte* ist Herr *Eneström* beschäftigt. Sein Bericht an die Euler-Kommission wird noch folgen.
