Zeitschrift: Schweizer Schule
Herausgeber: Christlicher Lehrer- und Erzieherverein der Schweiz
Band: 50 (1963)
Heft: 18

Artikel: Der Satz des Pythagoras
Autor: Hegner, F.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-536860

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Der Satz des Pythagoras

Eine Materialsammlung

Von F. Hegner, Lachen

Die (...) weisen auf das am Schlusse aufgeführte Literaturverzeichnis hin.

1. Geschichtliches

Die diesem Abschnitt beigefügte Zeittafel (1) gibt einen Überblick über die Stellung des ionischen Mathematikers Pythagoras von Samos in der Geschichte. Der ihm zugeschriebene Lehrsatz muß jedoch schon viel früher bekannt gewesen sein. So sind mathematische babylonische Texte aus der Mitte des 2. Jahrtausends v. Chr. entziffert worden, welche die Kenntnis des pythagoreischen Lehrsatzes bereits voraussetzen (2). Ebenso war er den Chinesen, Ägyptern und Indern schon vor Lebzeiten des Pythagoras bekannt (3).

Pythagoras von Samos im Ägäischen Meer lebte ungefähr von 580 bis 500 v. Chr., siedelte um 530 nach Kroton in Unteritalien über und unternahm weite Reisen nach Ägypten und Babylon. Er selbst hinterließ keine Schriften. Die Auffassung, daß die natürliche Zahl das Wesen aller Dinge sei, legte er seinem philosophischen System zugrunde. In Kroton gründete er eine geheime Bruderschaft, die zum Teil wissenschaftliche Zwecke verfolgte (2).

2. Formulierungen

2.1 Im rechtwinkligen Dreieck ist das Hypotenusenquadrat gleich der Summe der beiden Kathetenquadrate (2).

2.2 Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Quadrate über den Katheten flächengleich dem Quadrat über der Hypotenuse (3).

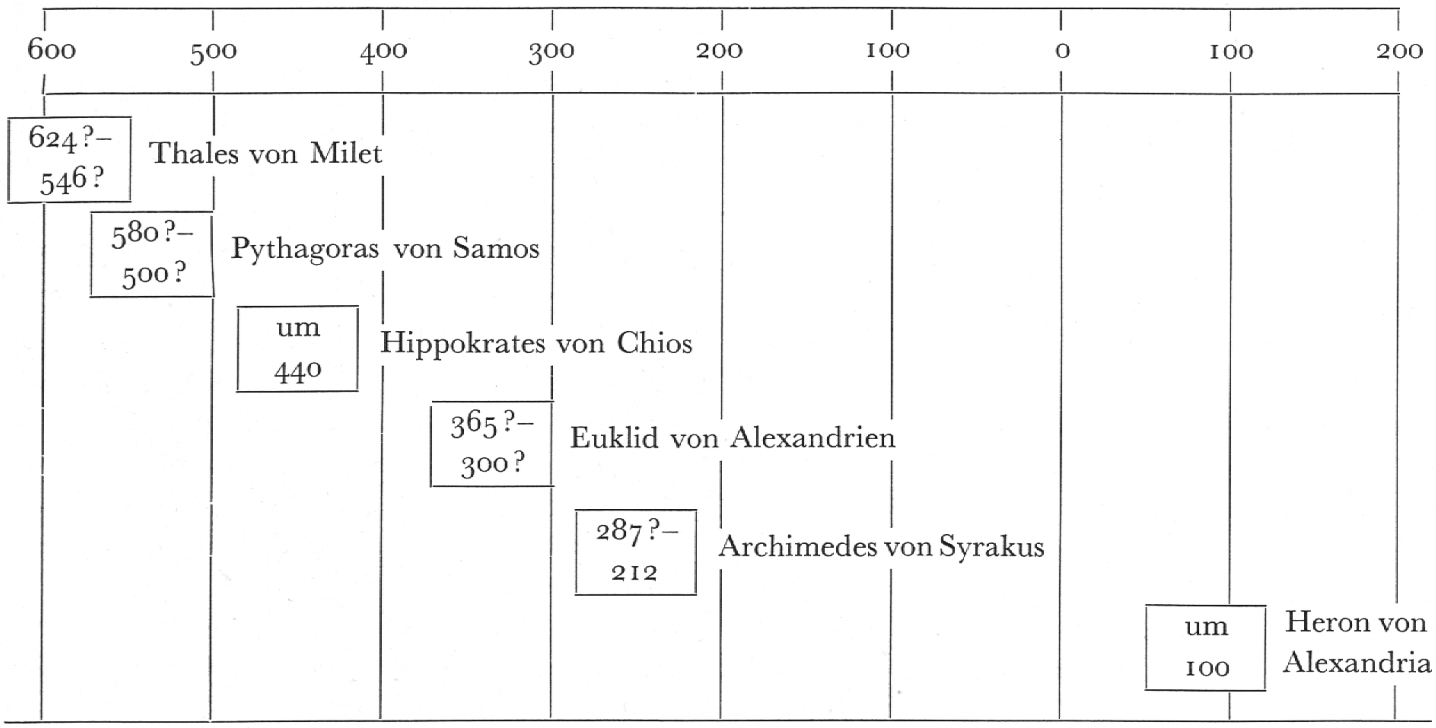
2.3 Hypotenusenquadrat = Summe der Kathetenquadrate (4).

2.4 Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Kathetenquadrate (5).

2.5 Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den Katheten (6).

2.6 Im rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der Hypotenuse c flächengleich der Summe der Quadrate über den Katheten a und b, in Zeichen: $c^2 = a^2 + b^2$ (7).

2.7 Im rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse c und den Katheten a und b ist das Quadrat mit der Seite c flächengleich mit der Summe zweier Qua-



drate, von denen das eine die Seite a und das andere die Seite b besitzt (8).

3. Beweise

Es soll gegen hundert verschiedene Beweise des Lehrsatzes des Pythagoras geben. Dabei wird der gleiche Beweisgedanke oft vielfach variiert. Man kann die Beweise wie folgt gruppieren (6):
Verwandlungbeweise, Zerlegungsbeweise, algebraische Beweise, Ähnlichkeitsbeweise. Die nachstehende Auswahl ist eine eher zufällige. Sie ergab sich anhand der zur Verfügung stehenden Literatur. Bei den Verwandlungs- und Zerlegungsbeweisen ist jeweils die Flächengleichheit oder die Kongruenz der verglichenen Flächen mit Hilfe der Sätze über Flächenberechnungen, über Schiebung, Drehung und Umwendung oder der Kongruenzsätze zu zeigen.
Der Satz des Pythagoras ist ein zentrales Gebiet der Sekundarschulmathematik. Sein Bildungswert ist wesentlich, die Anwendungen vielfältig. Der Lehrer wird mit seinen Schülern meist nur einen der Beweise – vielleicht jedes Jahr einen andern – erarbeiten. Dabei lohnt es sich, recht ausführlich vorzugehen. Deshalb sind einige der Beweise detailliert, andere mehr summarisch wiedergegeben.

3.1 Verwandlungsbeweise

3.1.1 Der erste indische Beweis – ‹Stuhl der Braut› (6).

Behauptung:

Quadrat ACHJ + Quadrat CBKL
= Quadrat ABEF

Voraussetzung:

Dreieck ABC $\cong$ Dreieck BED, denn
$\overline{AB} = \overline{BE}$ als Quadratseiten
$\sphericalangle CAB = \sphericalangle DBE$ nämlich $90° - \sphericalangle ABC$
$\sphericalangle BCA = \sphericalangle EDB$ nach Konstruktion $= 90°$

Beweis:

Das Ausgangsdreieck ABC und das diesem kongruente Dreieck BED der Fig. 1a werden durch eine Viertelsdrehung um A bzw. E in die Lage AFJ bzw. FEG der Fig. 1b gebracht. Dadurch wird das Hypotenusenquadrat ABEF in das flächengleiche Sechseck ACDEGJ verwandelt. Dieses wird durch die Strecke $\overline{CH}$ in die beiden Quadrate ACHJ und HDEG zerlegt. Letzteres wird durch Verschiebung in die Lage CBKL zum zweiten Kathetenquadrat. Daraus folgt:

Quadrat ACHJ + Quadrat CBKL = Quadrat ABEF
(was zu beweisen war!)

3.1.2 Der klassische griechische Beweis, der 1. Beweis von Euklid. (3) Er benützt den Weg über den Kathetensatz, den Satz des Euklid.

Behauptung:

Quadrat ACKL = Rechteck AEFD

Beweis:

Dreieck ACL = Dreieck ABL (gleiche Seite $\overline{AL}$ und gleiche zugehörige Höhe $\overline{AC}$).
Dreieck ABL $\cong$ Dreieck AEC
($\overline{LA} = \overline{CA}$ als Quadratseiten
$\overline{AB} = \overline{AE}$ als Quadratseiten
$\sphericalangle LAB = \sphericalangle CAE$ nämlich je $90° + \sphericalangle CAB$)
Dreieck AEC = Dreieck AED
(gleiche Seite $\overline{AE}$ und gleiche zugehörige Höhe $\overline{AD}$)

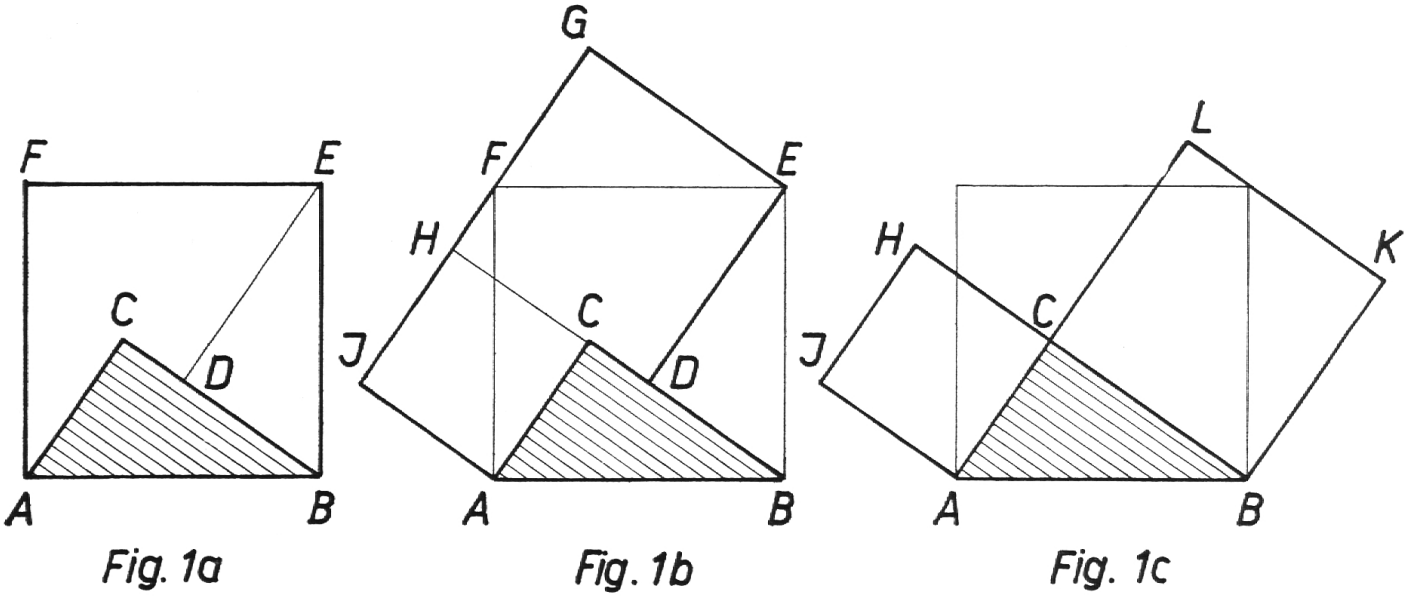


Fig. 1a Fig. 1b Fig. 1c

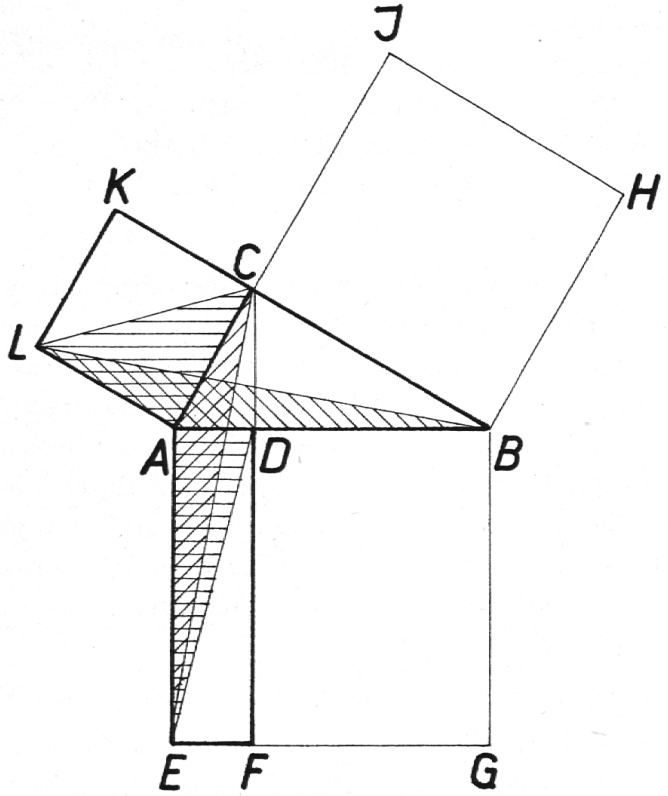


Fig. 2

Daraus ergibt sich, daß
Dreieck ACL = Dreieck AED
Durch Verdoppelung der beiden Dreiecke folgt:
Quadrat ACKL = Rechteck AEFD (w.z.b.w.)
Gleich läßt sich zeigen, daß

Quadrat CBHJ = Rechteck DFGB
Die Summe der beiden Rechtecke AEFD und DFGB ist aber gleich dem Hypotenusenquadrat AEGB.

3.1.3 Eine Variante zum Beweis 3.1.1 (4)
Man benützt anstelle flächengleicher und kongruenter Dreiecke die entsprechenden Parallelenvierecke.

Quadrat ACKL = Viereck ABML $\cong$ Viereck AENC = Rechteck AEFD

3.1.4 Eine weitere Variante zum Beweis 3.1.1 (5)

Vorerst beweist man mit Hilfe der Kongruenz der Dreiecke ABC und MBH, daß $\overline{MB} = \overline{BG}$ $(= \overline{AB})$. Dann ist leicht zu zeigen, daß

Quadrat CBHJ = Parallelenviereck CBMN = Rechteck DFGB

3.1.5 Der zweite indische Beweis (3)

Im Quadrat CGJF der Fig. 5a sind die Quadrate AGHD und BDEF die Kathetenquadrate des Dreiecks ABC. Sie werden durch Verschieben der übrigen drei Dreiecke in die Lage gemäß Fig. 5b in das flächengleiche Hypotenusenquadrat AKLB verwandelt.

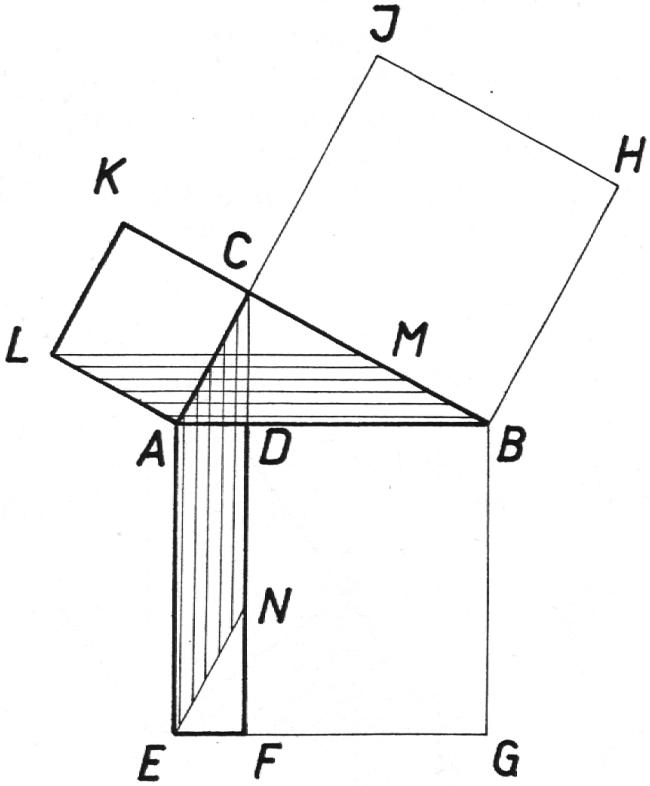


Fig. 3

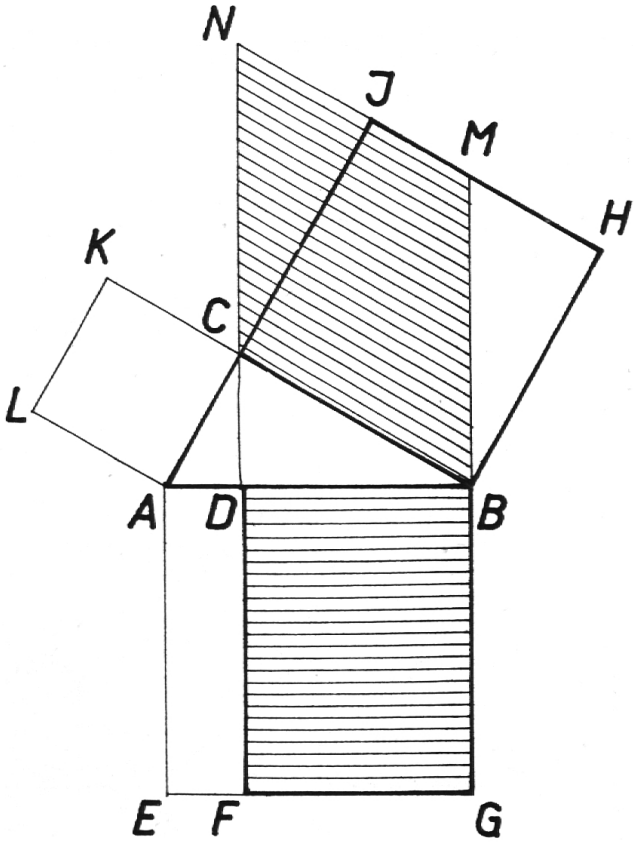


Fig. 4

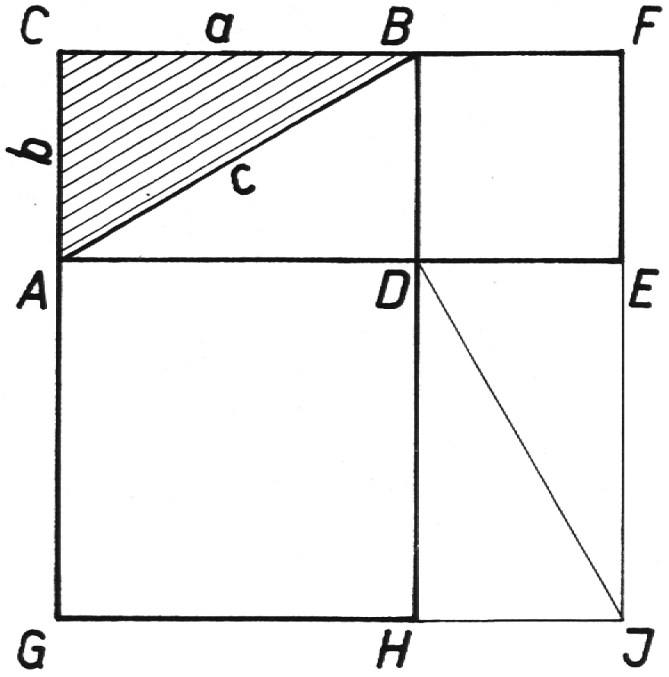


Fig.5a

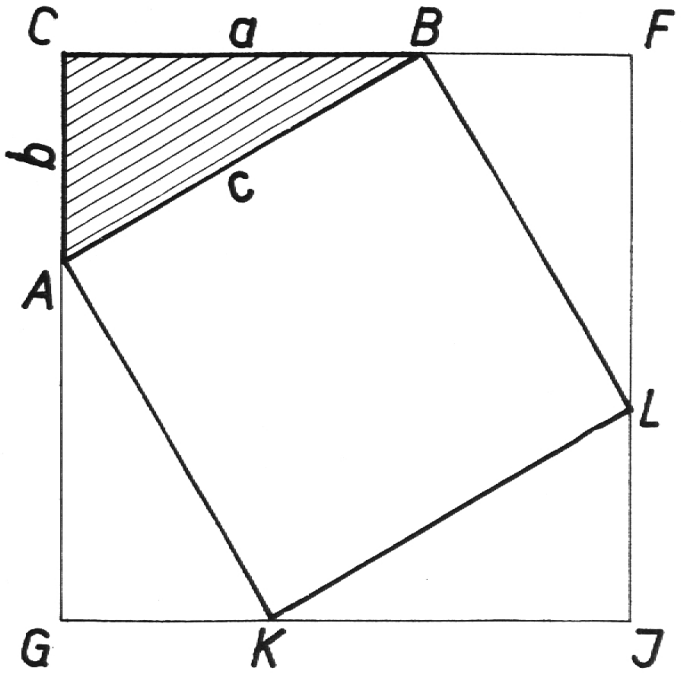


Fig. 5b

3.2 Zerlegungsbeweise

3.2.1 Beweis von Alnairizi, ca. 900 v. Chr. (3 u. 6).

3.2.2 Mosaikbeweis von Gutheil, 1914. (7)

3.2.3 Beweis von Perigal, 1830. (7)

3.2.4 Subtraktionsbeweis von Tempelhoff, 1769. (3,5 u. 7)

Die Pythagorasfigur wird ergänzt mit den dem Ausgangsdreieck ABC kongruenten Dreiecken KHJ und FEC. Das achsensymmetrische Sechseck GABDEF und das zentralsymmetrische Sechseck CAHJKB

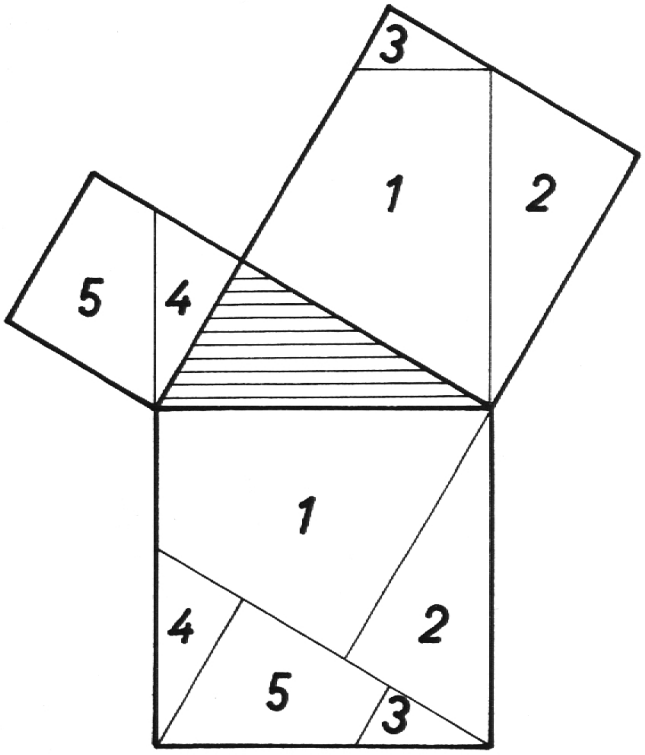


Fig. 6

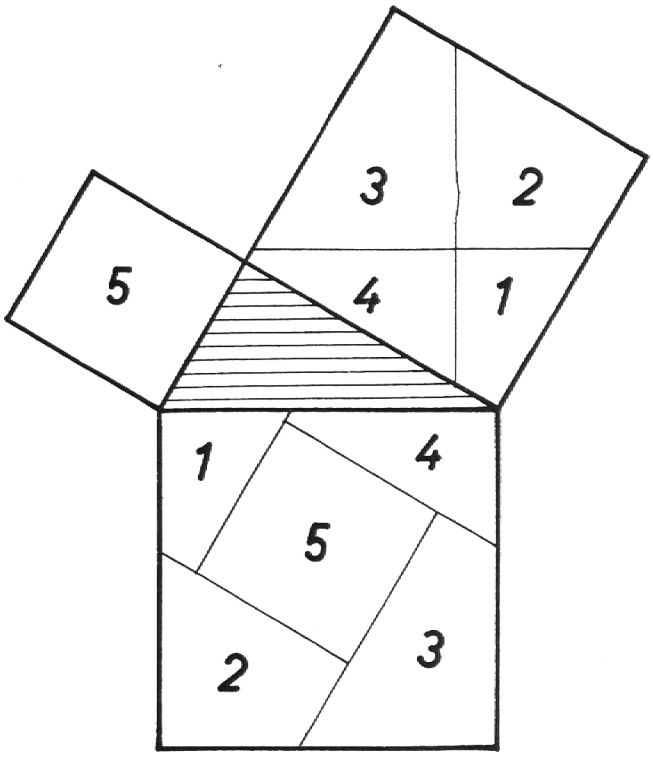


Fig.7

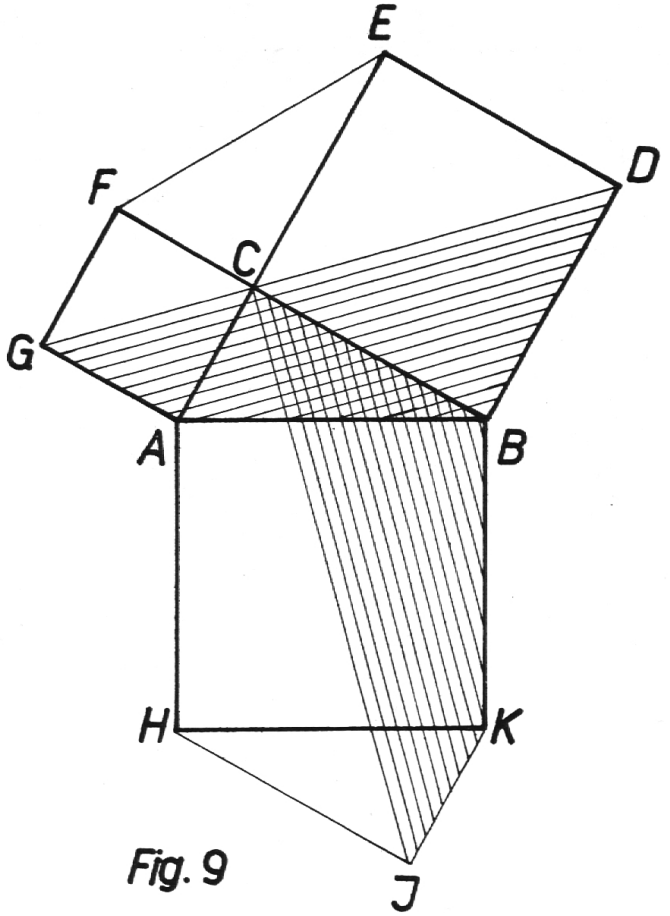


Fig. 9

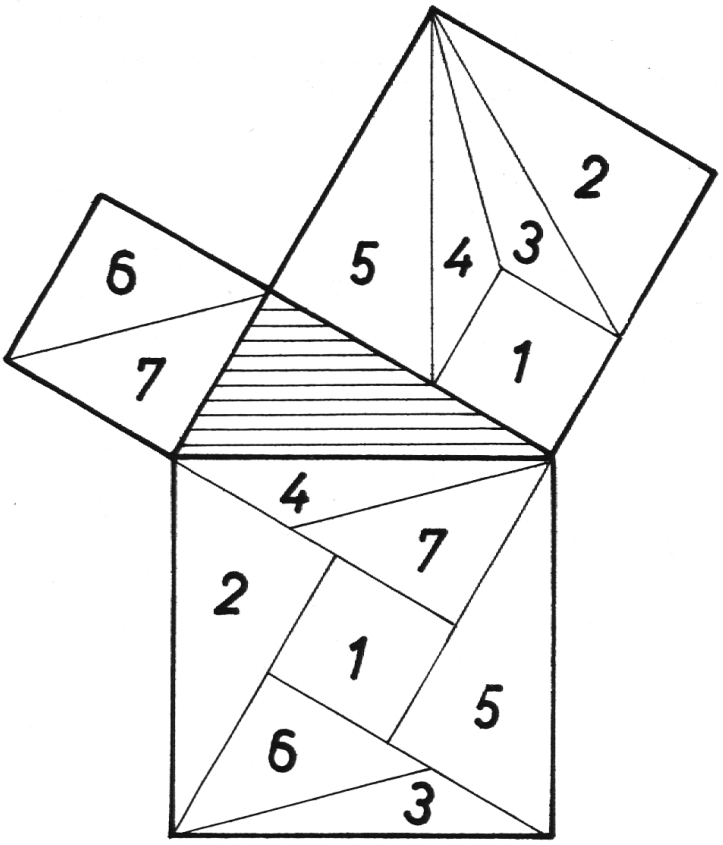


Fig. 8

sind flächengleich, denn ihre Hälften GABD und JKBC können durch Drehung um B zur Deckung gebracht werden. Subtrahiert man von beiden Sechsecken je die zwei kongruenten Dreiecke, so bleibt einmal die Summe der beiden Kathetenquadrate übrig, das andere Mal das Hypotenusenquadrat.

3.3 Algebraische Beweise

3.3.1 Fig. 5a und b können auch rechnerisch ausgewertet werden: (5)

Aus Fig. 5a folgt $\overline{CF}^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2} = a^2 + b^2$

Aus Fig. 5b folgt $\overline{CF}^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2} = c^2$

Also $a^2 + b^2 = c^2$

3.3.2 In der nachstehenden Fig. 10 setzt sich das Quadrat über der Hypotenuse c aus vier kongruenten, rechtwinkligen Dreiecken mit den Katheten a und b und dem kleinen Quadrat in der Mitte mit der Seite a – b zusammen. (2)

$$4 \cdot \frac{a.b}{2} + (a - b)^2 = c^2$$

$$2ab + a^2 - 2ab + b^2 = c^2$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$

3.3.3 Ein Beweis mit Hilfe der Trapezfläche. (9)

Die Fläche des Trapezes EACD kann auf zwei Arten berechnet werden. a und b sind die beiden Parallelen, a + b ist die Höhe. Nach der Trapezformel ist

$$F = \frac{a+b}{2} \cdot (a + b)$$

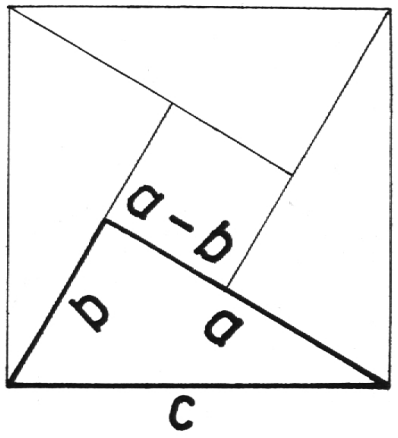


Fig. 10

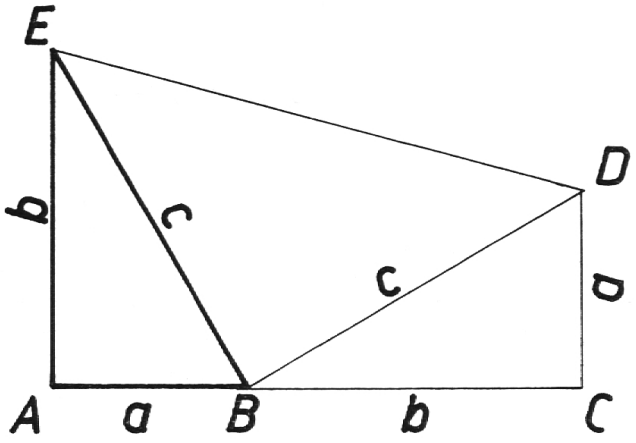


Fig.11

Als Summe der drei Teildreiecke ist

$$F = \frac{a.b}{2} + \frac{a.b}{2} + \frac{c^2}{a} = a.b + \frac{c^2}{2}$$

Nach Verdoppelung beider Ausdrücke und erfolgter Gleichsetzung erhält man

$$(a + b) \cdot (a + b) = 2ab + c^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$$

Wird auf beiden Seiten der Gleichung 2ab subtrahiert, ergibt sich wieder

$$a^2 + b^2 = c^2$$

3.4 Ähnlichkeitsbeweise

Da in der Sekundarschule die Ähnlichkeit der Dreiecke erst nach dem Satz von Pythagoras zur Sprache kommt, eignen sich diese Beweise als Anwendung der Ähnlichkeit und als Repetition.

3.4.1 Der zweite Beweis von Euklid. (6)

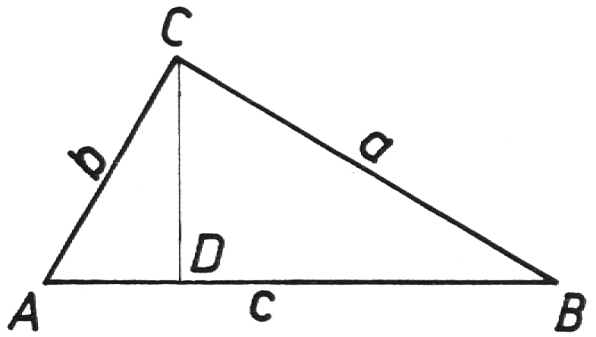


Fig.12

Durch Einzeichnen der Höhe DC im ursprünglichen Dreieck ABC erhält man die diesem ähnlichen Dreiecke CBD und ACD. Die Flächen der drei Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate entsprechender Seiten.

$$ABC : CBD : ACD = c^2 : a^2 : b^2$$

$$ABC : (CBD + ACD) = c^2 : (a^2 + b^2)$$

weil $CBD + ACD = ABC$

ist auch $a^2 + b^2 = c^2$

3.4.2 Der folgende Beweis nimmt wieder den Weg über den Kathetensatz. (2)

Aus Fig. 12 folgt

$$\overline{AD} : b = b : c \qquad \overline{DB} : a = a : c$$

$$b^2 = \overline{AD} \cdot c \qquad a^2 = \overline{DB} \cdot c$$

Daraus folgt

$$a^2 + b^2 = \overline{AD} \cdot c + \overline{DB} \cdot c = c\,(\overline{AD} + \overline{BD})$$

$$= c \cdot c = c^2$$

Also ergibt sich wiederum

$$a^2 + b^2 = c^2$$

4. Pythagoreische Zahlentripel (3)

x	y	a	b	c	a^2	b^2	c^2
2	1	3	4	5	9	16	25
3	2	5	12	13	25	144	169
4	1	15	8	17	225	64	289
4	3	7	24	25	49	576	625
5	2	21	20	29	441	400	841
5	4	9	40	41	81	1600	1681
6	1	35	12	37	1225	144	1369
6	3	27	36	45	729	1296	2025
6	5	11	60	61	121	3600	3721
7	2	45	28	53	2025	784	2809
7	4	33	56	65	1089	3136	4225
7	6	13	84	85	169	7056	7225
8	1	63	16	65	3969	256	4225
8	3	55	48	73	3025	2304	5329
8	5	39	80	89	1521	6400	7921
8	7	15	112	113	225	12544	12769
9	2	77	36	85	5929	1296	7225
9	4	65	72	97	4225	5184	9409
9	6	45	108	117	2025	11664	13689
9	8	17	144	145	289	20736	21025

Darunter versteht man drei ganze Zahlen, bei denen die Summe der Quadrate der beiden kleineren Zahlen gleich dem Quadrat der größten Zahl ist. Mit Hilfe solcher Tripel lassen sich zur Einführung leicht Beispiele herstellen, die ‹aufgehen›.

Man erhält die drei Zahlen a, b, c eines Tripels nach den Formeln

$$a = x^2 - y^2 \qquad b = 2xy \qquad c = x^2 + y^2$$

x und y sind dabei ganze Zahlen, wobei x größer als y zu wählen ist. Enthalten x und y keine gemeinsamen Faktoren und ist eine der beiden Zahlen gerade, so erhält man primitive, d.h. teilerfremde Tripel. Durch Multiplikation der primitiven Tripel mit beliebigen positiven Zahlen erhält man abgeleitete Tripel. Die nachstehende Tabelle enthält die kleinsten primitiven Tripel.

5. *Verzeichnis der benützten Literatur*

(1) Behnke-Süß-Fladt: Grundzüge der Mathematik, Bd. I. Vandenhoeck und Ruprecht 1958

(2) Gonseth-Marti: Planimetrie Leitfaden, 2. Teil. Orell Füßli 1936

(3) Wolff: Handbuch der Schulmathematik, Bd. III. Schroedel, Hannover

(4) Ebneter: Geometrie, 2. Heft. Fehr'sche Buchhandlung, St. Gallen 1956

(5) Weiß: Geometrie für Sekundarschulen, I. und II. Teil Kant. Lehrmittelverlag, Zürich

(6) Fladt: Mathematik, Bd. I. Moritz Diesterweg 1962

(7) Fladt-Krfat-Dreetz: Mathematisches Unterrichtswerk, IV. Bd. Moritz Diesterweg 1955

(8) Bieri: Geometrie. Sammlung ‚Lebendiges Wissen', Heft 10. Bubenbergverlag, Bern

(9) Weiß: Geometrie für Sekundarschulen, III. Teil. Kant. Lehrmittelverlag, Zürich

Ein für die Aeronautik grundlegendes Gesetz der Mechanik

Dr. P. Theodor Schwegler OSB, Einsiedeln

In jüngster Zeit brachte die Presse allerlei Angaben über die Höhe (bzw. Erdentfernung), Zeit und Geschwindigkeit der Erdumflüge der Russen und der Amerikaner. Mancher Leser wird sich da gefragt haben, welcher Zusammenhang zwischen den angegebenen Größen bestehe. Dieser Zusammenhang soll im folgenden so einfach als möglich dargestellt werden.

Die Mathematiker, die die Erdumflüge zu berechnen hatten, mußten darauf bedacht sein, daß die Erdanziehung durch die Geschwindigkeit der Kapsel paralysiert wurde. Bei kleinerer Geschwindigkeit entstand die Gefahr, daß die Kapsel in dichtere Luftschichten und wegen der Reibung in Brand geriet oder bei längerer Fahrt irgendwo mit dem Erdboden zusammenstieß. War die Geschwindigkeit größer, so mußte sich die Kapsel immer weiter von der Erde entfernen und im Weltenraum verlieren. Die eingeschlagenen Kurven waren jeweils *Ellipsen*, die, vom Erdmittelpunkt aus gesehen, einem Kreise sehr nahe kamen, war doch die numerische Exzentrizität der von Glenn beschriebenen Bahn r. $^1/_{170}$. Für die Umlaufgeschwindigkeit kann daher die Exzentrizität ε vernachlässigt werden. Eine technische *Kreis*linie läßt sich zwar mathematisch errechnen, ist aber von der Wahrscheinlichkeitsrechnung her höchst unwahrscheinlich.

Im folgenden bezeichnet c die Geschwindigkeit, a die Erdbeschleunigung von 9,81 m/s², r den Äquator-Radius der Erde (6378388 m), t die Zeit des Umlaufes; a_0, c_0 und t_0 die Beschleunigung, die Geschwindigkeit und die Umlaufzeit im Abstand r_0 *vom Erdmittelpunkt*. Da die Anziehungskraft der Erde mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt, gelten die Beziehungen:

$$a_0 : a = r^2 : r_0^2 \text{ und } c_0 : c = \sqrt{r} : \sqrt{r_0}$$

Aus dem elementar leicht ableitbaren Gesetz der Kreisbewegung $c^2 = a \cdot r$ ergibt sich nun für einen Erdumflug in *möglichster Erdnähe:*

$$c = \sqrt{6378388 \cdot 9{,}81} \text{ m/s} = 7906 \text{ m/s oder } 28{,}46 \text{ km/h und}$$

$$t = \frac{2\pi r}{c} = 2\pi \cdot \sqrt{/_a} = 5070 \text{ s} = 1 \text{ h } 24{,}5 \text{ min.}$$

Beim Erdumflug des Amerikaners Glenn war r_0 im Mittel = r + 208 km, also r_0/r = 1,0326. Daraus ergeben sich die Werte:

$$c_0 = \sqrt{a_0 \cdot r_0} = r \cdot \sqrt{a/_{r_0}} = 7784 \text{ m/s oder } 28{,}023 \text{ km/h}$$

$$\text{und } t_0 = \frac{2 r_0 \pi}{c_0} = \frac{2 r_0 \pi}{r} \cdot \sqrt{r_0/_a} = 5316 \text{ s} = 1 \text{ h } 28 \text{ min } 36 \text{ s.}$$

Diese letzte Formel, auf die Form $t_0^2 = \frac{4\pi^2}{a \cdot r^2} \cdot r_0^3$ gebracht, spiegelt unmittelbar das dritte Keplersche Gesetz der Planetenbahnen wider, wonach sich die Quadrate der Umlaufszeiten verhalten wie die Kuben der großen Halbachsen – genauer wie die Kuben der Abstände vom gemeinsamen Schwerpunkt der beiden Massen. Wenn die Kapsel Glenns der eine ‹Planet› ist, dann eine der Kapseln der russischen Aeronauten oder der Mond der Vergleichs-Planet.