

# Probabilistische Methoden bei Stabilitätsproblemen in der Geotechnik: praktische Anwendung und Beispiele

Autor(en): **Locher, Hans Georg**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizer Ingenieur und Architekt**

Band (Jahr): **101 (1983)**

Heft 16

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-75119>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

# Probabilistische Methoden bei Stabilitätsproblemen in der Geotechnik

## Praktische Anwendung und Beispiele

Von Hans Georg Locher, Bern

Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung sind für den Geotechnik-Ingenieur durchaus brauchbar. In Ergänzung zum gebräuchlichen Sicherheitsgrad ermöglichen sie eine zuverlässigere Beurteilung der Böschungs- und Baugrubenstabilität, indem sie weitere Resultate wie z.B. die Bruchwahrscheinlichkeit ergeben. Im vorliegenden Artikel werden die mathematischen Grundlagen und drei Anwendungsbeispiele gezeigt.

### Einleitung

Seit ungefähr einem Jahrzehnt werden in der Geotechnik probabilistische Methoden angewendet. Im Juni 1983 wird in Florenz der 4. Kongress ICASP (International Conference on Application of Statics and Probability in Soil and Structural Engineering) stattfinden, wo die Geotechnik und deren Stabilitätsprobleme einen wichtigen Platz einnehmen. Ferner sind zu diesem Thema verschiedene Bücher erschienen [1-6].

Bisher wurde zur Beurteilung der Stabilität von Böschungen und Baugruben allein auf den Sicherheitsgrad  $F$  gegenüber dem Auftreten eines Bruches längs einer angenommenen Gleitfläche abgestellt.

$$F = \frac{\tau_f}{\tau}$$

wobei:

$\tau_f$  = mittlere Scherfestigkeit des Bodens

$\tau$  = wirkende Schubspannung

Da die Grössen, die in diese Rechnung eingehen - Raumbgewicht, Reibungswinkel, Kohäsion, äussere Lasten, Strömungsdrücke -, nicht genau bekannt sind, sondern eine gewisse Streubreite aufweisen, so hat auch das Resultat, die Sicherheit  $F$ , eine *Streuung*.

Die Grösse der Streuung ist charakterisiert durch die Standardabweichung. Über die Form der statistischen Verteilung müssen zweckentsprechende Annahmen getroffen werden. In der Natur sind sehr viele zufällig streuende Grössen annähernd nach der Gausschen Glockenkurve verteilt.

Ist die Verteilung angenommen, so kann daraus die Wahrscheinlichkeit des Eintretens des Bruches (Sicherheit  $F=1$ ) berechnet werden. Es ist naheliegend, dass z.B. bei grösserer Streuung, aber gleicher Sicherheit, eine grössere Bruchwahrscheinlichkeit resultiert, oder dass zur Erreichung einer gleichen

Bruchwahrscheinlichkeit bei grösserer Streuung wesentlich höhere Festigkeiten nötig sind. Der Sicherheitsgrad allein ist daher ein ungenügendes Mass zur Beurteilung des Verhaltens einer Böschung.

Prof. M. E. Harr hat anlässlich eines Kolloquiums an der EPFL im Januar 1982 die Methoden vorgestellt, die zu dieser Art Beurteilung verwendet werden können.

Im folgenden ist die grundlegende Theorie der Wahrscheinlichkeitsrechnung kurz dargestellt. Anschliessend werden Methoden diskutiert, die erlauben, aus den Streuungen der Grundgrössen die Streuung des Sicherheitsgrades  $F$  auf einfache Weise zu berechnen. Sodann werden anhand von drei praktischen Beispielen einige Schlussfolgerungen gezogen.

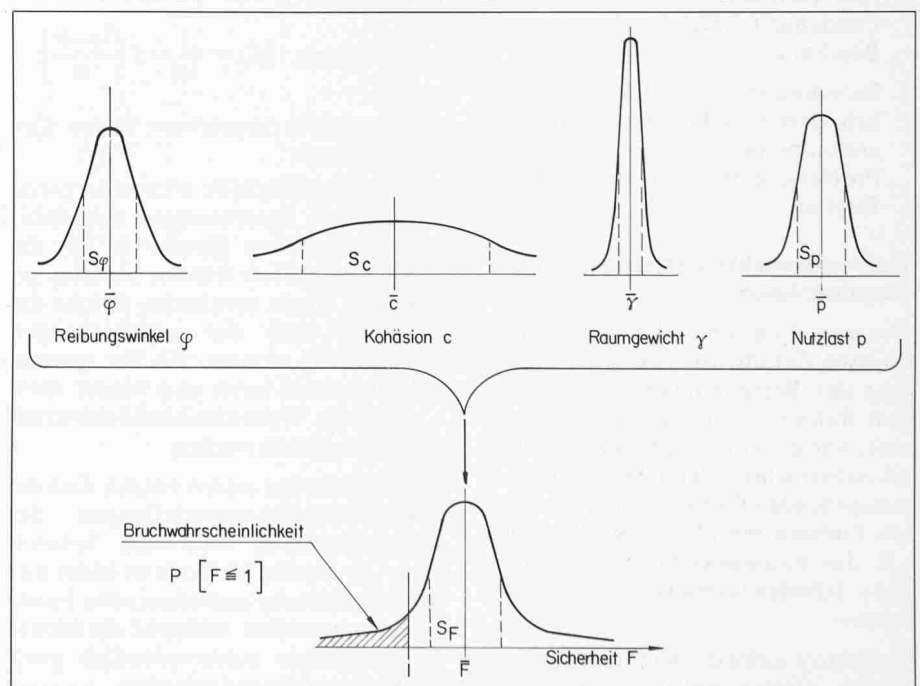
Bild 1 zeigt den prinzipiellen Rechnungsgang. Die Eingabegrössen werden durch ihre Mittelwerte und Standardabweichungen charakterisiert. Zur Vereinfachung wird in den Beispielen bei allen variablen Grössen eine Wahrscheinlichkeitsverteilung nach der Gausschen Glockenkurve angenommen. Mit geringem rechnerischem Mehraufwand können jedoch andere Verteilungen, wie z.B. die Betaverteilungen, verwendet werden.

Während die Kohäsion im allgemeinen eine grosse, der Reibungswinkel eine mittlere Streuung aufweisen, variieren die Nutzlasten und Raumbgewichte meist in so engem Rahmen, dass sie als Konstante eingesetzt werden können. Aus langjähriger Erfahrung gibt Harr [1] die in Tabelle 1 aufgeführten Variationskoeffizienten an.

Tabelle 1. Eingabedaten für die Stabilitätsrechnung

Grösse	charakterisiert durch		Variationskoeffizient	
	Mittel	Standardabweichung	Bereich %	Mittel %
Raumbgewicht	$\bar{\gamma}$	$S_\gamma$	0,5- 4	2
Reibungswinkel	$\bar{\varphi}$	$S_\varphi$	6 - 14	10
Kohäsion	$\bar{c}$	$S_c$	29 - 50	40
Nutzlast	$\bar{p}$	$S_p$	von Fall zu Fall	

Bild 1. Berechnungsgang einer Stabilitätsrechnung mit probabilistischer Auswertung



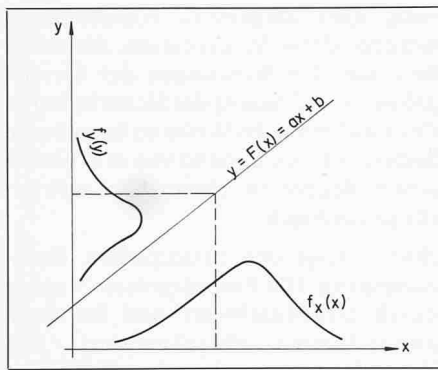


Bild 2. Direkte analytische Methode für die Berechnung der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Funktion

Die Berechnung der Sicherheit wird mit einer der bekannten Berechnungsmethoden (Fellenius, Bishop, Janbu usw.) durchgeführt, wobei aber neben dem Mittelwert der Sicherheit  $\bar{F}$  auch die sich aus den Streuungen der Eingangswerte  $S_\phi$  und  $S_c$  ergebende Standardabweichung des Sicherheitsgrades  $S_F$  berechnet werden soll. Mit  $\bar{F}$  und  $S_F$  kann anhand von Tabellen die Bruchwahrscheinlichkeit  $P[F \leq 1,0]$  bestimmt werden (siehe Harr [1]).

### Prinzip der probabilistischen Rechnungsmethode

Die Berechnung wird in drei Schritte zerlegt, die auf Bild 1 schematisch dargestellt sind:

1. Annahme der Wahrscheinlichkeitsverteilung aller Eingabegrößen (Kohäsion, Reibungswinkel, Raumgewicht usw.) für die Berechnung.
2. Schätzung der Wahrscheinlichkeitsverteilung der betrachteten Funktion (Setzung, Tragfähigkeit eines Fundaments, Sicherheitsgrad einer Böschung).
3. Berechnung der Wahrscheinlichkeit, dass diese Funktion einen Wert annimmt, der kleiner (oder, je nach Problem, grösser) als ein zulässiger Wert ist.

### Wahrscheinlichkeitsverteilung der Eingabegrößen

Grundsätzlich sind alle verwendeten Größen Zufallsvariablen. Um den Umfang der Berechnungen in vernünftigem Rahmen zu halten, lohnt es sich aber, nur diejenigen Größen als variabel zu betrachten, deren Streuung einen massgebenden Einfluss auf das Resultat hat. Größen mit kleiner Streuung, wie z.B. das Raumgewicht, können meist ohne Schaden konstant angenommen werden.

Im Prinzip sollte die Streuung einer variablen Grösse statistisch mit Hilfe

einer beträchtlichen Zahl von Messungen bestimmt werden. In der Praxis ist dies aber selten möglich. Man beschränkt sich daher auf Schätzungen der Mittelwerte und Streuungen anhand der wenigen Laborresultate, der persönlichen Erfahrung und der Werte aus der geotechnischen Literatur (Harr [1], Recordon und Desponds [2]). Aus langjähriger Erfahrung gefundene Variationskoeffizienten nach Harr [1] sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

Für die Mittelwerte entspricht dieses Vorgehen den bisherigen Gepflogenheiten. Für die Streuung ist es, wenn auch mager, sicher besser als die willkürliche Annahme, die Streuung sei Null.

### Wahrscheinlichkeitsverteilung der betrachteten Funktion

Die Aufgabe ist, die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Funktion

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

zu berechnen, wenn von den Variablen  $x_i$  die Wahrscheinlichkeitsverteilung oder mindestens die ersten zwei Momente «Mittelwert» und «Varianz» bekannt sind. Die beiden folgenden Methoden erlauben, diese Wahrscheinlichkeitsverteilung direkt und vollständig zu bestimmen.

#### - Direkte analytische Methode

In sehr einfachen Fällen ist es möglich, aus dem mathematischen Ausdruck für die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $f(x_i)$  jeder Variablen die Verteilung  $f(y)$  der Funktion zu berechnen (Benjamin and Cornell [3], Ang and Tang [4]). Ein Beispiel zeigt Bild 2:

Funktion:  $y = a \cdot x + b$

Verteilung:  $f(y) = \frac{1}{|a|} \cdot f\left(\frac{y-b}{a}\right)$

#### - Numerische Simulation: Monte Carlo-Methode

Mit Computerhilfe wird eine grosse Zahl von Berechnungen ausgeführt (meist mehrere Hundert!). Für die Eingabegrößen werden zufällig gewählte Werte verwendet, welche statistisch nach der entsprechenden Verteilung streuen. An der grossen Resultatzahl kann nun wieder statistisch die Wahrscheinlichkeitsverteilung bestimmt werden.

Beide Methoden setzen voraus, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Ausgangsgrößen vollständig bekannt sind. Die direkte Methode ist leider nur für sehr einfache mathematische Funktionen anwendbar, während die Monte Carlo-Methode ausserordentlich grossen Rechenaufwand erfordert.

Im Gegensatz dazu benötigen die beiden nachstehend beschriebenen Methoden nur die Kenntnis der ersten zwei Momente, d.h. des Mittelwerts und der Varianz, und sind somit allgemein und mit wesentlich weniger Aufwand verwendbar.

#### - Mit Taylor-Reihenentwicklungen

Mit Hilfe von Reihenentwicklungen gelingt es, für einfachere mathematische Funktionen geschlossene Formeln für Mittelwert und Standardabweichung der Funktion aufzustellen. Die nachfolgenden Formeln entstehen, wenn in den Reihenentwicklungen nur konstante, lineare und quadratische Glieder berücksichtigt werden:

Gegeben sei eine Funktion mit  $N$  unabhängigen Variablen

$$y = F(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Bei jeder einzelnen Variablen bezeichnet man

- als Mittelwert  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N$
- als Standardabweichung  $S_1, S_2, \dots, S_N$

Für die Funktion ergibt sich dann:

- der Mittelwert  $\bar{y}$
- die Varianz  $S_y^2$
- die Standardabweichung  $S_y$

$$(1a) \quad \bar{y} = F(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} \cdot (S_i)^2 \right]$$

$$(1b) \quad S_y^2 = \sum_{i=1}^N \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x_i} \right)^2 \cdot (S_i)^2 \right]$$

$$(1c) \quad S_y = \sqrt{S_y^2}$$

Voraussetzung für die Anwendung dieser Formeln ist, dass die Funktion  $y$  bekannt und stetig ist und zweimal abgeleitet werden kann.

Im folgenden Kapitel wird die Anwendung dieser Formeln am Beispiel 1 gezeigt.

#### - Methode Rosenblueth

Die von Rosenblueth [6] entwickelte Methode erlaubt, die ersten zwei Momente, d.h. Mittelwert und Varianz einer Funktion  $y = F(x_i)$ , aus denjenigen der Variablen zu bestimmen, auch wenn die Funktion nicht ableitbar, ja sogar, wenn sie nicht in mathematischer Form bekannt ist. Sie beruht auf der Idee, die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer kontinuierlichen Zufallsvariablen so durch die konzentrierte Verteilung einer diskreten Variablen  $P_+$  und  $P_-$  zu erset-

zen, dass die ersten zwei Momente dieser Variablen gleich herauskommen (Bild 3). Dies entspricht der in der Statik gebräuchlichen Idee, eine verteilte Belastung durch zwei Kräfte zu ersetzen, so dass die Resultierende und die Drehmomente um einen festen Punkt die gleichen bleiben.

In Bild 3 ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung  $f(x)$  dargestellt. Ihre Resultierende ist  $\equiv 1$  (Gewissheit) und liegt im Punkt  $\bar{x}$ . Sie wird durch zwei konzentrierte Wahrscheinlichkeiten  $P_-$  und  $P_+$  ersetzt. Rosenblueth stellte folgende 4 Gleichungen auf:

- $P_+ + P_- \equiv 1$  (Gewissheit)
- 1. Moment (Mittelwert)  
 $P_- \cdot x_- + P_+ \cdot x_+ = \bar{x}$
- 2. Moment (Varianz)  
 $P_- \cdot (x_- - \bar{x})^2 + P_+ \cdot (x_+ - \bar{x})^2 = S_x^2$
- 3. Moment  
 $P_- \cdot (x_- - \bar{x})^3 + P_+ \cdot (x_+ - \bar{x})^3 = \beta_1 \cdot S_x^3$   
( $\beta_1$  = Dissimetrie-Koeffizient)

Sie können aufgelöst werden, und es ergeben sich folgende Formeln:

$$(2a) P_+ = \frac{1}{2} \cdot \left[ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{1}{1 + \left(\frac{\beta_1}{2}\right)^2}} \right]$$

$$(2b) P_- = 1 - P_+$$

$$(2c) x_+ = \bar{x} + S_x \cdot \sqrt{P_- / P_+}$$

$$(2d) x_- = \bar{x} - S_x \cdot \sqrt{P_- / P_+}$$

Im Fall einer symmetrischen Verteilung wird das 3. Moment = 0, also  $\beta_1 = 0$ , und die Formeln (2) vereinfachen sich wie folgt:

$$(3a) P_+ = P_- = \frac{1}{2}$$

$$(3b) x_+ = \bar{x} + S_x$$

$$(3c) x_- = \bar{x} - S_x$$

Wir können nun dasselbe Konzept auf die Verteilung einer Funktion von Zufallsvariablen anwenden. Bild 4 zeigt als Beispiel eine Funktion mit einer Variablen, die nicht einmal in mathematischer Form bekannt sein muss. Von den Punkten  $x_-$  und  $x_+$  aus können ohne weiteres, z.B. graphisch, die Punkte  $y_-$  und  $y_+$  konstruiert werden, woraus sich die Varianz  $S_y^2$  und die Standardabweichung  $S_y$  der Funktion  $y$  ergeben. Im nachfolgenden Beispiel 3 wurde diese Methode benützt, da nur der Reibungswinkel  $\phi$  als variabel angenommen wurde.

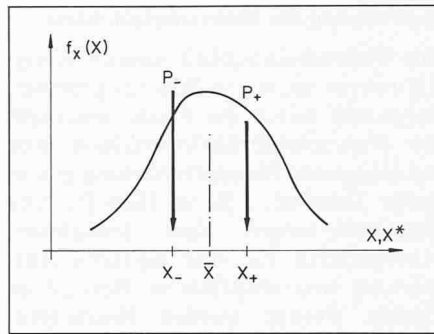


Bild 3. Methode Rosenblueth. Ersatz der kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsverteilung durch zwei diskrete Wahrscheinlichkeiten  $P_+$  und  $P_-$

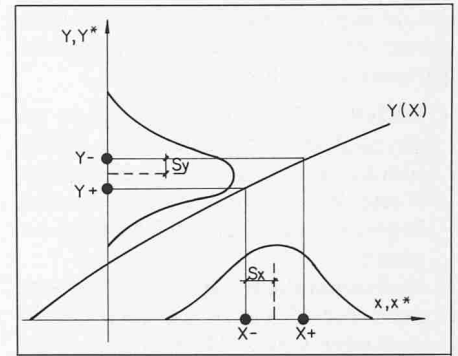


Bild 4. Anwendung der Methode Rosenblueth auf eine Funktion  $y(x)$  mit einer Variablen

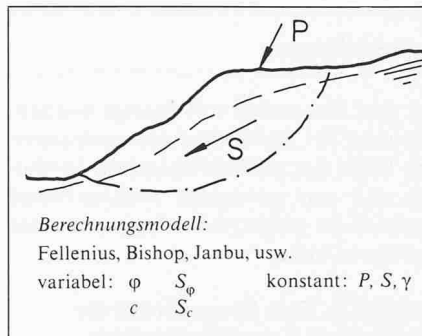


Bild 5. Anwendung der Methode Rosenblueth auf Stabilitätsrechnungen (zwei Variable)

Randwerte	Sicherheit	$F^2$
++ $\bar{c} + S_c, \bar{\phi} + S_\phi$	$F_{++}$	$F_{++}^2$
+- $\bar{c} + S_c, \bar{\phi} - S_\phi$	$F_{+-}$	$F_{+-}^2$
-+ $\bar{c} - S_c, \bar{\phi} + S_\phi$	$F_{-+}$	$F_{-+}^2$
-- $\bar{c} - S_c, \bar{\phi} - S_\phi$	$F_{--}$	$F_{--}^2$
	$\Sigma F$	$\Sigma F^2$

Berechnungsmodell:  
Fellenius, Bishop, Janbu, usw.  
variabel:  $\phi$   $S_\phi$  konstant:  $P, S, \gamma$   
 $c$   $S_c$

$$F = \frac{1}{4} \Sigma F \quad S_F^2 = \frac{1}{4} \Sigma F^2 - \left(\frac{1}{4} \Sigma F\right)^2$$

Für zwei Variable ergeben sich vier Permutationen der Werte ( $\bar{x}_i \pm S_i$ ). Bild 5 zeigt den Gang der Berechnung am Beispiel einer Stabilitätsrechnung, wobei die Kohäsion  $c$  und der Reibungswinkel  $\phi$  als Zufallsvariable, die übrigen Grössen als Konstante betrachtet werden.

Für jede Kombination wird mit der geeigneten Rechenmethode ein Sicherheitsfaktor  $F_{++}, F_{+-}$  usw. ausgerechnet. Nach Rosenblueth ist nun

$$\bar{F} = \text{Mittelwert der } F_{++}, F_{+-} \dots \text{ usw.}$$

$$S_F = \text{Standardabweichung der } F_{++}, F_{+-} \dots \text{ usw.}$$

Wird mit Rechenprogrammen gearbeitet, so ist es meist ein leichtes, die Rechnung mehrmals durchzuführen und damit als zusätzliches Resultat die Streuung des Sicherheitsgrades zu erhalten.

Im nachfolgenden Beispiel 2 wurden die Kohäsion  $c$  und der Reibungswinkel  $\phi$  als Variable betrachtet und die Berechnung daher viermal durchgeführt.

Im allgemeinen Fall einer Funktion mit mehreren Variablen  $Y = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  müssen  $2^n$  Permutationen berücksichtigt werden, und die allgemeine Formel wird

$$(4a) \bar{y} = E[y] = \sum_{i=1}^{2^n} [P_{ijk\dots n} \cdot y_{ijk\dots n}]$$

$$(4b) S_y^2 = E[y^2] - (E[y])^2$$

wobei  $E[y]$  bzw.  $E[y^2]$  die erwarteten Werte von  $y$  bzw.  $y^2$  bedeuten. Die Glieder  $y_{ijk\dots n}$  sind die Punktabschätzungen von  $y$ , erhalten für alle Permutationen der Punktabschätzungen jeder Einzelvariablen. Die Glieder  $P_{ijk\dots n}$  sind die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten.

Die beiden zuletzt genannten Methoden erlauben, Mittelwert und Varianz einer untersuchten Funktion auf einfache Weise zu bestimmen. Um die gesuchte Wahrscheinlichkeit zu berechnen, braucht es zusätzlich eine Annahme über die Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Am einfachsten ist die Annahme einer Normalverteilung oder *Gauss'schen Verteilung*. Sie steht zwar meist im Widerspruch mit der physikalischen Bedeutung der Variablen, denn die Grössen variieren bis  $\pm \infty$ . Wenn die Variationskoeffizienten relativ gering und die Verteilungen einigermaßen symmetrisch sind, führt sie in der Praxis jedoch trotzdem zu brauchbaren Resultaten. In den drei Beispielen wurden durchwegs Gauss'sche Verteilungen angenommen. Allgemeiner ist die Beta-Verteilung (Typ I der Klassifikation von Pearson, Harr [1]), welche sehr anpassungsfähig ist. Die Verteilungen sind endlich begrenzt. Zu ihrer Bestimmung benötigt man daher neben Mittelwert und Varianz auch die obere und

untere Begrenzung. Diese können nach einem oder mehreren der folgenden Kriterien gewählt werden:

- Definitionsbereich der Funktion im physikalischen Sinn (z.B. die Kohäsion kann nicht kleiner als Null sein).
- Werte der Funktion, die sich aus den Begrenzungswerten der Variablen ergeben.
- Wahrscheinliche Begrenzungswerte nach der Ungleichheit von Chebyshev oder Gauss. Meist führen diese Kriterien dazu, dass die Grenzen in einem Abstand von 3-4mal die Standardabweichung beidseitig des Mittelwerts angenommen werden.

Die Gaussche Verteilung ist ein Spezialfall der Beta-Verteilungen.



Bild 6. Mühle Quasseem, Saudi-Arabien. Getreidesilos der ersten Etappe und Maschinenhausbaugrube der zweiten Etappe (Photo Baustelle)

**Berechnung der Wahrscheinlichkeit**

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis eintritt, ist, wie in Bild 1 angedeutet, dargestellt durch die Fläche unterhalb der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Für die Gaussche Normalverteilung gibt es dafür Tabellen, z.B. in Harr [1]. Die Beta-Verteilungen sind komplexer. Kurventafeln für eine einfache Auswertung sind ebenfalls in Harr [1] zu finden. Ferner wurden Rechenprogramme entwickelt, beispielsweise am Erdbaulaboratorium der EPFL in Lausanne (Bourdeau [7]).

**Anwendungen**

An drei Beispielen soll gezeigt werden, wie man bei Stabilitätsuntersuchungen mit Hilfe der probabilistischen Methoden mit nur geringem Mehraufwand wesentliche zusätzliche Informationen gewinnen kann.

**Beispiel 1: Tiefe Baugrube für die Mühle Quasseem, Saudiarabien**

In einer Anlage von über 30 m hohen Getreidesilos liegt, unmittelbar neben den auf der Geländeoberfläche fundierten Silos, das Maschinenhaus mit einer 8 m tiefen Baugrube (Bild 6). Aus Gründen des Bauprogramms konnte mit dem Bau der Silos nicht gewartet werden, bis das Maschinenhaus fertiggestellt und die Böschungen hinterfüllt waren.

Bild 7 zeigt einen Schnitt durch die Baugrube. Der Untergrund besteht aus einer 4 bis 6 m starken Schicht von überkonsolidiertem Mergel. Darüber und darunter liegen stark verwitterte

Kalksteine. Die Scherfestigkeit des Mergels wurde mit einer Serie von 20 einfachen Druckversuchen gemessen, aus welchen der Mittelwert  $\bar{c}$  und die Standardabweichung  $S_c$  berechnet wurden. Der Variationskoeffizient ist mit 31% hoch, aber nicht ungewöhnlich. Für die Last  $p$  des leeren Silos wurden günstige und ungünstige Annahmen getroffen.

Auf demselben Bild 7 ist die Berechnung mit einer einfachen geradlinigen Bruchfläche dargestellt. Da die Formel für die Sicherheit partielle Ableitungen erlaubt, haben wir die Methode mit Taylorreihen nach den Formeln (1) verwendet.

Nach Harr [1] kann die Sicherheit einer senkrechten Böschung wie folgt berechnet werden:

$$F = \frac{c \cdot N_s - p}{\gamma \cdot H}$$

wobei  $c$  die Kohäsion,  $p$  die Auflast auf der Böschung,  $\gamma$  das Raumgewicht des Bodens und  $H$  die Böschungshöhe bedeuten. Für  $\varphi = 0$  ist  $N_s \cong 4$ . Werden  $c$  und  $p$  als Variable mit den Standardabweichungen  $S_c$  und  $S_p$  betrachtet, so ergeben sich folgende partielle Ableitungen:

$$\frac{\partial F}{\partial c} = \frac{1 \cdot N_s}{\gamma \cdot H} \quad \frac{\partial F}{\partial p} = - \frac{1}{\gamma \cdot H}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial c^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial p^2} = 0$$

Die Formeln (1) ergeben

- den Mittelwert  $\bar{F}$
- die Varianz  $S_F^2$
- die Standardabweichung  $S_F$

$$\bar{F} = \frac{\bar{c} \cdot N_s - \bar{p}}{\gamma \cdot H} + 0$$

Bild 7. Mühle Quasseem, Saudi-Arabien. Stabilität der Maschinenhausbaugrube

**Stabilität des Erdkeils (ebene Gleitfläche)**

Eingabe	Mittel	Standardabweichung
Kohäsion $c$ [t/m <sup>2</sup> ]	16,8	5,3
Nutzlast $p$ [t/m <sup>2</sup> ]	8	1
Raumgewicht $\gamma$ [t/m <sup>3</sup> ]	2	konstant

**Sicherheit:**

$$\bar{F} = \frac{\bar{c} \cdot N_s - \bar{p}}{\gamma \cdot H} = 3,7$$

**Standardabweichung:**  
( $\varphi = 0 \rightarrow N_s = 4$ )

$$S_F = \sqrt{\left(\frac{N_s}{\gamma \cdot H} \cdot S_c\right)^2 + \left(\frac{1}{\gamma \cdot H} \cdot S_p\right)^2}$$

$$= \sqrt{1,775 + 0,004} = 1,33$$

**Bruchwahrscheinlichkeit:**

$$z = \frac{1,0 - \bar{F}}{S_F} = \frac{1,0 - 3,7}{1,33} = -2,03$$

Nach Harr (Tabelle A-3) folgt:

$$\psi = 0,479$$

$$P[F \leq 1,0] = 0,5 - \psi = 0,021 \text{ oder } 2,1\%$$

$$S_F^2 = \left( \frac{N_S}{\gamma \cdot H} \cdot S_c \right)^2 + \left( \frac{1}{\gamma \cdot H} \cdot S_p \right)^2$$

$$S_F = \sqrt{S_F^2}$$

Die Streuung der Sicherheit  $S_F$  (siehe Bild 7) ist praktisch vollständig durch die hohe Streuung der Kohäsion bedingt.

Trotz der hohen mittleren Sicherheit von  $\bar{F} = 3,7$  gab die Baugrube doch zu Bedenken Anlass, da sich aus der Streuung von  $F$  eine Bruchwahrscheinlichkeit von  $P[F \leq 1,0] = 2,1\%$  ergab. Dies gab Anlass dazu, den Bauvorgang abzuändern und doch wenigstens das unterste Stockwerk des Maschinenhauses vor dem Bau des Silos zu erstellen. Damit konnte der Bauvorgang *wesentlich sicherer* gestaltet werden.

**Beispiel 2: Kriechhang bei der neuen Lombachbrücke an der Habkernstrasse**

Unterhalb des Dorfes Habkern bei Interlaken quert die Staatsstrasse den Lombach auf einer neuen Brücke, welche im selben Heft beschrieben wird [8]. Die südliche Zufahrt der Brücke führt über einen Lehnenviadukt längs eines Hanges, wo weichere Flyschgesteine sich in einer langsamen Bewegung von mehreren Zentimetern pro Jahr befinden (Bild 8).

Obwohl die Hanganschnitte geringfügig sind, wurde versucht, mit Hilfe von verankerten Schächten die Stabilitätsverhältnisse zu verbessern.

Bild 9 stellt die Untersuchungen an einer der geprüften Gleitflächen dar. Da die Form der Gleitfläche wegen der Felsverhältnisse und der Anker unregelmässig gewählt wurde, haben wir die Rechenmethode von Janbu verwendet. Die Mittelwerte der Scherparameter  $\bar{c}$  und  $\bar{\varphi}$  wurden dem geologischen Gutachten entnommen, die Streuungen haben wir nach den Angaben in Tabelle 1 geschätzt.

Die Berechnung der Sicherheit und deren Streuung erfolgt gemäss Bild 9 vier-

mal für die Randwerte  $\bar{\varphi} \pm S_\varphi$  und  $\bar{c} \pm S_c$  nach der Methode *Rosenblueth*. Unter der Annahme, die Sicherheit habe eine Wahrscheinlichkeitsverteilung nach der Gausschen Glockenkurve, ergibt sich bei einem durchschnittlichen Sicherheitsgrad von  $\bar{F} = 1,25$  und einer Standardabweichung von  $S_F = 0,15$  eine *Bruchwahrscheinlichkeit* von 4,8%. Eine Nachrechnung mit einer Beta-Verteilung ergab praktisch das gleiche Resultat.

Für einen Kriechhang erstaunt dieses Resultat keineswegs. Es zeigt, dass dem Hang gegenüber vorher eine *etwas verbesserte Stabilität* gegeben werden konnte, dass aber die *Kriechtendenz andauern* dürfte. Daraus wurden folgende Schlüsse gezogen:

- Die Vorspannanker müssen *nachstellbar* sein, damit sie der Entwicklung angepasst werden können.
- Die Stützwand muss *flexibel* sein, um die Bewegungen aufnehmen zu können.
- Eine umfassende *Messung und Kontrolle der Bewegungen* und der Ankerkräfte sind notwendig.

Nach einem Jahr zeigte sich, dass die

Bewegungen der Fixpunkte oberhalb der Wand von vorher etwa 10 cm/Jahr auf wenige cm/Jahr zurückgegangen waren. Die Ankerkräfte wiesen Zunahmen zwischen 0 und 22% auf, was der Erwartung entspricht. Einzelne Anker zeigten Zunahmen über 30%, so dass sie auf die ursprüngliche Ankerkraft abgelassen werden mussten. Die Beobachtungen des laufenden Jahres werden zeigen, ob allenfalls zusätzliche Anker notwendig sind.

**Beispiel 3: Baugrube in Kriechhang**

Für eine Baugrube in einem Kriechhang in der Umgebung von Lausanne ist eine verankerte Rühlwand geplant (Bild 10). In Anbetracht des Strömungsdruckes des Grundwassers liegt die Sicherheit des Hanges im heutigen Zustand schon bei  $\sim 1$ . Durch die verankerte Wand soll die *Sicherheit lokal verbessert* werden.

Dem wahrscheinlichen Bruchmechanismus der Wand entsprechen, je nach gewählter Ankerlänge, drei polygonale Gleitflächen gemäss Bild 10. Zur Berechnung eignet sich wiederum die Methode von *Janbu*. Da die Kohäsion  $c =$

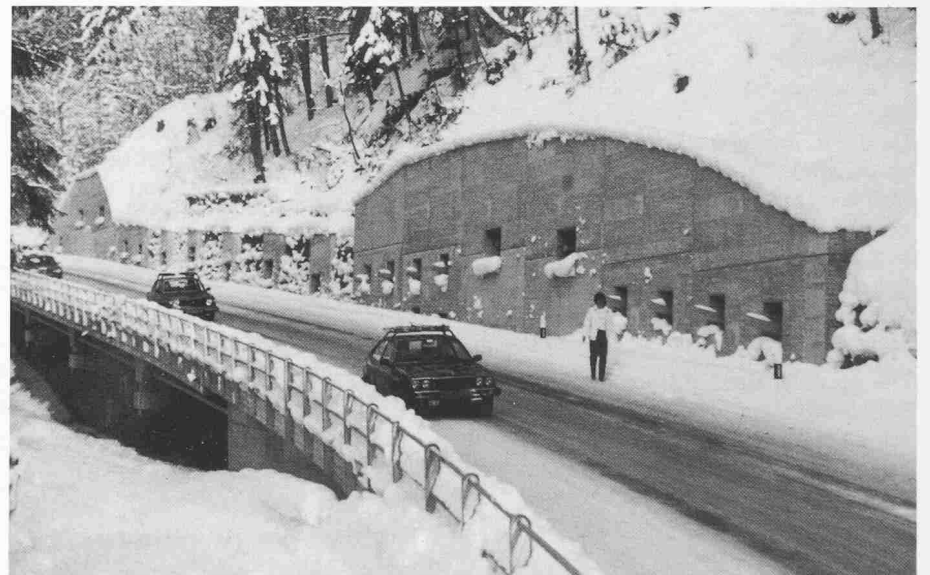


Bild 8. Neue Lombachbrücke Habkern. Blick auf Lehnenviadukt und Hangsicherung (Photo M. Dietrich)

Bild 9. Kriechhang Habkernstrasse. Berechnung mit Programm Janbu und probabilistische Auswertung

Sicherheiten nach Janbu:				
	$\varphi$	$c$	$F$	$F^2$
++	38,5	1,4	1,447	2,093
+-	38,5	1,4	1,363	1,858
-+	31,5	0,6	1,150	1,322
--	31,5	0,6	1,066	1,136
			$\Sigma F = 5,026$	$\Sigma F^2 = 6,410$

Sicherheit (Mittel):

$$\bar{F} = \frac{1}{4} \cdot 5,026 = 1,256$$

Standardabweichung:

$$S_F = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot 6,41 - \left(\frac{1}{4} \cdot 5,026\right)^2} = 0,154$$

Bruchwahrscheinlichkeit:

$$z = \frac{1,0 - 1,256}{0,154} = -1,662$$

$$\psi = 0,452$$

$$P [F \leq 1] = 0,5 - \psi = 4,8\%$$

Bodenkennziffern	Mittel	Standardabweichung
Kohäsion	$\bar{c} = 1 \text{ t/m}^2$	$S_c = 0,4 \text{ t/m}^2$
Reibungswinkel	$\bar{\varphi} = 35^\circ$	$S_\varphi = 3,5^\circ$
Raumgewicht	$\gamma = 2,2 \text{ t/m}^3$	konstant

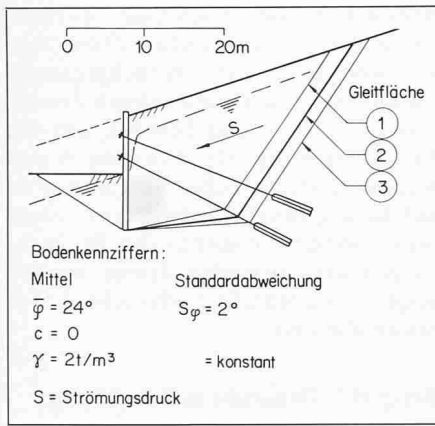


Bild 10. Verankerte Rühlwand in Kriechhang. Untersuchte Gleitflächen

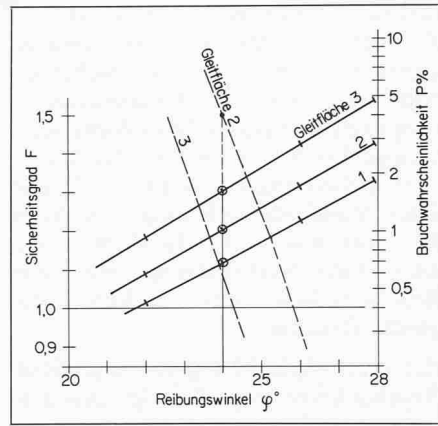


Bild 11. Verankerte Rühlwand in Kriechhang. Sicherheit und Bruchwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit vom angenommenen Reibungswinkel

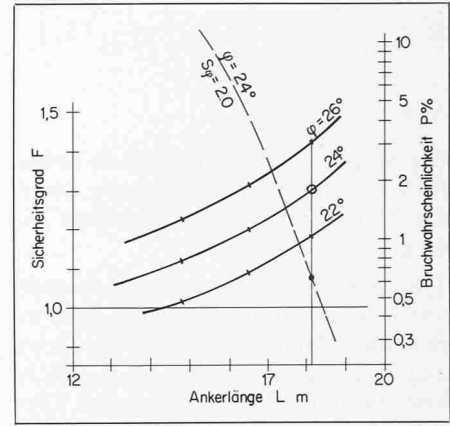


Bild 12. Verankerte Rühlwand in Kriechhang. Sicherheit und Bruchwahrscheinlichkeit in Abhängigkeit von der Ankerlänge

0 angenommen wurde, kann die Berechnung der Streuung von  $F$  mit den beiden Randwerten  $\bar{\varphi} \pm S_{\varphi}$  vorgenommen werden. Die Methode *Rosenblueth* vereinfacht sich dann wie folgt:

Reibungswinkel Randwert	Sicherheit
$\bar{\varphi} + S_{\varphi}$	$\rightarrow F_+$
$\bar{\varphi} - S_{\varphi}$	$\rightarrow F_-$
Mittelwert	$\bar{F} = \frac{1}{2} (F_+ + F_-)$
Standard- abweichung	$S_F = \frac{1}{2} (F_+ - F_-)$

Da die Reibungswinkel nicht genau bekannt sind, haben wir die Berechnung mit verschiedenen Werten ausgeführt. Bild 11 zeigt die Resultate in Abhängigkeit vom Reibungswinkel. Die Sicherheiten nehmen mit dem Reibungswinkel zu. Für Gleitfläche 3 liegt sie zwischen 1,2 und 1,5 (ausgezogene Linien).

Die gestrichelten Linien stellen die Bruchwahrscheinlichkeit für die verschiedenen gewählten *Reibungswinkel* mit einer Standardabweichung von  $S_{\varphi} = 2^\circ$  dar. Eine geringe Erhöhung des Reibungswinkels, z.B. von  $24^\circ$  auf  $26^\circ$ , bringt eine Steigerung der Sicherheit von etwa 10%, aber gleichzeitig reduziert sich die Bruchwahrscheinlichkeit um einen Faktor 10.

Wir folgern daraus, dass schon geringe Unterschiede im Reibungswinkel für die Beurteilung der Stabilität eine beträchtliche Rolle spielen, und dass sich daher detaillierte Untersuchungen mit Bestimmung des Reibungswinkels lohnen.

Bild 12 betrachtet die Sicherheit (ausgezogene Linien) und Bruchwahrscheinlichkeit (gestrichelte Linien) in Abhängigkeit von der *Ankerlänge*. Auch hier ergibt sich die gleiche Schlussfolgerung: Eine Verlängerung der Anker um beispielsweise 1,5 m erhöht die Sicherheit um etwa 10%, reduziert aber die

Bruchwahrscheinlichkeit um einen Faktor 10. Längere Anker tragen daher massgeblich zur Sicherheit bei.

### Zusammenfassung und Schlussfolgerung

Die Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermöglichen es, Stabilitätsprobleme in der Geotechnik auf eine neue Art zu untersuchen. In Ergänzung zum wie bisher bestimmten Sicherheitsgrad  $F$  wird aus den Streuungen der Eingabewerte, vor allem des Reibungswinkels  $\varphi$  und der Kohäsion  $c$ , die Streuung des Sicherheitsgrades berechnet. Daraus kann dann, unter gewissen Annahmen über die statistische Verteilung dieser Streuung, die Wahrscheinlichkeit für den Bruch einer Böschung berechnet werden. Mit den *beiden Angaben*

- Sicherheitsgrad
- Bruchwahrscheinlichkeit

können Böschungen zuverlässiger beurteilt werden als mit der Sicherheit allein.

Im vorliegenden Artikel wurden zwei praktisch anwendbare Methoden gezeigt, mit denen aus den Streuungen der Eingabewerte auf die Streuung des Sicherheitsgrades geschlossen werden kann. Die eine davon, die Methode *Rosenblueth*, ist einfach zu handhaben und für jedes Problem geeignet. Anschliessend wurden drei Beispiele vorgestellt, bei denen die Zusatzinformation der Bruchwahrscheinlichkeit einen wesentlichen Punkt für die Beurteilung darstellte.

Die Grösse der zulässigen Bruchwahrscheinlichkeit hängt stark vom Problem ab. Im allgemeinen scheinen Werte zwischen 0,1 und 1,0% sinnvoll. Verbindliche Werte werden sich erst aus einer verbreiteten Anwendung ergeben.

### Literatur

- [1] *Harr, M. E.*: «Mechanics of particulate media. A probabilistic approach». Mc Graw Hill, N.Y., 1977, und *Harr, M. E.*: «Mécanique des milieux formés de particules». Presses Polytechniques Romandes, Lausanne, 1981
- [2] *Recordon, E. et Desponds, J. M.*: «Dispersions des caractéristiques des sols naturels considérés comme homogènes». 9e congrès international de la SIMSTF, session spéciale 6, Tokio, 1977
- [3] *Benjamin, J. R. and Cornell, C. A.*: «Probability, statistics, and decision for civil engineers». Mc Graw Hill, N.Y., 1970
- [4] *Ang, A.H.S. and Tang, W. H.*: «Probability concepts in engineering planning and design». J. Wiley, N.Y., 1975
- [5] *Hahn, G. J. and Shapiro, S. S.*: «Statistical models in engineering». J. Wiley, N.Y., 1967
- [6] *Rosenblueth, E.*: «Point estimates for probability moments». Proc. Nat. Acad. Sci. USA, Vol. 72, No 10, pp 3812-3814, October 1975
- [7] *Bourdeau, P. L.*: «Programme BETA, calculs interactifs avec distributions de probabilité Beta, manuel de l'utilisateur». EPFL-dgc-irsf-LMS, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 1982
- [8] *Lebel, H., Dietrich, M.*: «Talübergang im Bereich eines grossräumigen Kriechhanges. Die neue Lombachbrücke Habkern». Schweizer Ingenieur und Architekt, Heft 16, 1983

### Verdankung

Die Arbeit ist eine erweiterte Fassung eines Referates, das ich am Seminar «Méthodes probabilistes en géotechnique», 7./8. März 1983, an der EPFL in Ecublens gehalten habe. Für den theoretischen Teil «Prinzip der probabilistischen Rechnungsmethode» habe ich mich weitgehend auf einen unveröffentlichten Text von Herrn *P.L. Bourdeau*, EPFL, gestützt. Ferner möchte ich Herrn Prof. *M.E. Harr*, Purdue University, West Lafayette, Indiana, für die tatkräftige Hilfe anlässlich der Seminare vom Januar 1982 und 1983 an der EPFL bestens danken. Für die Zurverfügungstellung von Unterlagen danke ich der Firma Losinger AG (Baustelle Quasseem), Ing.büro Theiler AG, Thun, und Ing.büro Züblin & Cie. AG, Zürich.

Adresse des Verfassers: *H. G. Locher*, dipl. Bau-Ing. ETH/SIA, c/o Terrexpert AG, Stauffacherstrasse 130, 3014 Bern.