

Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 89 (1971)
Heft: 11: 2. Sonderheft zum 70. Geburtstag von Prof. Dr. F. Stüssi

Artikel: Numerische Auswertung von unendlichen alternierenden Lösungsreihen mit schlechter Konvergenz
Autor: Eisenbiegler, Günter
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-84798>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 09.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Literaturverzeichnis

- [1] Mikusinski, Jan: Operatorenrechnung. Berlin 1957, Deutscher Verlag der Wissenschaft (VEB). Engl. Ausgabe: Operational Calculus. London 1960, Perg. Press.
- [2] Collatz, L.: Numerische Behandlung von Differentialgleichungen. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1955, J. Springer.
- [3] Stüssi, F.: Entwurf und Berechnung von Stahlbauten. Bd. 1. Grundlagen des Stahlbaues. Berlin 1958, J. Springer, S. 168/226.
- [4] Stüssi, F.: Die verbesserte Seilpolygonmethode zur Lösung von Differentialgleichungen zweiter Ordnung. «Abh. IVBH» 29 (1969) Nr. 2, S. 201/216.
- [5] Falk, S.: Die Berechnung des beliebig gestützten Durchlaufträgers nach dem Reduktionsverfahren. «Ing. Arch.» 24 (1956) S. 216/232.
- [6] Gurr, S.: Beitrag zur Anwendung des Differenzenverfahrens bei linearen und nichtlinearen Randwertaufgaben zweiter Ordnung. «Ing. Arch.» 35 (1966) S. 248/261.
- [7] Dimitrov, N.: Operatorenrechnung und ihre Anwendung auf die Baustatik. «Abh. IVBH» 24 (1964) S. 31/60.
- [8] Dimitrov, N.: Operatorenstatik. Fortschr.-Bericht der VDI-Z. Reihe 4, Nr. 4, Düsseldorf 1968.
- [9] Dimitrov, N.: Die baustatische Methode in Operatorenform. Mitt. des Instituts für Stahl- und Leichtmetallbau. Karlsruhe 1969.
- [10] Dimitrov, N.: The Application of the Operational Calculus to Frames. Int. Symp. Univ. of Newcastle upon Tyne 1966.
- [11] Eisenbiegler, G.: Operatorenkalkül zur Berechnung von Stab- und Flächentragwerken. Diss. Univ. Karlsruhe (TH) 1969.
- [12] Butzer, P.L.: Die Anwendung des Operatorenkalküls von Jan Mikusinski auf lineare Integralgleichungen vom Faltungstypus. Arch. f. Rat. Mech. and Anal. 2 (1958) Nr. 2, S. 114/120.
- [13] Butzer, P.L.: Singular Integral Equations of Volterra Type and the Finite Part of Divergent Integrals. Arch. f. Rat. Mech. and Anal. 3 (1959) Nr. 3, S. 194/205.
- [14] Butzer, P.L., und H. Schulte: Ein Operatorenkalkül zur Lösung gewöhnlicher und partieller Differenzengleichungssysteme von Funktionen diskreter Veränderlicher und seine Anwendungen. Forsch. Bericht des Landes Nordrhein-Westfalen, Nr. 1557. Köln und Opladen 1965.
- [15] Schulte, H.: Ein diskreter zweidimensionaler Operatorenkalkül zur Lösung partieller Differenzengleichungen und seine Anwendung bei der numerischen Lösung partieller Differentialgleichungen. Diss. Aachen 1966.
- [16] Wloka, J.: Über die Anwendung der Operatorenrechnung auf lineare Differential-Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten. Diss. Heidelberg 1958.
- [17] Erdélyi, A.: Lectures on Mikusinski's Theory of Operational Calculus and generalized Functions. Pasadena 1959; Holt, Rinehart and Wilson, N.Y. 1962.
- [18] Berg, L.: Einführung in die Operatorenrechnung. Berlin 1962, VEB-Verlag.
- [19] Elias, I.: Über eine Operatorenmethode zur Lösung von Differenzengleichungen. Mat. Fys. Casopis. Slovenska Akademia, Bratislava 1958, S. 203/226.
- [20] Fenyő, J.: Eine neue Methode zur Lösung von Differenzengleichungen nebst Anwendungen. «Periodica Politechnica, Budapest» 3 (1959) S. 135/151.
- [21] Dubas, P.: Calcul numérique des plaques et des parois minces. Schweiz. Bauzeitung 79 (1961) Nr. 17, S. 280/288.
- [22] Dimitrov, N. und W. Herberg: Festigkeitslehre. 2. Bd. Sammlung Göschen, Berlin 1971 (Erscheint demnächst).

Numerische Auswertung von unendlichen alternierenden Lösungsreihen mit schlechter Konvergenz

DK 517.52

Von Dr.-Ing. Günter Eisenbiegler, wissenschaftlichem Assistenten am «Institut für Baustatik und Messtechnik» (Direktor Prof. Dr.-Ing. B. Fritz), Universität Karlsruhe (TH)

1. Problemstellung

Bei der Berechnung von Stab- und vor allem von Flächen-tragwerken lassen sich die gesuchten Lösungen oft in der Form von einfachen, unendlichen Reihen darstellen. Konvergieren diese Reihen allerdings nur sehr schleppend, so ist ihre Aufsummierung mühsam und zeitraubend. Selbst mit dem Einsatz von Elektronenrechnern kann vielfach die gewünschte Genauigkeit des Summenwertes nicht erreicht werden, wenn beispielsweise die auftretenden Rundungsfehler die höheren Reihenglieder zu stark verfälschen, oder wenn die Ermittlung einer sehr grossen Anzahl von erforderlichen Gliedern zu aufwendig wird. Im folgenden wird nun für unendliche, alternierende Reihen mit langsamer Konvergenz eine einfache Methode angegeben, die nur wenige Anfangsglieder einer solchen Reihe benötigt, um deren Summenwert mit einer hohen Genauigkeit zu berechnen. Im Bauwesen ist diese Methode bislang wenig bekannt geworden.

2. Mathematische Grundlagen

Die beliebige, konvergente Reihe

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n V_n = V_0 - V_1 + V_2 - V_3 + V_4 - \dots$$

lässt sich mit Hilfe der Eulerschen Reihentransformation (vgl. [1], [2]) wie folgt umformen:

$$(2) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n V_n = \frac{1}{2} V_0 + \frac{1}{4} \Delta V_0 + \frac{1}{8} \Delta^2 V_0 + \dots + \frac{1}{16} \Delta^3 V_0 + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \Delta^k V_0 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k V_0}{2^{k+1}}$$

Dabei bedeuten allgemein $\Delta V_n = V_n - V_{n+1}$ die ersten und $\Delta^k V_n = \Delta^{(k-1)} V_n - \Delta^{(k-1)} V_{n+1}$ die höheren Differenzen der Gliederfolge (V_n).

Diese Umformung bewirkt bei schlecht konvergierenden,

alternierenden Reihen eine wesentliche Konvergenzbeschleunigung, und zwar konvergiert die transformierte Reihe umso schneller, je schleppender die Konvergenz der vorgelegten Reihe ist. Für die Abschätzung der Restsumme

$$R_p = \sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{\Delta^k V_0}{2^{k+1}}$$

nach p Gliedern der Reihe (2) gilt die kurze Beziehung

$$(3) \quad |R_p| < \frac{|\Delta^p V_0|}{2^p},$$

an die jedoch die Bedingung geknüpft ist, dass nicht nur die Glieder V_n sondern auch die p -ten Differenzen $\Delta^p V_n$ eine positive, monotone Nullfolge bilden müssen.

Es ist natürlich ebenso möglich, mit der gezeigten Umformung erst bei einem bestimmten Reihenglied V_i zu beginnen. Man erhält dann

$$(4) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n V_n = V_0 - V_1 + V_2 - V_3 \dots \mp V_{i-1} \pm \frac{1}{2} V_i \pm \frac{1}{4} \Delta V_i \pm \frac{1}{8} \Delta^2 V_i \dots = V_0 - V_1 + V_2 - V_3 \dots \mp V_{i-1} \pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k V_i}{2^{k+1}}.$$

Von dieser Möglichkeit wird man mit Vorteil immer dann Gebrauch machen, wenn die Konvergenzgeschwindigkeit nach einer gewissen Gliederanzahl merklich zurückgeht, oder wenn eine monotone Nullfolge der V_n überhaupt erst vom i -ten Gliede an vorhanden ist.

Abschliessend sei vermerkt, dass man in vielen, praktisch wichtigen Fällen auf Reihen folgender Bauart stösst:

$$\begin{aligned}
(5) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\sum_{m=0}^m V_{nm} \right) &= \\
&= + V_{00} + V_{01} + V_{02} + \dots + V_{0m} \\
&\quad - V_{10} - V_{11} - V_{12} - \dots - V_{1m} \\
&\quad + V_{20} + V_{21} + V_{22} + \dots + V_{2m} \\
&\quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
&= \sum_{m=0}^m V_{0m} - \sum_{m=0}^m V_{1m} + \sum_{m=0}^m V_{2m} - \dots
\end{aligned}$$

Betrachtet man hierbei die Teilsummen $\sum_{m=0}^m V_{nm}$ als Glieder V_n einer alternierenden Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n V_n$, so lässt sich die angegebene Transformationsmethode wiederum erfolgreich anwenden.

3. Anwendungsbeispiele

Beispiel 1

Für die m_y -Momentenfläche der in Bild 1 dargestellten, vierseitig gelagerten Rechteckplatte ergibt sich unter der Gleichflächenlast p der folgende Ausdruck (vgl. [3]):

$$\begin{aligned}
(6) \quad m_y(x, y) &= - \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{-\hat{\psi}_{-1,1} \cdot \hat{\psi}_{2,1} + \hat{\psi}_{0,1} \cdot \hat{\psi}_{1,1}}{\hat{\psi}_{1,1} \cdot \hat{\psi}_{2,1} - \hat{\psi}_{0,1} \cdot \hat{\psi}_{3,1}} \cdot \hat{\psi}_{3,y} \right. \\
&\quad \left. + \frac{-\hat{\psi}_{1,1} \cdot \hat{\psi}_{1,1} + \hat{\psi}_{-1,1} \cdot \hat{\psi}_{3,1}}{\hat{\psi}_{1,1} \cdot \hat{\psi}_{2,1} - \hat{\psi}_{0,1} \cdot \hat{\psi}_{3,1}} \cdot \hat{\psi}_{2,y} + \hat{\psi}_{1,y} \right) \frac{2}{\beta} \cdot \sin(\beta x)
\end{aligned}$$

Faktor: $p l_y^2$.

Die verwendeten Abkürzungen bedeuten dabei

$$\hat{\psi}_{-1,1} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\beta^4} (1 - \cosh(\beta)) + \frac{1}{\beta^3} \cdot \sinh(\beta) \right)$$

$$\hat{\psi}_{0,1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\beta^2} \cdot \cosh(\beta) - \frac{1}{\beta^3} \cdot \sinh(\beta) \right)$$

$$\hat{\psi}_{1,1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\beta} \cdot \sinh(\beta);$$

$$\hat{\psi}_{1,y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\beta} \cdot \sinh(\beta y)$$

$$\hat{\psi}_{2,1} = \frac{1}{2} \left(\cosh(\beta) + \frac{1}{\beta} \cdot \sinh(\beta) \right);$$

$$\hat{\psi}_{2,y} = \frac{1}{2} \left(y \cdot \cosh(\beta y) + \frac{1}{\beta} \cdot \sinh(\beta y) \right)$$

$$\hat{\psi}_{3,1} = \frac{1}{2} \left(2 \cdot \cosh(\beta) + \beta \cdot \sinh(\beta) \right);$$

$$\hat{\psi}_{3,y} = \frac{1}{2} \left(2 \cdot \cosh(\beta y) + \beta y \cdot \sinh(\beta y) \right)$$

$$\beta = \frac{m \pi}{2}.$$

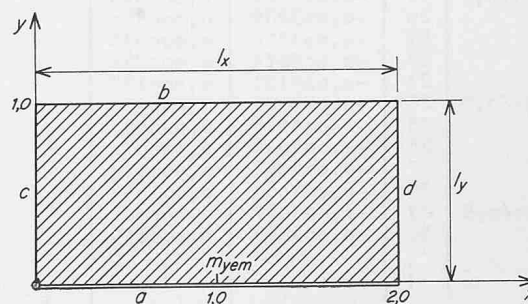
Werten wir die rechte Seite der Formel (6) für die Koordinaten $(x = 1,0; y = 0,0)$ aus, so erhalten wir für das negative Einspannmoment $-m_{yem}$ eine unendliche, alternierende Reihe vom Typ (1). Ihre einzelnen Glieder sind mit V_0 beginnend in Tabelle 1, Spalte 4, aufgetragen. Man sieht, dass die anfangs rasche Konvergenz bereits nach etwa 4 Gliedern stark nachlässt, und es ist deshalb zweckmässig, in diesem Bereich mit der beschriebenen Reihenumformung einzusetzen.

Bilden wir nach dem übersichtlichen Schema der Tabelle 1 die benötigten höheren Differenzen $\Delta^k V_n$, dann lässt sich mit deren unterstrichenen Zahlenwerten die folgende Summe anschreiben:

Tabelle 1.

m	n	$\sum_{n=0}^n (-1)^n V_n$	V_n	ΔV_n	$\Delta^2 V_n$	$\Delta^3 V_n$	$\Delta^4 V_n$	$\Delta^5 V_n$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	0,135336	<u>0,135336</u>					
3	1	0,118131	<u>0,017206</u>					
5	2	0,122230	<u>0,004100</u>					
7	3	0,120727	<u>0,001504</u>					
9	4	0,121434	<u>0,000708</u>					
11	5	0,121047	0,000388	<u>0,000320</u>				
13	6	0,121282	0,000235	0,000153	<u>0,000167</u>			
15	7	0,121129	0,000153	0,000082	0,000071	<u>0,000096</u>		
17	8	0,121234	0,000105	0,000048	0,000034	0,000037	<u>0,000059</u>	
19	9	0,121159	0,000075	0,000030	0,000018	0,000016	0,000021	<u>0,000038</u>
21	10	0,121214	0,000056					
23	11	0,121172	0,000042					
25	12	0,121204	0,000033					
27	13	0,121179	0,000026					
29	14	0,121200	0,000021					
31	15	0,121182	0,000017					
33	16	0,121197	0,000014					
35	17	0,121185	0,000012					
37	18	0,121195	0,000010					
39	19	0,121186	0,000009					
41	20	0,121194	0,000007					
43	21	0,121187	0,000006					
⋮	⋮	⋮	⋮					

Bild 1.
Vierseitig gelagerte
Rechteckplatte
unter Gleichlast



$$\begin{aligned}
-m_{yem} &= \sum_0^{\infty} (-1)^n V_n = V_0 - V_1 + V_2 - V_3 + \\
&+ \frac{1}{2} V_4 + \frac{1}{4} \Delta V_4 + \frac{1}{8} \Delta^2 V_4 + \dots \\
-m_{yem} &\cong 0,135336 - 0,017206 + 0,004100 - \\
&- 0,001504 + \frac{1}{2} 0,000708 + \frac{1}{4} 0,000320 + \frac{1}{8} 0,000167 + \\
&+ \frac{1}{16} 0,000096 + \frac{1}{32} 0,000059 + \frac{1}{64} 0,000038 = \underline{0,121190}
\end{aligned}$$

Erfolgt die Umformung erst bei $n = 5$, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
-m_{yem} &= \sum_0^{\infty} (-1)^n V_n = \sum_0^4 (-1)^n V_n - \frac{1}{2} V_5 - \\
&- \frac{1}{4} \Delta V_5 - \frac{1}{8} \Delta^2 V_5 - \frac{1}{16} \Delta^3 V_5 - \dots \\
-m_{yem} &\cong 0,121434 - \\
&- \frac{1}{2} \cdot 0,000388 - \frac{1}{4} \cdot 0,000153 - \frac{1}{8} \cdot 0,000071 - \\
&- \frac{1}{16} \cdot 0,000037 - \frac{1}{32} \cdot 0,000021 = \underline{0,121190},
\end{aligned}$$

das heisst auf 6 Ziffern genau der gleiche Momentenwert wie oben.

In diesem Beispiel genügen somit 10 Reihenglieder, um die gesuchte Schnittgrösse mit einer Genauigkeit zu berechnen, für die bei einer gewöhnlichen Aufsummierung rund 50 Glieder notwendig wären.

Tabelle 2.

α	n	$\sum_0^n (-1)^n V_n$	V_n	ΔV_n	$\Delta^2 V_n$	$\Delta^3 V_n$	$\Delta^4 V_n$	$\Delta^5 V_n$	$\Delta^6 V_n$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$1\pi/0,9$	0	0,005223	0,005223						
$2\pi/0,9$	1	-0,018019	0,023242						
$3\pi/0,9$	2	0,010521	0,028540	0,000293					
$4\pi/0,9$	3	-0,017726	0,028247	0,002603	-0,002310				
$5\pi/0,9$	4	0,007918	0,025644	0,003522	-0,000919	-0,001391			
$6\pi/0,9$	5	-0,014204	0,022122	0,003673	-0,000151	-0,000768	-0,000623		
$7\pi/0,9$	6	0,004245	0,018449	0,003429	0,000244	-0,000395	-0,000373	-0,000250	
$8\pi/0,9$	7	-0,010775	0,015020	0,003010	0,000419	-0,000175	-0,000220	-0,000153	-0,000097
$9\pi/0,9$	8	0,001235	0,012010						
$10\pi/0,9$	9	-0,008235	0,009470						
	10	-0,000851	0,007384						
	11	-0,006556	0,005705						
	12	-0,002182	0,004374						
	13	-0,005514	0,003332						
$15\pi/0,9$	14	-0,002989	0,002525						
	15	-0,004893	0,001904						
	16	-0,003464	0,001429						
	17	-0,004533	0,001069						
	18	-0,003736	0,000797						
$20\pi/0,9$	19	-0,004329	0,000593						
	20	-0,003889	0,000440						
	21	-0,004214	0,000325						
	22	-0,003974	0,000240						
$25\pi/0,9$	23	-0,004151	0,000177						
	24	-0,004021	0,000130						
	25	-0,004116	0,000095						
	26	-0,004046	0,000070						
	27	-0,004096	0,000050						
	28	-0,004060	0,000036						
$30\pi/0,9$	29	-0,004087	0,000027						
	30	-0,004068	0,000019						
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$						

Beispiel 2

Die exakte funktionale Darstellung der Einflussfläche (EFF) für die Randquerkraft q_{yb} am beidseits starr eingespannten Plattenvollstreifen (Bild 2) lautet nach [3]:

$$\begin{aligned}
(7) \quad EFF - q_{yb}(x, y) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{-\tilde{\psi}_{1,1}}{\tilde{\psi}_{1,1} \cdot \tilde{\psi}_{1,1} - \tilde{\psi}_{0,1} \cdot \tilde{\psi}_{2,1}} \cdot \tilde{\psi}_{1,y} + \right. \\
&+ \left. \frac{\tilde{\psi}_{2,1}}{\tilde{\psi}_{1,1} \cdot \tilde{\psi}_{1,1} - \tilde{\psi}_{0,1} \cdot \tilde{\psi}_{2,1}} \cdot \tilde{\psi}_{0,y} \right) \cos(\alpha x) d\alpha \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{w}(\alpha, y) \cdot \cos(\alpha x) d\alpha; \text{ Faktor: } \frac{P}{l_y}.
\end{aligned}$$

Als Abkürzungen sind darin eingeführt

$$\tilde{\psi}_{0,1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha^2} \cdot \cosh(\alpha) - \frac{1}{\alpha^3} \cdot \sinh(\alpha) \right);$$

$$\tilde{\psi}_{0,y} = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\alpha^2} \cdot \cosh(\alpha y) - \frac{1}{\alpha^3} \cdot \sinh(\alpha y) \right)$$

$$\tilde{\psi}_{1,1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\alpha} \cdot \sinh(\alpha);$$

$$\tilde{\psi}_{1,y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{\alpha} \cdot \sinh(\alpha y)$$

$$\tilde{\psi}_{2,1} = \frac{1}{2} \left(\cosh(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \cdot \sinh(\alpha) \right)$$

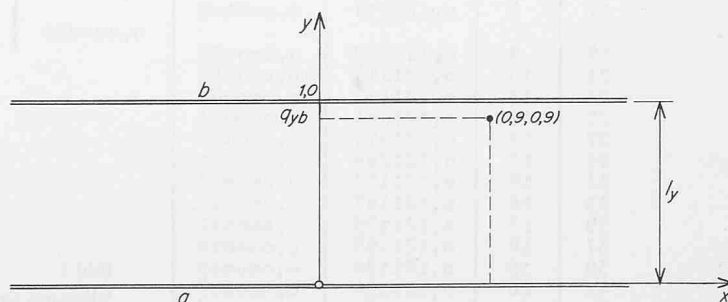


Bild 2. Beidseits starr eingespannter Plattenvollstreifen
Rand a: starr eingespannt; Ränder b, c, d: frei drehbar gelagert

Für den grössten Teil des interessierenden Plattenbereiches liefert die numerische Auswertung von Gleichung (7) bereits nach einer kurzen Integrationsstrecke sehr genaue Einflussordinaten. Eine Ausnahme macht zum Beispiel der Punkt ($x = 0,9$; $y = 0,9$).

Nach einem Vorschlag von I. M. Longman [4] spaltet man dafür das uneigentliche Integral zweckmässig wie folgt auf:

$$(8) \quad EFF - q_{yb}(0,9; 0,9) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \hat{w}(\alpha, 0,9) \cdot \cos(\alpha \cdot 0,9) d\alpha$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{0,9}} \dots + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{0,9}}^{\frac{2\pi}{0,9}} \dots + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{0,9}}^{\frac{3\pi}{0,9}} \dots + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{3\pi}{0,9}}^{\frac{4\pi}{0,9}} \dots + \dots$$

$$= (V_0 - V_1 + V_2 - V_3 + \dots) \cdot (-1).$$

Zufolge des oszillierenden Integrandenanteiles $\cos(\alpha \cdot 0,9)$ lässt sich aus Gleichung (8) eine unendliche, alternierende Reihe ableiten, deren Glieder V_n aus den angegebenen Teilintegralen gebildet werden. Wie aus Tabelle 2, Spalte 4, zu sehen, erfüllt diese Reihe vom 3. Gliede an die Voraussetzungen $V_n > 0$, $V_n > V_{n+1}$ und $V_{n+1}/V_n > 1/2$, nach denen sich eine Behandlung gemäss Abschnitt 2 anbietet.

Mit den in Tabelle 2 berechneten höheren Differenzen ergibt sich für $i = 2$ gemäss Gleichung (4)

$$-EFF - q_{yb}(0,9; 0,9) = V_0 - V_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k V_2}{2^{k+1}}$$

$$\cong 0,005223 - 0,023242 +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot 0,028540 + \frac{1}{4} \cdot 0,000293 - \frac{1}{8} \cdot 0,002310 -$$

$$- \frac{1}{16} \cdot 0,001391 - \frac{1}{32} \cdot 0,000623 - \frac{1}{64} \cdot 0,000250 -$$

$$- \frac{1}{128} \cdot 0,000097 \cong -0,004076.$$

Für $i = 3$ ergibt sich ebenso

$$-EFF - q_{yb}(0,9; 0,9) = V_0 - V_1 + V_2 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k V_3}{2^{k+1}}$$

$$\cong 0,005223 - 0,023242 + 0,028540 - \frac{1}{2} \cdot 0,028247 -$$

Aluminiumkonstruktionen im Bauwesen

Von Prof. Dr.-Ing. Otto Steinhardt, Inhaber des Lehrstuhls für Stahl- und Leichtmetallbau und Direktor der Versuchsanstalt für Stahl, Holz und Steine der Universität Karlsruhe (TH)

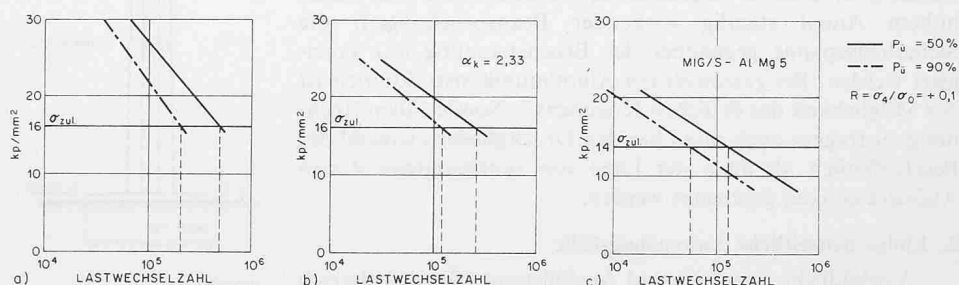
1. Einführung

Die zurzeit wichtigsten Aluminiumlegierungen sind in Tabelle 1 zusammengestellt; bei der Vorbereitung eines neuen Normblattes DIN 4113 sind die hervorgehobenen drei Hauptarten, die für eine Verwendung für Baukonstruktionen unter «vorwiegend ruhender Belastung» eingehend diskutiert wurden, von besonderer Bedeutung.¹⁾

¹⁾ Der Verfasser dieses Kurzberichtes ist Vorsitzender des Unterausschusses für den Entwurf der Norm DIN E 4113 (Teil I) im Deutschen Ausschuss für Stahlbau (DAST).

Bild 1. Zeitfestigkeitsverhalten und σ_{zul} -Werte (E DIN 4113) der Aluminiumlegierung Al Zn Mg 1 F36 (nach [1], [2]):

- a) Vollstab
- b) Lochstab
- c) Stumpfnah



$$- \frac{1}{4} \cdot 0,002603 + \frac{1}{8} \cdot 0,000919 + \frac{1}{16} \cdot 0,000768 +$$

$$+ \frac{1}{32} \cdot 0,000373 + \frac{1}{64} \cdot 0,000153 \cong -0,004076$$

In solchen Aufgaben kann also die erforderliche Integrationsstrecke sehr stark verkürzt werden, was bei der zeitaufwendigen numerischen Quadratur von grossem Nutzen ist.

4. Schlusswort

Die beschriebene Transformationsmethode führt bei schlecht konvergierenden, alternierenden Reihen zu einer wesentlichen Konvergenzverbesserung und damit zu einer schnelleren Berechnung ihrer Summenwerte. Es ist lediglich darauf zu achten, dass die verwendeten Anfangsglieder einer solchen Reihe mindestens die Sollgenauigkeit des gewünschten Endergebnisses aufweisen.

Besondere Bedeutung erlangt diese Methode bei der Auswertung von Reihenlösungen, die bei punktförmig belasteten Platten, Scheiben und Schalen (vgl. z. B. [5]) gefunden werden. Dabei sind es vor allem Momente und Querkräfte, die mitunter aus extrem schleppend konvergierenden Reihen bestimmt werden müssen.

Während auch die in den beiden Anwendungsbeispielen erzielte Genauigkeit der statischen Grössen für die Bemessung eines Tragwerks nicht notwendig ist, kann diese wohl erforderlich werden, wenn bestimmte Schnittkräfte und Verformungen erst als Zwischenergebnisse eines weiteren Rechnungsganges benutzt werden. Dies kann zum Beispiel bei der Berechnung von punktgestützten Platten, Durchlaufplatten u. a. der Fall sein.

Literaturverzeichnis

- [1] Bromwich T. J.: An Introduction to the Theory of Infinite Series. 2nd ed. London, 1959, Macmillan & Co., p. 62.
- [2] Knopp K.: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. 5. Aufl., Berlin/Göttingen/Heidelberg/New York 1964, Springer Verlag, S. 253 ff.
- [3] Eisenbiegler G.: Operatorenkalkül zur Berechnung von Stab- und Flächentragwerken, Dissertation Universität Karlsruhe 1969.
- [4] Longman I. M.: Note on a Method for Computing Infinite Integrals of Oscillatory Functions. "Proc. Camb. Phil. Soc.", Vol. 52 (1956), pp. 764-768.
- [5] Krimmer H.: Beitrag zur Berechnung von Kreiszyinderschalen unter der Wirkung von Einzellasten an den Binderrändern. Dissertation TH Darmstadt 1968.

DK 546.621:624.07