

Die Berechnung instationärer Abflüsse in offenen Gerinnen beliebiger Geometrie

Autor(en): **Dracos, Th.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **88 (1970)**

Heft 19

PDF erstellt am: **18.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-84503>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Wie jeder wahre Lehrer wirkt auch Professor Gerold Schnitter im Werk seiner Schüler weiter. Da der allgemein beliebte Dozent, über dessen Rücktritt vom Lehramt wir in H. 13, S. 306 dieses Jahrgangs berichtet haben, den Lesern unserer Bauzeitung mit so grosser Treue gedient hat, wollen ihm seine ehemaligen Mitarbeiter auch auf diesem Gebiete nicht nachstehen. Sie haben sich vorgenommen, dem scheidenden Direktor der VAWE im Laufe dieses Sommers eine Anzahl von Arbeiten zu widmen, von denen die ersten heute erscheinen. Möge Professor Schnitter diese Studien aufnehmen wie sie gemeint sind: als Zeichen der Dankbarkeit und der Verpflichtung, auf dem von ihm eingeschlagenen Weg weiter zu schreiten.

Die Redaktion

Die Berechnung instationärer Abflüsse in offenen Gerinnen beliebiger Geometrie

DK 532.593:627.511

Von Prof. Dr. Th. Dracos, Zürich

Vorwort

Seit ihrer Gründung hat sich die Versuchsanstalt für Wasserbau und Erdbau (VAWE) immer wieder mit den Problemen der instationären Strömungen befasst: es sei hier nur an das grundlegende Werk von Prof. H. Favre erinnert: «Ondes de translation dans les canaux découverts». Von besonderer praktischer Bedeutung für die Schweiz ist in der Nachkriegszeit, mit dem Bau zahlreicher Staumauern in unseren Alpen, das Flutwellenproblem als Folge eines hypothetischen Talsperrenbruchs aufgetreten.

In einer Folge von zwei Aufsätzen sollen hier die Ergebnisse einer mehrjährigen Forschungstätigkeit der VAWE auf dem Gebiete der instationären Abflüsse im wesentlichen dargestellt werden. Dabei sei allen Bundesstellen, die uns grosszügig bei dieser Arbeit unterstützt haben, bestens gedankt.

Der erste Aufsatz behandelt die Theorie der instationären Abflüsse und entwickelt die für eine numerische Behandlung geeigneten Algorithmen. Er gibt ferner an, auf welche Art eine

beliebige natürliche Topographie in der Berechnung berücksichtigt wird. Der zweite Aufsatz besteht aus zwei Teilen. Davon bringt der erste eine Anwendung dieser Theorie auf den besonderen Fall des Flutwellenproblems, wie auch die speziell dazu entwickelten Lösungen. Im zweiten Teil zeigen Ergebnisse der Rechnung, verglichen mit Messungen, den Anwendungsbereich und die Genauigkeit der Methode. Sogar bei der Nachrechnung der Flutwelle von Malpasset stimmen die Ergebnisse genügend gut überein.

Das beschriebene Rechenverfahren findet aber nicht nur Anwendung im Flutwellenproblem, sondern auch bei anderen nichtstationären Abflüssen, wie zum Beispiel Hochwasserwellen, Wehrregulierungen usw. Diese Berechnungen, die alle erst durch die Entwicklung schneller Rechenautomaten möglich wurden, beweisen die eminente praktische Bedeutung der modernen Rechenmittel in der Hydraulik, wie übrigens für alle Gebiete des Bauwesens.

Prof. G. Schnitter

1. Einleitung

Der Abfluss in einem offenen Gerinne bleibt selten über längere Perioden unverändert. Natürliche Ereignisse, menschliche Eingriffe oder aussergewöhnliche Vorgänge, wie man sie in der letzten Zeit bei den Katastrophen von Malpasset und Vajont erlebte, führen zu mehr oder weniger starken zeitlichen Abflussänderungen. Die grosse Bedeutung der instationären Abflüsse wurde schon früh erkannt. Die mathematische Formulierung der Fortpflanzung langer Wellen in offenen Gerinnen erfolgte Ende des vergangenen Jahrhunderts durch B. de Saint-Venant [1] und kurz danach gab J. Massau [2] eine graphische Lösung dieses Problems nach der Methode der Charakteristiken. Eine Anwendung dieser Theorien zur Lösung komplizierter instationärer Vorgänge in Gerinnen mit beliebigen Querschnitten wurde aber erst durch die Entwicklung schneller digitaler Rechenmaschinen möglich. Man hat dabei verschiedene numerische Methoden angewandt. Eine kritische Bewertung dieser Methoden findet man in den Veröffentlichungen von J. Nougare u. a. [3], J. A. Liggett u. a. [4] und A. Daubert u. a. [5]. Im vorliegenden Aufsatz wird die Methode beschrieben, die in der Versuchsanstalt für Wasserbau und Erdbau an der ETH Zürich (VAWE) zur Behandlung instationärer Abflüsse angewandt wurde. Bei der Wahl dieser Methode war ihre Eignung für die Berechnung der Fortpflanzung von Flutwellen sowie von Diskontinuitäten, das heisst Schockwellen, ausschlaggebend.

2. Grundgleichungen

Wie schon einleitend erwähnt, hat de Saint-Venant die unter seinem Namen bekannten Gleichungen aufgestellt. Ihre Ableitung beruht auf der Annahme, dass der Abfluss ein-

dimensional mit parallelen Stromfäden erfolge. Diese Annahme wird erfüllt, wenn die Krümmung der freien Oberfläche klein gegenüber der Abflusstiefe und das Gerinne gestreckt ist. Die Druckverteilung über Querschnitte senkrecht zur Strömungsrichtung ist wegen der angenommenen Parallelität der Stromfäden hydrostatisch. Die unter diesen Bedingungen aufgestellten Gleichungen lauten:

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g (J_e - J_s) + \frac{q}{F} (u - v \cos \beta) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + F \frac{\partial u}{\partial x} - q = 0$$

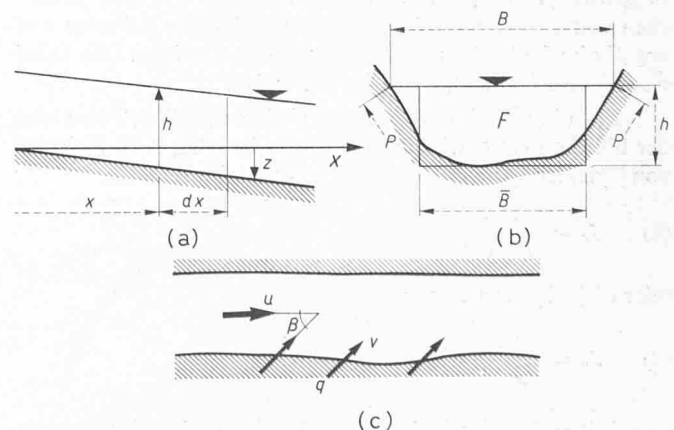


Bild 1. Definition der massgebenden Grössen der Gerinnegeometrie und der Strömungsparameter. a) Längsschnitt, b) Querprofil, c) Aufsicht

Die erste dieser Gleichungen, die Bewegungsgleichung, wird aus dem Impulssatz und die zweite, die Kontinuitätsgleichung, aus dem Satz von der Erhaltung der Masse unter Berücksichtigung der Inkompressibilität des Wassers abgeleitet [6], [7]. Entsprechend den in den Bildern 1 (a), (b) und (c) eingeführten Bezeichnungen bedeuten darin u die mittlere Geschwindigkeit zur Zeit t im Querschnitt an der Stelle x des Gerinnes mit der Definition $u = Q/F$, wobei Q der momentane Durchfluss und F die benetzte Fläche des betrachteten Querschnittes sind, h die Wassertiefe, J_e das Energieliniengefälle, J_s das Sohlengefälle im Talweg des Gerinnes, q einen zeitlich konstant bleibenden, seitlichen Zufluss pro Längeneinheit, v die Geschwindigkeit des zufließenden Wassers und β den Winkel, den die Richtung des zufließenden Wassers mit der Fließrichtung im Gerinne bildet. Es ist dabei zu beachten, dass F eine Funktion von h und x ist, wobei h von x und t abhängt, mathematisch ausgedrückt:

$$(3) \quad F = F(h(x, t), x)$$

In den zwei Gleichungen (1) und (2) kommen die drei abhängigen Variablen u , h und F vor. Eine der zwei Grössen, h oder F , muss deswegen eliminiert werden. Da man im vorliegenden Fall eine eindimensionale Strömung mit der mittleren Geschwindigkeit u betrachtet, darf man

$$(4) \quad F = h \bar{B}$$

setzen, wobei seinerseits

$$(5) \quad \bar{B} = \bar{B}(h(x, t), x)$$

die mittlere Breite des benetzten Querschnittes ist.

Nach Einführen der Beziehung (4) in den Gleichungen (1) und (2) und einigen Umrechnungen bekommt man [8]:

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g (J_e - J_s) + \frac{q}{B h} (u - v \cos \beta) = 0$$

$$(7) \quad h \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u h}{B} \left(\frac{\partial \bar{B}}{\partial x} \right)_{h = \text{konst}} - \frac{q}{B} = 0$$

B ist die Profilbreite am Spiegel. Zu bemerken ist, dass die Ableitung $\partial \bar{B} / \partial x$ für $h = \text{konst}$ durchzuführen ist. Diese Ableitung stellt eine rein geometrische Grösse analog dem Sohlengefälle dar, die die Profiländerung des Gerinnes berücksichtigt. In einem prismatischen Gerinne wird $\partial \bar{B} / \partial x = 0$. Das Vorzeichen von q bzw. von v ist positiv im Fall eines Zuflusses und negativ im Falle eines Ausflusses aus dem Gerinne. Das Glied $v \cos \beta$ verschwindet, wenn $\beta = 90^\circ$ wird.

Für die Berechnung des Energieliniengefälles J_e wird eine der üblichen Geschwindigkeitsformeln benutzt, z. B. diejenige von Strickler

$$(8) \quad J_e = \frac{v |v|}{k^2 R^{4/3}}$$

oder diejenige von Chezy

$$(9) \quad J_e = \frac{v |v|}{C^2 R}$$

wobei $R = F/P$ der hydraulische Radius und P der benetzte Umfang sind. Beide Formeln gelten streng nur für gleichförmige stationäre Strömungen.

3. Transformation der Gleichungen von de Saint-Venant; die Gleichungen der Charakteristiken

Die Gleichungen (6) und (7) bilden ein System quasi linearer, partieller Differentialgleichungen von der Form

$$(10) \quad \begin{aligned} a_1 \frac{\partial U}{\partial t} + b_1 \frac{\partial U}{\partial x} + c_1 \frac{\partial V}{\partial t} + d_1 \frac{\partial V}{\partial x} + e_1 &= 0 \\ a_2 \frac{\partial U}{\partial t} + b_2 \frac{\partial U}{\partial x} + c_2 \frac{\partial V}{\partial t} + d_2 \frac{\partial V}{\partial x} + e_2 &= 0 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten $a_1, b_1, \dots, a_2, b_2, \dots$ können Funktionen der unabhängigen Variablen x, t bzw. der gesuchten Grössen $U(x, t), V(x, t)$ sein.

Es soll nun eine Koordinatentransformation durchgeführt werden, von der verlangt wird, dass die Ableitungen der gesuchten Funktionen nur in Richtung der neuen Koordinaten definiert sein sollen. Man nennt diese speziellen Kurvenscharen, die als neue Koordinaten eingeführt werden, die Charakteristiken. Die Bestimmung der Gleichungen der Charakteristiken und der Form, die die Gleichungen (10) entlang den Charakteristiken annehmen, kann auf verschiedene Arten durchgeführt werden. Hier wird, ohne in die Einzelheiten einzugehen, die Methode nach R. Courant und K. O. Friedrichs [9], [10] angegeben. Man bildet die Koeffizientendeterminanten:

$$(11) \quad \begin{aligned} A &= [a \ c], \quad 2B = [a \ d] + [b \ c], \quad C = [b \ d], \quad D = [a \ b], \\ E &= [b \ c], \quad F = [a \ e], \quad G = [b \ e] \end{aligned}$$

Das Symbol $[p \ q]$ ist die Abkürzung für die Determinante

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = p_1 q_2 - p_2 q_1$$

Es kann gezeigt werden, dass die Tangentenrichtung $m = dx/dt$ der Charakteristiken durch die quadratische Gleichung

$$(12) \quad A m^2 - 2 B m + C = 0$$

gegeben wird, deren Lösung

$$(13) \quad m^\pm = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - A C}}{A}$$

lautet. Wie daraus ersichtlich ist, existieren zwei verschiedene Scharen von Charakteristiken, wenn die Diskriminante $B^2 - A C > 0$ ist. Das Gleichungssystem (10) wird in diesem Fall hyperbolisch genannt. Ist dagegen $B^2 - A C = 0$, so nennt man das Gleichungssystem parabolisch und es existiert eine einzige Charakteristikenschar. Wenn schliesslich $B^2 - A C < 0$ und somit keine reelle Lösung existiert, wird das System elliptisch genannt. Im folgenden werden nur hyperbolische Gleichungssysteme betrachtet.

Entlang den Charakteristiken, deren Gleichungen

$$(14) \quad \gamma^+ : dx - m^+ dt = 0 \quad \gamma^- : dx - m^- dt = 0$$

nun bekannt sind, gelten die Beziehungen

$$(15) \quad \begin{aligned} \Gamma^+ : D dU + (A m^+ - E) dV + (F m^+ - G) dt &= 0 \\ \Gamma^- : D dU + (A m^- - E) dV + (F m^- - G) dt &= 0, \end{aligned}$$

die sich aus der Umformung der Gleichungen (10) ergeben. Man nennt sie die Verträglichkeitsbedingungen entlang den Charakteristiken. Sie stellen zwei Kurvenscharen in der U, V -Ebene, der Hodographenebene, dar.

Die Gleichungen (14) und (15) sind gewöhnliche Differentialgleichungen und bilden ein System, das äquivalent zum System der Gleichungen (10) ist.

Die Anwendung der beschriebenen Methode auf die Gleichungen von de Saint-Venant, in welchen $U = u$ und $V = h$ zu setzen ist und demnach folgende Koeffizienten besitzt:

a_i	b_i	c_i	d_i	e_i
1	u	0	g	$g(J_e - J_s) + \frac{q}{F}(u - v \cos \beta)$
0	$h \frac{\bar{B}}{B}$	1	u	$\frac{u h}{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} - \frac{q}{B}$

ergibt

$$A = 1, \quad 2B = 2u, \quad C = u^2 - g h \frac{\bar{B}}{B}, \quad D = h \frac{\bar{B}}{B},$$

$$E = u, \quad F = \frac{u h}{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} - \frac{q}{B}, \quad G = \frac{u^2 h}{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} -$$

$$- g h \frac{\bar{B}}{B} (J_e - J_s) - \frac{q}{B} (2u - v \cos \beta)$$

und daraus

$$(16) \quad m^\pm = u \pm \sqrt{g h \frac{\bar{B}}{B}}$$

Beachtet man, dass

$$(17) \quad c = \sqrt{g h \frac{\bar{B}}{B}}$$

die Schnelligkeit der Fortpflanzung einer kleinen Störung ist, so lassen sich nach einigen Umformungen die Gleichungen der Charakteristiken wie folgt schreiben:

$$(18) \quad \gamma^+ : dx - (u + c) dt = 0$$

$$\gamma^- : dx - (u - c) dt = 0$$

$$\Gamma^+ : du + \frac{g}{c} dh + [g(J_e - J_s) + \frac{u c}{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} +$$

$$+ \frac{q}{F} (u - v \cos \beta - c)] dt = 0$$

$$(19) \quad \Gamma^- : du - \frac{g}{c} dh + [g(J_e - J_s) - \frac{u c}{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} +$$

$$+ \frac{q}{F} (u - v \cos \beta + c)] dt = 0$$

Dieses Gleichungssystem muss nun unter Berücksichtigung der jeweils geltenden Anfangs- und Randbedingungen gelöst werden. Aus den ersten zwei Gleichungen bekommt man die zwei Scharen der Charakteristiken γ^+ und γ^- in der physikalischen Ebene x, t . Physikalisch geben diese sich schneidenden Kurvenscharen die Fortpflanzung einer Elementarstörung an. Die reziproke Tangentensteigung der Charakteristiken ist gleich der absoluten Fortpflanzungsgeschwindigkeit $u \pm c$ einer solchen Störung.

Aus der schematischen Darstellung in Bild 2 geht hervor, dass der Zustand an einer bestimmten Stelle x des Gerinnes im Zeitpunkt t nur von dem Abschnitt des Anfangszustandes abhängig ist, der durch die zwei Charakteristiken, die durch den Punkt x, t gehen, abgeschnitten wird. Man nennt diesen Abschnitt den Abhängigkeitsbereich von P .

Der Zustand an einer Stelle x des Gerinnes zur Zeit t beeinflusst dagegen die nachfolgenden Zustände, die innerhalb des Winkelraumes liegen, den die zwei Charakteristiken durch den Punkt $P(x, t)$ bilden (Bild 2). Dieser Winkelraum ist der Einflussbereich des Zustandes in $P(x, t)$.

4. Anfangs- und Randbedingungen

Die Anfangsbedingung ist durch den ungestörten Zustand im Gerinne zur Zeit $t = 0$ gegeben. In einem prismatischen Gerinne kann dieser Zustand ein Normalabfluss sein, in all-

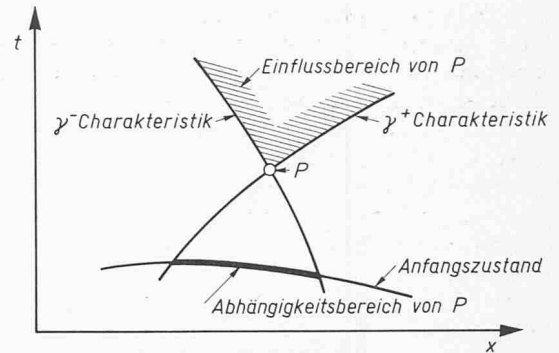


Bild 2. Abhängigkeits- und Einflussbereich eines Punktes des Charakteristikkennetzes

gemeinen wird aber im Gerinne zur Zeit $t = 0$ ein stationärer, ungleichförmiger Abfluss herrschen. Die Differentialgleichung dieses Abflusses kann aus den Gleichungen (6) und (7) nach Streichen der Glieder, in welchen Ableitungen nach der Zeit vorkommen, und Elimination von $\partial u / \partial x$ gewonnen werden und lautet,

$$(20) \quad \frac{dh}{dx} = \frac{1}{1 - u^2/c^2} \left[J_s - J_e + \frac{u^2}{c^2} \frac{h}{B} \frac{\partial \bar{B}}{\partial x} - \frac{q}{c^2 B} (2u - v \cos \beta) \right]$$

Ihre Lösung liefert $h_0(x)$ und $u_0(x)$ an jeder Stelle des Gerinnes. Der Index 0 bedeutet, dass es sich um bekannte Anfangswerte handelt. Tritt nun an einer Stelle des Gerinnes zur Zeit $t = 0$ eine kleine Störung auf, so wird sie sich mit der Geschwindigkeit $u_0 \pm c_0$ fortpflanzen. Durch Wahl des Nullpunktes der x -Achse an der Stelle, an der die Störung erfolgt, lässt sich in der x, t -Ebene die Fortpflanzung dieser Störung mittels der zwei Charakteristiken durch den Ursprung des Koordinatensystems darstellen (Bild 3). Bis zum Zeitpunkt, zu dem diese Störung die Stelle x des Gerinnes erreicht, bleibt der Zustand an der Stelle ungestört und wird demnach durch die Anfangsbedingung gegeben. Unter diesen Umständen kann die Integration der Gleichung (18) wie folgt durchgeführt werden. Aus dem bekannten $h_0(x)$ wird zunächst $c_0(x)$ berechnet und anschliessend

$$(21) \quad t = \int \frac{dx}{u_0(x) \pm c_0(x)}$$

bestimmt. Mit Hilfe der Anfangswerte, die entlang der x -Achse gegeben sind, können die ersten Charakteristiken des gestörten Abflusses berechnet werden. Diese Charakteristiken werden deswegen Anfangscharakteristiken genannt. Sie begrenzen gleichzeitig den Einflussbereich der entlang der x -Achse angegebenen Anfangswerte. In diesem Bereich ist die Strömung ungestört, und er wird deswegen als «Ruhebereich» bezeichnet. Eine Erweiterung des Charakteristikkennetzes über die Anfangscharakteristiken hinaus kann erst durchgeführt werden, wenn entlang einer Kurve, die keine Charakteristik ist, entweder u oder h , bzw. c gegeben wird (Bild 3). Im vorliegenden Fall bedeutet das, dass man ausser der Anfangsbedingung noch eine Randbedingung geben muss. Meistens handelt es sich dabei um eine Angabe über die zeitliche Entwicklung der Störung an der Stelle $x = 0$ in der Form $h(x = 0) = f(t)$ oder $u(x = 0) = f(t)$. In selteneren Fällen wird h oder u entlang einer Kurve $x = f(t)$ angegeben [10]. Die Störung kann auch momentan erfolgen, wie es zum Beispiel bei einem plötzlichen Dammbruch der Fall ist. Die Kurve $x = f(t)$,

Damit ergibt sich folgender Berechnungsvorgang: Aus den Gleichungen (18) erhält man

$$(28) \quad x_3 - x_1 - \frac{1}{2} (v_1 + v_3 + c_1 + c_3) (t_3 - t_1) = 0$$

$$(29) \quad x_3 - x_2 - \frac{1}{2} (v_2 + v_3 - c_2 - c_3) (t_3 - t_2) = 0$$

und daraus

$$(30) \quad t_3 = \frac{2(x_2 - x_1) + (v_1 + v_3 + c_1 + c_3)t_1 - (v_2 + v_3 - c_2 - c_3)t_2}{(v_1 + v_3 + c_1 + c_3) - (v_2 + v_3 - c_2 - c_3)}$$

und

$$(31) \quad x_3 = x_1 + \frac{1}{2} (v_1 + v_3 + c_1 + c_3) (t_3 - t_1)$$

Die Gleichungen (19) werden ihrerseits

$$(32) \quad u_3 - u_1 + \frac{2g}{c_1 + c_3} (h_3 - h_1) + \frac{1}{2} \left[g(J_{e1} + J_{e3} - J_{s1} - J_{s3}) + \frac{u_1 c_1}{B_1} (D\bar{B})_1 + \frac{u_3 c_3}{B_3} (D\bar{B})_3 + \frac{q}{F_1} (u_1 - v \cos \beta - c_1) + \frac{q}{F_3} (u_3 - v \cos \beta - c_3) \right] (t_3 - t_1) = 0$$

$$(33) \quad u_3 - u_2 - \frac{2g}{c_2 + c_3} (h_3 - h_2) + \frac{1}{2} \left[g(J_{e2} + J_{e3} - J_{s2} - J_{s3}) - \frac{u_2 c_2}{B_2} (D\bar{B})_2 - \frac{u_3 c_3}{B_3} (D\bar{B})_3 + \frac{q}{F_2} (u_2 - v \cos \beta + c_2) + \frac{q}{F_3} (u_3 - v \cos \beta + c_3) \right] (t_3 - t_2) = 0$$

und daraus

$$(34) \quad h_3 = \left\{ u_1 - u_2 + 2g \left(\frac{h_1}{c_1 + c_3} + \frac{h_2}{c_2 + c_3} \right) - \frac{1}{2} \left[g(J_{e1} + J_{e3} - J_{s1} - J_{s3}) + \frac{u_1 c_1}{B_1} (D\bar{B})_1 + \frac{u_3 c_3}{B_3} (D\bar{B})_3 + \frac{q}{F_1} (u_1 - v \cos \beta - c_1) + \frac{q}{F_3} (u_3 - v \cos \beta - c_3) \right] (t_3 - t_1) + \frac{1}{2} \left[g(J_{e2} + J_{e3} - J_{s2} - J_{s3}) - \frac{u_2 c_2}{B_2} (D\bar{B})_2 - \frac{u_3 c_3}{B_3} (D\bar{B})_3 + \frac{q}{F_2} (u_2 - v \cos \beta + c_2) + \frac{q}{F_3} (u_3 - v \cos \beta + c_3) \right] (t_3 - t_2) \right\} / 2g \left(\frac{1}{c_1 + c_3} + \frac{1}{c_2 + c_3} \right) \text{ und (s. Gl. 33 rechts oben)}$$

$$(35) \quad u_3 = u_1 - \frac{2g}{c_1 + c_3} (h_3 - h_1) - \frac{1}{2} \left[g(J_{e1} + J_{e3} - J_{s1} - J_{s3}) + \frac{u_1 c_1}{B_1} (D\bar{B})_1 + \frac{u_3 c_3}{B_3} (D\bar{B})_3 + \frac{q}{F_1} (u_1 - v \cos \beta - c_1) + \frac{q}{F_3} (u_3 - v \cos \beta - c_3) \right] (t_3 - t_1)$$

Die Iterationen werden durchgeführt, bis die Werte von u_3 und h_3 von zwei aufeinander folgenden Berechnungen auf die erwünschte Genauigkeit übereinstimmen.

6. Berechnung der Anfangs- und Randwerte

Entlang der Anfangscharakteristik sind $u_0(x)$ und $h_0(x)$, bzw. $c_0(x)$ bekannt. Wählt man eine feste Schrittgrösse Δx , so können x und t aus der Gleichung (21) wie folgt schrittweise berechnet werden

$$(36) \quad x_{i+1} = x_i + \Delta x$$

$$t_{i+1} = t_i + \frac{2\Delta x}{(v_{0i} + v_{0i+1}) \pm (c_{0i} + c_{0i+1})}$$

wobei entweder das Plus- oder das Minuszeichen zu wählen ist, wenn die Anfangscharakteristik der γ^+ -Schar, bzw. der γ^- -Schar angehört.

Die Berechnung von $u_0(x)$ und $h_0(x)$ entlang der Anfangscharakteristik kann nach einer der bekannten Methoden durchgeführt werden. Hier wird eine numerische Integration der Gleichung (20) nach dem Iterationsverfahren angegeben, das auch bei der Bestimmung der Charakteristiken angewandt wurde. Ist der Zustand an der Stelle x_i und der Durchfluss Q_0 bekannt und an der Stelle $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ gesucht, so kann im ersten Approximationsschritt durch Einsetzen der bekannten Grössen in der rechten Seite der Gleichung (20) und Berücksichtigung der Beziehung $Q_{0i}/F_i = u_i$

$$(37) \quad h_{i+1} = h_i + \Delta x \frac{J_{si} - J_{ei} + \frac{u_i^2}{c_i^2} \frac{h_i}{B_i} (D\bar{B})_i - \frac{q}{c_i^2 B_i} (2u_i - v \cos \beta)}{1 - u_i^2/c_i^2}$$

berechnet werden.

Mit dem nun bekannten h_{i+1} wird F_{i+1} berechnet und, da es sich um einen stationären Abfluss einer bekannten Wassermenge Q_0 handelt, auch

$$(38) \quad u_{i+1} = \frac{Q_{0i+1}}{F_{i+1}}, \quad Q_{0i+1} = Q_i + q \Delta x$$

bestimmt. Danach folgt die Iterationsrechnung nach der Formel 37, siehe unten.

Das Abbruchkriterium für die Iteration ist dasselbe wie bei der Berechnung der Charakteristiken.

Dieses Berechnungsverfahren versagt, wenn sich h_i der kritischen Tiefe nähert, weil dann in der ersten Näherung die Tangente dh/dx vertikal und somit h_{i+1} unendlich wird. In diesem Fall muss die Tangentensteigung im Punkt h_i speziell berechnet [11] und in der Rechnung eingesetzt werden.

$$(39) \quad h_{i+1} = h_i + \frac{\Delta x}{2} \left[\frac{J_{si} - J_{ei} + \frac{u_i^2}{c_i^2} \frac{h_i}{B_i} (D\bar{B})_i - \frac{q}{F_i} (2u_i - v \cos \beta)}{1 - u_i^2/c_i^2} + \frac{J_{si+1} - J_{ei+1} + \frac{u_{i+1}^2}{c_{i+1}^2} \frac{h_{i+1}}{B_{i+1}} (D\bar{B})_{i+1} - \frac{q}{F_{i+1}} (2u_{i+1} - v \cos \beta)}{1 - u_{i+1}^2/c_{i+1}^2} \right]$$

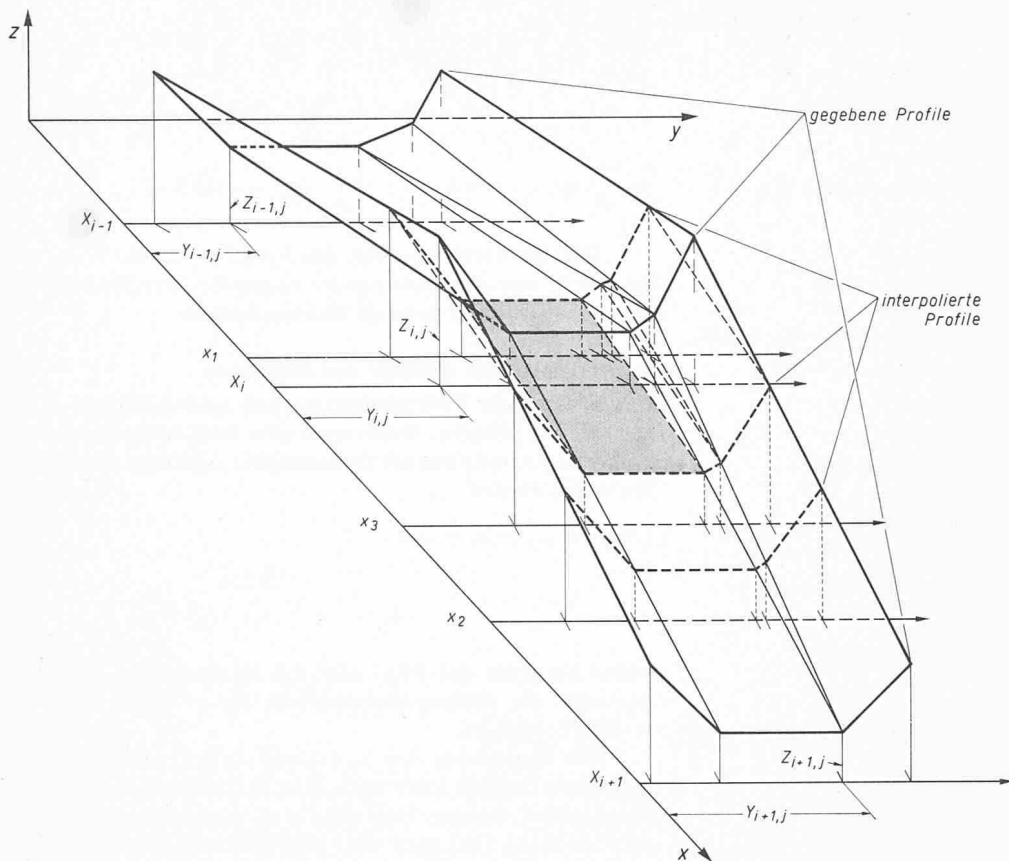


Bild 5. Erfassen der Geometrie eines Gerinnes. Zu beachten ist, dass die interpolierten Profile (vgl. Profil bei x_i) mehr Seiten haben können als die gegebenen Profile und dass das berechnete Sohlengefälle zwischen den interpolierten Profilen (schattierte Fläche zwischen den Profilen bei x_i und x_{i+1}) nicht demjenigen der gegebenen Geometrie entspricht

Wie schon früher erwähnt, ist die Fortsetzung des Bestimmungsbereiches der Charakteristiken über die Anfangscharakteristik hinaus nur durch die Angabe von Randwerten möglich. Diese Werte, das heisst entweder h oder u , werden gegeben entlang einer Kurve $x = f(t)$, z. B. $x = 0$ oder $x = x_E$, wenn es sich um die t -Achse oder einer im Abstand x_E zur ihr parallelen Geraden handelt. Mit Hilfe dieser Angaben und den Gleichungen γ^+ , Γ^+ bzw. γ^- , Γ^- einer der Charakteristikenscharen muss die fehlende Grösse in jedem Punkt der angegebenen Kurve bestimmt werden. Man hat also das Gleichungssystem

$$(38) \quad dx - (u \pm c) dt = 0$$

$$du \pm \frac{g}{c} dh + \left[g(J_e - J_s) \pm \frac{u c}{B} \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{q}{F} (u - v \cos \beta \pm c) \right] dt = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x = f(t) \\ u = f(x, t) \text{ oder } h = f(x, t) \end{array} \right\} \text{ bekannt}$$

In den ersten zwei Gleichungen sind die Vorzeichen entsprechend der in Betracht kommenden Charakteristikenrichtung zu wählen.

Der Schnittpunkt der Charakteristik mit der Kurve $x = f(t)$, das heisst die Auflösung der ersten und dritten der Gleichungen (38) nach x und t , ergibt die Lage des Randpunktes in der x, t -Ebene. Aus der vierten Gleichung wird dann entweder u oder h bestimmt und in der zweiten eingesetzt, die ihrerseits die noch fehlende Grösse ergibt. Auch hier wird in einem ersten Schritt mit den Anfangswerten für u, h, c usw. gerechnet und dann das schon angegebene iterative Verfahren sinngemäss angewandt. Die Gleichungen (38) gelten selbstverständlich auch für die «Reflexionsbedingungen».

7. Berücksichtigung der Gerinnegeometrie

In den verschiedenen Gleichungen, die gelöst werden müssen, kommen neben den Variablen x, t, u, h noch weitere, meist geometrische Grössen vor. Diese müssen jeweils an der Stelle x des Gerinnes berechnet werden, die einem Schnittpunkt im Charakteristiknetz entspricht. In der hier gewählten Berechnungsart der Charakteristiken liegen diese Schnittpunkte jedesmal an einem andern Ort. Deswegen muss die geometrische Form des Gerinnes so angegeben werden, dass daraus sein Querschnitt an jeder beliebigen Stelle mit genügender Genauigkeit berechnet werden kann. In der Tat werden in einem natürlichen Gerinne an bestimmten Stellen X_i : $i = 1, 2, 3, \dots, N$ Querprofile aufgenommen. Die geometrische Angabe dieser Profile erfolgt meistens in der Form von Polygonzügen mit den Stützstellen $Y_{i,j}, Z_{i,j}$, wobei i die Lage X_i des Profils und j der laufende Index $j = 0, 1, 2, \dots, N$ der Stützstellen des Profils angeben (Bild 5). x, y und z bilden ein Achsenkreuz mit vertikaler z -Achse. Die Höhenlage Z der Punkte bezieht sich demnach auf eine horizontale Ebene x, y .

In einer Bild 5 entsprechenden Darstellung der Querprofile kann jede Stützstelle eines Querprofils an der Stelle X_i mit einer oder mehreren Stützstellen des nächstfolgenden Querprofils in X_{i+1} durch Geraden verbunden werden. Es entstehen somit räumliche Flächen mit drei oder vier Seiten. Die Wahl der Verbindungen ist so zu treffen, dass der entstehende Körper der Geometrie des Gerinnes zwischen den zwei Querprofilen möglichst gut entspricht. Ein beliebiges Profil an der Stelle x zwischen den zwei gegebenen Profilen in X_i und X_{i+1} kann als Schnittpolygon des durch die Verbindungslinien gebildeten Körpers mit der vertikalen Ebene an der Stelle x bestimmt werden. Dies erfolgt durch lineare Interpolation der Stützstellen y_1, z_1 der Ecken des neu zu bestimmenden Profils zwischen den bekannten Stützstellen $Y_{i,j}, Z_{i,j}$ und $Y_{i+1,k}, Z_{i+1,k}$ der gegebenen Profile entlang einer Verbindungslinie.

Wenn die Abflusstiefe h an der Stelle x bekannt ist, können nun im interpolierten Profil alle geometrischen Grössen, z. B. F , B , $\bar{B}$, R usw., auf einfache Art berechnet werden. Etwas komplizierter ist dagegen die Berechnung der Änderung dieser Grössen mit x , z. B. die Grösse $(D\bar{B}) = \partial\bar{B}/\partial x$ oder $J_s = dz_s/dx$ oder in Differenzform geschrieben $D\bar{B} = \Delta\bar{B}/\Delta x$ bzw. $J_s = \Delta z_s/\Delta x$. Das für die Berechnung der Charakteristiken angewandte Iterationsverfahren setzt voraus, dass zwischen den Profilen, zwischen welchen iteriert wird, keine Unstetigkeitsstellen vorkommen, das heisst keine plötzliche Änderungen des Gefälles J_s und der Variation der mittleren Breite $D\bar{B}$. Dies bedeutet, dass man für die Berechnung der Änderung geometrischer Grössen das Inkrement entlang der x -Achse gleich der Differenz der x -Werte der in der Berechnung beteiligten Profile wählen muss. Entsprechend dem Schema Bild 4 muss demnach für die Berechnung von J_s bzw. $D\bar{B}$ im Punkt 3 das einmal $\Delta x_{3,1} = x_3 - x_1$ und das andere Mal $\Delta x_{3,2} = x_3 - x_2$ gewählt werden. Die entsprechenden Differenzen $\Delta\bar{B}$ bzw. Δz_s werden mit Hilfe der Profile in x_1 , x_2 und x_3 für $h = h_3$ berechnet. Man bekommt somit

$$(39) \quad D\bar{B} V_3 = \frac{\bar{B}_3(h_3) - \bar{B}_2(h_3)}{x_3 - x_2}$$

$$D\bar{B} R_3 = \frac{\bar{B}_3(h_3) - \bar{B}_1(h_3)}{x_3 - x_1}$$

$$(40) \quad J_s V_3 = \frac{z_{s3} - z_{s2}}{x_3 - x_2} \quad J_s R_3 = \frac{z_{s3} - z_{s1}}{x_3 - x_1}$$

wobei z_{si} die Höhenlage des tiefsten Profilverpunktes angibt.

$D\bar{B} V$ und $D\bar{B} R$ bzw. $J_s V$ und $J_s R$ müssen nicht gleich gross sein. Man stellt also fest, dass die Änderung geometrischer Grössen in Funktion der Lage für ein und dasselbe Profil richtungsabhängig sind. Die geometrische Bedeutung dieser Berechnungsart geht aus Bild 5 hervor. Sie führt zu einem allfälligen Abschneiden der Unstetigkeitsstellen der gegebenen Geometrie. Dies ist zulässig, solange die Schritte Δx gegenüber dem Abstand der gegebenen Profile an den Stellen X_i klein sind.

Eine weitere bedeutende Grösse ist der Reibungskoeffizient k . Um die Berechnung möglichst allgemein zu gestalten, wird angenommen, dass der k -Wert über einzelne Abschnitte des benetzten Umfanges in einem Profil verschiedene Werte hat. Der mittlere k -Wert des Profils wird nach der Formel von H. A. Einstein

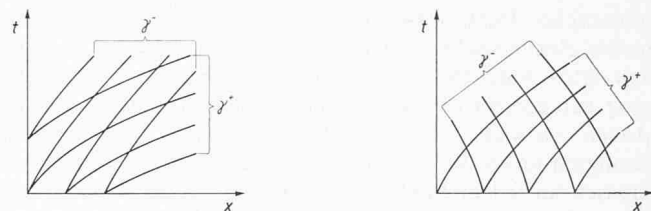
$$(42) \quad k = \left[\frac{\sum_{j=1}^n P_j}{\sum_{j=1}^n P_j/k_j^{3/2}} \right]^2$$

berechnet. Auf diese Art ist es möglich, nicht nur Variationen der Oberflächenbeschaffenheit der Gerinnewände, sondern bis zu einem gewissen Masse auch spezielle Formverluste durch örtliche Verminderung des k -Wertes zu berücksichtigen.

Die Beziehung (42) verlangt, dass jedem Abschnitt P_j des benetzten Umfanges eines an der Stelle x interpolierten Profils ein k -Wert zugeordnet wird. Um dies zu ermöglichen, muss man zu den Seiten der an den Stellen X_i angegebenen Profile die geeigneten k -Werte angeben. Die k -Werte in den interpolierten Profilen werden durch lineare Interpolation ermittelt.

8. Bedeutung und Auswertung eines Charakteristikennetzes

Die reziproke Neigung der Charakteristiken in der x , t -Ebene ist gleich $u \pm c$. Man erkennt daraus sofort, dass, falls $|u| > c$, das Vorzeichen der Neigung beider Charakteristiken-scharen γ^+ und γ^- dasselbe ist (Bild 6a). Abflüsse, bei welchen



a) bei schiessendem Abfluss

b) bei strömendem Abfluss

Bild 6. Schematische Angabe des Verlaufes der γ^+ - und γ^- -Charakteristiken

diese Bedingung erfüllt wird, sind schiessend. Wie zu erwarten, pflanzen sich in einem schiessenden Abfluss kleine Störungen nur in Fließrichtung fort.

In strömenden Abflüssen dagegen ist $|u| < c$, und das Vorzeichen der Neigungen der γ^+ und γ^- ist nicht mehr dasselbe. Die Charakteristiken der zwei Scharen steigen in entgegengesetzten Richtungen an. Das bedeutet, dass sich kleine Störungen in beiden Richtungen fortpflanzen, Bild 6b. Wenn $|u| = c$ ist, so ist die γ^- -Charakteristik vertikal.

Die Hodographenebene $|u|, c$ wird durch die Linie $|u| = c$ in zwei Halbebenen unterteilt. Alle Punkte unterhalb dieser Linie entsprechen schiessenden und alle Punkte oberhalb dieser Linie strömenden Abflüssen. Ein Normalabfluss wird in der Hodographenebene durch einen Punkt dargestellt; ein ungleichförmiger, stationärer Abfluss dagegen durch eine Kurve $c = f(u)$.

Die Berechnung der Charakteristiken kann durchgeführt werden, solange sich Charakteristiken, die derselben Schar angehören, nicht schneiden. Das Schneiden von Charakteristiken, die derselben Schar angehören, bedeutet, dass die an einem Ort später entstandenen Störungen vorangegangene Störungen einholen. Die geometrische Bedingung, die damit verknüpft ist, entspricht einer immer steiler werdenden Wellenfront, die schliesslich am Schnittpunkt der Charakteristiken vertikal wird. Da eine vertikale Wasserfront nicht bestehen kann, wird von da an die Wellenfront brechen. Es entsteht somit ein mit besonderen Energieverlusten verbundener «Schock», das heisst ein sich im Gerinne fortpflanzender Wassersprung. In die Berechnung der Bewegung einer Schockwelle wird hier nicht eingegangen. Kriterien für das Auftreten von Schockwellen wurden in einer früheren Arbeit angegeben [8].

Aus einem Charakteristikennetz können alle erwünschten Auskünfte über eine nichtstationäre Strömung in einem Gerinne gewonnen werden. An den Schnittpunkten der Charakteristiken sind neben x und t noch u und h und damit auch alle anderen Grössen, wie z. B. c , F und Q , bekannt. Schneidet man das Charakteristikennetz mit einer Geraden parallel zur t -Achse im Abstand x vom Ursprung des Koordinatensystems, so darf man an den Schnittpunkten dieser Geraden mit den Charakteristiken die entsprechenden Grössen linear interpolieren. Auf diese Art erhält man die zeitliche Änderung der gesuchten Grössen im Querschnitt an der Stelle x des Gerinnes.

Analog gewinnt man durch einen Schnitt des Charakteristikennetzes mit einer Geraden parallel zur x -Achse im Abstand t vom Ursprung des Koordinatensystems den Zustand im Gerinne zur Zeit t . Insbesondere kann dadurch der Wasserspiegelverlauf zu jedem Zeitpunkt bestimmt werden.

9. Zusammenfassung

Die Berechnung instationärer Strömungen in offenen Gerinnen beruht auf die Gleichungen von de Saint-Venant. Um eine Berechnung auch bei beliebiger Geometrie zu ermöglichen, wurde eine Umformung dieser Gleichungen vorgenommen. Ihre Lösung wurde auf dem Wege der Methode der Charakteristiken gesucht. Diese führt zu einem einfachen,

numerischen Iterationsverfahren, das sich für die Berechnung mittels elektronischer Rechenmaschine gut eignet. Die dazu benötigten Algorithmen wurden angegeben. Für die Berechnung der geometrischen Grössen wurde ein mathematisches Modell entwickelt, das auch komplizierte geometrische Konfigurationen des Gerinnes zu erfassen und die benötigten Grössen an jedem Punkt zu bestimmen gestattet. Aufgrund dieser Angaben wurde in der VAWE ein Computer-Programm in Algol geschrieben und getestet. Die Resultate sind auch bei extremen geometrischen Verhältnissen befriedigend und sollen in einer weiteren Mitteilung der VAWE bekanntgegeben werden.

Die Berechnung der Anfangscharakteristiken läuft auf die Berechnung einer stationären, ungleichförmigen Strömung hinaus (Stau- oder Senkungskurve). Die Differentialgleichung dieser Strömung liess sich aus den Gleichungen der instationären Strömung ableiten. Die numerische Integration dieser Gleichung erfolgte nach einem einfachen Iterationsverfahren, ähnlich demjenigen, das bei der Berechnung der Charakteristiken angewandt wurde. Die Konvergenz dieses Verfahrens ist befriedigend.

Abschliessend soll Prof. G. Schnitter für die Unterstützung, die er diesen Untersuchungen gewährte, an dieser Stelle gedankt werden. Der grösste Teil der Programmierungsarbeit wurde von L. Papp geleistet, dessen Können und Geduld wesentlich zum erfolgreichen Abschluss beigetragen hat. Den Mitarbeitern an der VAWE, A. Chervet und P. Dallèves, dipl. Ing. ETH, danke ich für ihre wertvollen Anregungen und für die kritische Durchsicht des Manuskripts.

Literaturverzeichnis

- [1] B. de Saint-Venant: Théorie du mouvement non permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit. Conte Randue, Acad. de Sciences Tome 73 Juillet 1871, Paris
- [2] J. Massau: Mémoire sur l'intégration graphique des équations aux dérivées partielles. Annales des Ingénieurs sortis des Ecoles de Gand, Vol. 12, 1900
- [3] J. Nougaro, C. Thirriot, H. Barthet: Critique des méthodes numériques de calcul des intumescences et examen d'une nouvelle méthode. «L'Energia Elettrica» 1967, No 2
- [4] J. A. Liggett, D. A. Woolhiser: Difference Solutions of the Shallow-Water Equation. Proc ACSE. Journal of the Eng. Mech. Div. April. 1967, E.M.2
- [5] A. Daubert, P. Marraud, L. Fabre, A. Margnac: Quelques applications de modèles mathématiques à l'étude des écoulements non permanents dans un réseau ramifié de rivières ou de canaux. «La Houille Blanche» 1967, No 7

- [6] J. A. Liggett: General Solution for Open Channel Profiles. Proc. ASCE. Journal of the Hydraulics Div. Nov. 1961, HY6
- [7] J. J. Stoker: Water waves. Interscience Publishers, Inc. New York 1957
- [8] Th. Dracos, B. Glenne: Stability criteria for open flow. Proc. ASCE. Journal of the Hydraulics Div. Nov. 1967, HY6.
- [9] R. Courant, K. O. Friedrichs: Supersonic Flow and Shock Waves. Interscience Publishers, New York 1948
- [10] Th. Dracos: Ebene, nichtstationäre Grundwasserabflüsse mit freier Oberfläche. VAWE-Mitteilung Nr. 57, 1963
- [11] C. Kim, S. Roccas: Hydraulik des Abflusses mit zunehmender Wassermenge. «Wasser- und Energiewirtschaft», 58. J. (1966), Nr. 6

Bezeichnungen

$a_1, b_1, \dots, e_1$	Koeffizienten
$a_2, b_2, \dots, e_2$	
$A, B, \dots, G$	Determinanten, gebildet durch obige Koeffizienten
B	Breite des Gerinneprofils am Spiegel
$\bar{B}$	mittlere Breite des Gerinnprofils
c	Schnelligkeit einer kleinen Störung
c_0	Anfangswert der Schnelligkeit
C	Reibungsbeiwert in der Formel von Chezy
$D\bar{B} = \partial\bar{B}/\partial x$	Änderung der mittleren Breite
F	benetzte Fläche
g	Erdbeschleunigung
h	Abflusstiefe
J_e	Energieliniengefälle
J_s	Sohlengefälle
k	Reibungsbeiwert nach Strickler
$m^\pm$	reziproke Neigung der Charakteristiken = absolute Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Störung
P	benetzter Umfang
P_i	Bezeichnung eines Punktes an der Stelle x_i
q	seitlicher Zufluss
p_i, q_i	Glieder einer zweireihigen Determinante
R	hydraulischer Radius
t	Zeit
u	mittlere Strömungsgeschwindigkeit
u_0	Anfangswert der mittleren Strömungsgeschwindigkeit
v	Geschwindigkeit des seitlichen Zuflusses
U, V	Abhängige Variablen
x, y, z	kartesische Lagekoordinaten
β	Winkel zwischen seitlicher Zuströmung und Fliessrichtung
$\gamma^\pm$	Bezeichnung der Charakteristiken in der physikalischen Ebene
$\Gamma^\pm$	Bezeichnung der Charakteristiken in der Hodographenebene

Calcul de l'onde de submersion consécutive à la rupture d'un barrage

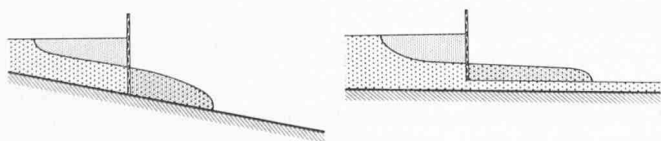
Première partie: la méthode de calcul

DK 532.593:627.511

Par A. Chervet et P. Dallèves, Ingénieurs aux Laboratoires de Recherches Hydrauliques (VAWE), Zurich

1. Introduction

La méthode développée à la VAWE pour le calcul des ondes de submersion consécutives à la rupture d'un ouvrage de retenue est basée sur la méthode générale de calcul des écoulements instationnaires décrite dans l'article de Th. Dracos [1]. Voir références bibliographiques p. 432.



a) Rupture sur fond aval sec b) Rupture sur tirant d'eau initial
Fig. 1. Rupture d'un écran de retenue

Le phénomène des ondes de submersion présentait un double intérêt: – intérêt théorique, car il représente un cas extrême d'écoulement instationnaire, le débit et la hauteur y passant en un temps très court de zéro à une valeur élevée. Il s'agissait donc de contrôler si la théorie des écoulements graduellement variés y était encore valable (voir [2], p. 22). La topographie très accidentée de la plupart des vallées de type alpestre fournissait en outre la possibilité de tester la qualité du modèle mathématique choisi, dans lequel l'écoulement est réduit à un écoulement à une dimension; – intérêt pratique aussi, car même si de telles catastrophes paraissent exclues chez nous en temps de paix, les exemples de Vaiont et de Malpasset prouvent la nécessité d'une étude relative aux ondes de déferlement.