

Betrachtungen zur Theorie der dünnwandigen Stäbe und ihrer Anwendung im Bauwesen

Autor(en): **Kollbrunner, Curt F. / Hajdin, Nikola**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Bauzeitung**

Band (Jahr): **84 (1966)**

Heft 41

PDF erstellt am: **17.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-68995>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Uebergang der Schweizerischen Bauzeitung in das Eigentum der Verlags-AG der akademischen technischen Vereine

Am 27. September d. J. haben wir, die unterzeichneten Vereine, die *Verlags-Aktiengesellschaft der akademischen technischen Vereine* gegründet. Die neue Verlags-AG hat die «Schweizerische Bauzeitung» von der Kollektivgesellschaft W. Jegher und A. Ostertag, deren zwei Partner in die Dienste der AG treten, erworben. Am Aktienkapital von Fr. 200 000.— sind die Vereine in folgender Proportion beteiligt: SIA 65%, GEP 20%, A³E²PL 10%, BSA 2,5% und ASIC 2,5%.

Die Zahl der Verwaltungsräte hat man auf 15 festgesetzt, um die Fachgebiete, Landesgegenden usw. einigermaßen berücksichtigen zu können. Es wurden gewählt: 8 Verwaltungsräte auf Vorschlag des SIA: Otto A. Lardelli, El.-Ing., Baden (Präsident); André Rivoire, Arch., Grand Saconnex GE; Riccardo Gianella, Bau-Ing., Bellinzona-Ravecchia; August F. Métraux, El.-Ing., Basel; Rudolf Schlaginhausen, Bau-Ing., Frauenfeld; Eduard Strebel, Kult.-Ing., Köniz-Liebelfeld BE; Prof. Paul Waltenspihl, Arch. und Bau-Ing., Genf; Gustav Wüstemann, Bau-Ing., Adliswil ZH; 3 Verwaltungsräte auf Vorschlag der GEP: Rudolf Steiger, Masch.-Ing., Winterthur (Vizepräsident); Werner Jegher, Bau-Ing., Zürich; Hans Michel, Arch., Zürich; 2 Verwaltungsräte auf Vorschlag der A³E²PL: Prof. Daniel P. Bonnard, Bau-Ing., St. Sulpice; Victor Raeber, Masch.-Ing., Vevey; 1 Verwaltungsrat auf Vorschlag des BSA: Hans von Meyenburg, Arch., Herrliberg ZH; 1 Verwaltungsrat auf Vorschlag der ASIC: Emil E. Schubiger, Bau-Ing., Zürich. Zur Führung der Geschäfte bestellte der Verwaltungsrat einen Ausschuss, bestehend aus den Kollegen Lardelli (Präsident), Jegher (Delegierter) und Wüstemann (Sekretär).

SIA, Schweizerischer Ingenieur- und Architekten-Verein

GEP, Gesellschaft Ehemaliger Studierender der ETH

A³E²PL, Association Amicale des Anciens Elèves de l'Ecole Polytechnique de l'Université de Lausanne

BSA, Bund Schweizer Architekten

ASIC, Association Suisse des Ingénieurs Conseils (Schweizerischer Verband Beratender Ingenieure)

Wir haben zu dieser Lösung, die unseres Erachtens die beste Gewähr für den Fortbestand unserer Zeitschrift bietet, aus Überzeugung Hand geboten und stellen uns mit unseren Redaktionskollegen Arch. Gaudenz Risch und Ing. Otto Erb sowie dem ganzen Personal freudig in den Dienst der Aktiengesellschaft, während wir als selbständige Herausgeber Abschied nehmen von einem Unternehmen, das während mehr als 83 Jahren in guten und bösen Tagen seine Bewährungsprobe abgelegt hat. Möge es in den Händen der neuen Besitzer seine Aufgabe noch besser erfüllen!

Werner Jegher und Adolf Ostertag

Betrachtungen zur Theorie der dünnwandigen Stäbe und ihrer Anwendung im Bauwesen

Von Curt F. Kollbrunner, Dr. sc. techn., Zollikon/Zürich, und Nikola Hajdin, Dr. sc. techn., Professor an der Universität Beograd

DK 624.072:539.385

1. Einleitung

Dünnwandige Stäbe erwecken bei der sich damit befassenden Fachwelt in letzter Zeit ein zunehmendes Interesse. Dieses bezieht sich sowohl auf deren immer häufigere Anwendung als auch auf die erforderlichen theoretischen und experimentellen Forschungsarbeiten zur vollständigen und klaren Erfassung ihres Verhaltens als konstruktive Elemente.

Zweck dieser Betrachtungen ist es, auf gewisse grundlegende Züge des statischen Verhaltens verschiedener Arten dieser Tragwerke hinzuweisen, wobei wir uns auf die «Theorie erster Ordnung» beschränken wollen. Die Probleme der «Theorie zweiter Ordnung» und der Stabilität schliessen wir hier aus. Obschon man sagen darf, dass das Gebiet der dünnwandigen Stäbe in den letzten vierzig und mehr Jahren sehr erschöpfend behandelt wurde, verbleiben unseres Erachtens noch ungelöste Probleme, deren Abklärung für die zweckmässige Anwendung dieser Tragwerke wichtig ist. Von einigen dieser Probleme soll im folgenden die Rede sein.

Ausserdem möchten wir auch auf gewisse, rein theoretisch zwar bereits gelöste Probleme hinweisen, deren Lösungen jedoch für den praktischen Gebrauch umgearbeitet werden müssten. Der projektierende Ingenieur muss, um Aufgaben aus diesem Gebiet mit einem wirtschaftlich vertretbaren Zeitaufwand zu bewältigen, über verlässliche, eindeutige Kriterien und einfache, dem jeweiligen Zweck angepasste Rechenvorgänge verfügen können.

Klarere Einsicht in das Verhalten dünnwandiger Stäbe unter zusammengesetzter Beanspruchung, besonders bei Torsion, welcher hier eine hervorragende Bedeutung zukommt, gewann man im ersten Dezennium dieses Jahrhunderts. Die Torsion ist, verglichen mit Biegung und Axialkraft, speziell im Falle dünnwandiger Stäbe, ihrer Natur nach ein schwierigeres Problem, und die relativ spät gewonnenen Erkenntnisse über dasselbe sind eine Folge des Entwicklungsweges der Festigkeitslehre. Dieser Weg ist, wie bei allen naturwissenschaftlichen Lehren, ein schrittweises Vordringen vom Einfacheren zum Schwierigeren, vom im einzelnen zum allgemein Gültigen. Vereinfachende Annahmen und Idealisierungen, welche für besondere Fälle gelten, werden oft verallgemeinert und liefern für viele andere Fälle solange brauchbare Lösungen, bis sie für einen oder mehrere versagen. Die

getroffenen Voraussetzungen müssen dann durch neue ersetzt werden, bis schliesslich jene allgemeinste Form der Lösung gefunden ist, welche auch allen möglichen Einzelfällen gerecht wird. Ein solcher Entwicklungsweg verläuft nicht in einer geraden Linie; er ist durch Umwege, Irrwege und Sackgassen gekennzeichnet.

Die von der Elastizitätstheorie für den Fall der reinen Biegung aufgestellten Beziehungen über die Formänderungen und die Verteilung der Normalspannungen in einem Stabquerschnitt wurden in der Festigkeitslehre auch auf den Fall des längs der Stabaxe veränderlichen Biegemomentes erweitert. Die Bernoulli'sche Hypothese liefert für Stäbe mit einfach symmetrischen Querschnitten bei in der Symmetrieebene gelegenen Belastungen bekanntlich eine für die technische Anwendung genügend genaue Grundlage. Demgegenüber ist jedoch eine Erweiterung der für den Bereich der reinen oder St. Venant'schen Torsion geltenden Spannungs- und Formänderungs-Beziehungen auf den Fall des längs der Stabaxe veränderlichen Torsionsmomentes, wie wir heute wissen, bis auf besondere Einzelfälle nicht zulässig.

In diesem Zusammenhang muss auch auf die besonderen Schwierigkeiten hingewiesen werden, welche die aus Biegung und Torsion zusammengesetzte Beanspruchung kennzeichnen. Eine detaillierte Schilderung der Entwicklungsgeschichte der dünnwandigen Stäbe [1], die eng mit den nach und nach gewonnenen Erkenntnissen über die Torsion verbunden ist und schliesslich zu einer Erweiterung der Baustatik und Festigkeitslehre geführt hat, übersteigt den Rahmen dieser Betrachtungen. Im folgenden wird nur der Versuch unternommen, einige für diese Entwicklung wesentliche Momente zu skizzieren.

Ausser den Arbeiten der Pioniere auf diesem Gebiet, wie denjenigen von Bach [2] und Timoshenko [3] müssen die in der Schweiz. Bauzeitung erschienenen Abhandlungen von Maillart [4] und Eggenschwyler [5] hier besonders hervorgehoben werden. Bach hat als erster auf experimentellem Wege das Problem der Zwängungsdrehung oder Wölbkrafttorsion wahrgenommen. Er betrachtete das Verhalten eines Stabes mit [-förmigem Querschnitt unter der Belastung durch in einer normal zur Symmetrieebene des Querschnitts gelegenen Ebene wirkende Kräfte. Dabei konnte er feststellen, dass im Falle, dass die Belastungsebene durch die Schwerlinie des Stabes ging, sich die

Querschnitte auch in ihrer Ebene verdrehen. Ausserdem wichen die in den einzelnen Querschnittspunkten festgestellten Dehnungen von denjenigen ab, wie sie zufolge der Biegungstheorie zu erwarten waren. Leider konnte *Bach* dieses Verhalten des Stabes nicht richtig auslegen, wodurch die grundsätzliche Erfassung dieses Problems beträchtlich verzögert wurde.

Die richtige Auslegung dieser Wahrnehmungen gelang später *Maillart*. Die erste theoretische Arbeit stammt von *Timoshenko* und bezieht sich auf den I-Querschnitt. Bei der Behandlung der Stabilitätsprobleme desselben konnte er eine Lösung für die Wölbkrafttorsion des Stabes mit I-Querschnitt finden.

Bis zu den dreissiger Jahren dieses Jahrhunderts ist die Entwicklung der Problematik dieses Gebietes durch die Bedürfnisse des Bauwesens und besonders durch diejenigen des Stahlbaues bedingt. Die für dünnwandige Stäbe zur Verfügung stehende Berechnungsweise genügt für die damaligen Bauformen und die den Traditionen des Stahlbaues gemässen Konstruktionsarten. Der rasche Aufschwung der Forschung auf dem Gebiete der dünnwandigen Stäbe, sowie das wachsende Interesse für diese Art von Konstruktionen begann sich nach den dreissiger Jahren für den Bereich der Luftfahrt abzuzeichnen. Eine ganze Reihe von Arbeiten, beginnend mit denjenigen von *Wagner* [6] und *Ebner* [7], gefolgt von vielen anderen, haben dazu beigetragen, zahlreiche Probleme abzuklären, sowie neue zu erkennen und damit die breiten Grundlagen für die praktische Spannungsermittlung und das Stabilitätsverhalten dünnwandiger Stäbe zu schaffen.

Man kann feststellen, dass bis vor dem zweiten Weltkrieg und unmittelbar darnach die technische Theorie der dünnwandigen Stäbe mit offenem Querschnitt vollständig aufgebaut wurde, sowie dass alle grundsätzlichen, die Theorie der dünnwandigen Stäbe mit geschlossenem Profil betreffenden Fragen gelöst werden konnten. Sowohl hinsichtlich der Allgemeinheit in den Formulierungen als auch in bezug auf die Weite des erfassten Bereiches kommt den Arbeiten von *Wlassow* [8] eine ganz hervorragende Bedeutung zu.

Der grösste Teil der Arbeiten aus dieser Periode ist den konstruktiven Bedürfnissen des Flugzeugbaues angepasst. Infolge des Umstandes, dass in der Technik viele für einen ihrer Zweige speziell entwickelte Theorien, Verfahren und Methoden, trotz ihrer Anwendbarkeit auch für andere Zweige, leider oft lange nicht für diese ausgewertet werden, fanden die für den Flugzeugbau gewonnenen Erkenntnisse erst viel später eine Anwendung bei den Baukonstruktionen. Ausser diesem Umstande ist es auch der Gestaltung der im Flugzeugbau typischen Konstruktionsformen (deren Merkmale dünnhäutige, mit starken Quer- und Längssteifen ausgerüstete Rumpf- und Flügelkörper sind) zuzuschreiben, dass viele der dort gewonnenen Forschungsergebnisse zum Teil sogar nicht einmal bis heute auf ihre Anwendbarkeit für Baukonstruktionen geprüft und ausgewertet wurden. Diese Feststellungen beziehen sich insbesondere auf dünnwandige Stäbe mit geschlossenem Profil.

Mit der immer stärkeren Anwendung der Schweisstchnik und der damit verbundenen Entwicklung hochwertiger Werkstoffe haben sich im Bauwesen ganz neuartige Tragwerkskonzeptionen besonders seit dem zweiten Weltkrieg durchgesetzt und damit den Anwendungsbereich der Theorie der dünnwandigen Stäbe auf alle Zweige des Stahlbaues erweitert. Desgleichen nehmen dünnwandige Stäbe einen immer grösseren Platz in den Tragwerken aus Stahlbeton, sowie in den Verbund- und vorgespannten Konstruktionen ein.

Gewisse aus Stahlbeton oder aus vorgespanntem Stahlbeton ausgeführte Tragwerke, sowie z. B. prismatische und zylindrische Faltwerke für Dächer, gehören infolge ihrer kennzeichnenden Merkmale und ihres durch die konstruktive Anordnung bedingten statischen Verhaltens (Zahl und Art der Quersteifen, Verhältnis der Querschnittsabmessungen zur Länge des Tragwerkes) sowie hinsichtlich der Spannungsermittlung oft in den Bereich der dünnwandigen Stäbe. Brückenträger, besonders aus vorgespanntem Stahlbeton, zählen ebenfalls zu den dünnwandigen Stäben.

Die dünnwandigen Stäbe bilden einen Übergangsbereich zwischen den klassischen Stäben und den Schalen. Dieser ist rechnerisch relativ einfacher erfassbar als derjenige der Schalen. Er wird bis heute als baustatisches Berechnungsmodell moderner Tragwerke noch viel zu wenig angewendet.

2. Klassifizierung der dünnwandigen Stäbe

Den dünnwandigen Stab als konstruktives Grundelement können wir auf zweierlei Weise definieren:

— Erstens können wir ihn als Stab der klassischen Baustatik mit gerader oder schwach gekrümmter Axe auffassen, welcher jedoch

nicht mehr wie ein Stab mit Vollquerschnitt angesehen werden darf, weil die Wandstärken der Elemente, aus denen der Querschnitt besteht, klein im Verhältnis zu seinen charakteristischen Abmessungen (Breite, Höhe) sind.

— Zweitens können wir ihn als prismatische, zylindrische (bzw. zylindroide) oder schwach gekrümmte Translationsschale, deren charakteristische Querschnittsabmessungen klein im Verhältnis zu ihrer Länge sind, ansehen.

Man kann sich den dünnwandigen Stab sowohl aus dem Stab als auch aus der Schale hervorgegangen denken, so dass man ihn auch als Übergangsform zwischen diesen beiden Grundformen ansehen kann.

Die Einteilung der dünnwandigen Stäbe kann, wie jede Klassifizierung, nach dem Zweck, für welche sie benötigt wird, erfolgen. Für uns sind die Verfahren, nach welchen die einzelnen konstruktiven Grundformen berechnet werden können, von Bedeutung. Wir treffen daher die Einteilung vom Gesichtspunkte der Deformationen des Stabes aus, d. h. von der Art seiner Verformung infolge äusserer Einflüsse, welche die Berechnungsart bestimmen.

Die einfachste Berechnungsart ist diejenige für dünnwandige Stäbe mit offenem Profil, welche entweder in ihren Querschnittsebenen genügend steif oder durch Querspannen derart ausgesteift sind, dass ihre Querschnittskontur als praktisch unverformbar in ihrer Ebene angesehen werden darf. Die Theorie dünnwandiger Stäbe dieser Art beruht auf zwei Voraussetzungen: der Vernachlässigung der Gleitverzerrung in der Mittelfläche und der Unverformbarkeit der Querschnitte in ihren Ebenen. Die Anwendung dieser Theorie auf gerade Stäbe ermöglicht, den hervorgerufenen zusammengesetzten Spannungs- und Deformationszustand in zwei Anteile zu zerlegen, wovon der eine den infolge Biegung und Längskraft und der andere den infolge der Torsion hervorgerufenen Zustand beschreibt. Der die Torsion betreffende Anteil wird gewöhnlich als Wölbkrafttorsion (oder Wölb-torsion) bezeichnet.

Für dünnwandige Stäbe, deren Querschnitte eine geschlossene Kontur ihrer Profilmittellinie aufweisen, ist die Voraussetzung, dass die Gleitverzerrung der Mittelfläche vernachlässigt werden darf, wie bekannt, leider nicht zulässig, wovon im weiteren noch die Rede sein wird. Der Berechnung dieser Stäbe liegt somit, sofern ihre Querschnitte als hinreichend starr angesehen werden können, nur die Voraussetzung der Unverformbarkeit derselben in ihren Ebenen zu Grunde. Daher unterscheiden sich auch die für diese Stäbe erforderlichen Analysen und Berechnungsverfahren bereits wesentlich von den hergebrachten. Zum Unterschied von den dünnwandigen Stäben mit offenem Profil ist es bei denjenigen mit geschlossenem Profil streng genommen auch nicht möglich, den zusammengesetzten Spannungs- und Deformationszustand in den Torsions-, Biegungs- und Längskraft-Anteil zu zerlegen. Eine Trennung des Torsionszustandes von dem übrigen Zustand ist bei diesen Stäben nur in Sonderfällen möglich.

Ausser den beiden vorher genannten Gruppen können wir als dritte konstruktive Gruppe diejenige unterscheiden, welche vom Gesichtspunkt ihrer Berechnungsart aus als zylindrische oder prismatische Stabschale betrachtet werden kann, und welche wir als «langes prismatisches Faltwerk» bezeichnen wollen. Diese Gruppe umfasst diejenigen dünnwandigen Tragwerke, welche in der Querrichtung entweder gar nicht oder ungenügend ausgesteift sind, so dass die Voraussetzung der Unverformbarkeit der Querschnitte in ihren Ebenen nicht als erfüllt angesehen werden kann. Es muss somit für die Berechnung dieser Tragwerke auch diese Voraussetzung (Unverformbarkeit) fallengelassen werden. Bei dieser Konstruktionsform ist gewöhnlich nur die Annahme berechtigt, dass die Dehnungen des Querschnittes in Richtung der Tangente an seine Profilmittellinie vernachlässigt werden können; d. h. es wird nur ein Teil der Voraussetzung über die Unverformbarkeit beibehalten, wodurch die Berechnungsweise dieses Stabes vom Herkömmlichen am meisten abweicht.

3. Dünnwandige Stäbe mit offenem Profil

Das Verhalten des elastischen, dünnwandigen geraden Stabes mit offenem Profil als konstruktives Bauelement kann, wie wir bereits erwähnt haben, heute als für seine Anwendung in der Praxis genügend geklärt angesehen werden. Der Grund des verhältnismässig seltenen Gebrauches der vorliegenden Theorie auf die Berechnung derartiger Stäbe ist wohl darin zu suchen, dass diese im allgemeinen noch nicht zum Wissensschatz des projektierenden Ingenieurs gehört. Um ihm auch dieses Gebiet näher zu bringen, muss es vom Gesichtspunkt der praktischen Anwendung noch bearbeitet, und es müssen die nötigen Unterlagen in Form von Tabellen, numerischen Angaben und anderen Rechenhilfsmitteln geschaffen werden. Nur auf diese Weise wird es

möglich sein, dass die grossen, durch eine verfeinerte Bemessung gewonnenen Vorteile nicht durch die Schwierigkeiten ihrer praktischen Durchführung wieder zunichte gemacht werden.

Die aus dünnwandigen Stäben bestehenden Tragwerkssysteme sind als Teilgebiet der Baustatik leider bis zum jetzigen Zeitpunkt theoretisch noch nicht genügend erforscht worden – abgesehen von einer beschränkten Anzahl von Arbeiten über dünnwandige Durchlaufträger. Alle bisher veröffentlichten Arbeiten beziehen sich auf ebene Tragwerke. Eine eingehendere Behandlung derartiger Systeme vom theoretischen Standpunkt aus, sowie eine Anzahl von Beispielen für einfachere Systeme dieser Art wurden von den Verfassern dieses Aufsatzes veröffentlicht [9]. Die diesen Veröffentlichungen beigegebenen Tabellen enthalten übersichtliche Zusammenstellungen von Formeln und numerischen Werten, welche die praktischen Berechnungen erleichtern und dieselben, soweit als möglich, der üblichen Berechnungsweise statisch unbestimmter, in einer Ebene belasteter Systeme anpassen.

In neuester Zeit erhält auch die Erforschung des Verhaltens dünnwandiger Stäbe mit gekrümmter Axe besonderes Interesse [10]. Der Lösung der damit zusammenhängenden Aufgaben kommt eine grosse praktische Bedeutung zu. Die Problematik dieses Gebietes wird dem projektierenden Ingenieur für die Anwendung in der Praxis jedoch erst dann zugänglich und nützlich sein können, wenn auf Grund der theoretischen Forschungsergebnisse gebrauchts- und leistungsfähige praktische Berechnungsverfahren entwickelt sein werden. Leider ist jedoch die Aufstellung derartiger Verfahren nicht immer möglich. Gewisse Berechnungsverfahren werden daher stets Gegenstand besonderer Studien bleiben, welche nur von denjenigen durchgeführt werden können, die die Fähigkeit dazu besitzen. In solchen Fällen ist es für den Praktiker ausserordentlich wertvoll (besonders wenn es sich um für das ganze Bauwerk weniger wichtige, jedoch komplizierte Konstruktionselemente handelt), zumindest über ein wenn auch grobes Kriterium zu verfügen, welches die qualitative Abschätzung der Beanspruchungen ermöglicht.

Als ein besonderes Problem muss die Berechnung dünnwandiger Stäbe mit längs ihrer geraden oder gekrümmten Axe veränderlichen Querschnitten angesehen werden.

Die Biegung des herkömmlichen, klassischen Stabes mit längs seiner Axe veränderlichen Querschnitten wird grundsätzlich auf die gleiche Weise wie diejenige des Stabes mit konstantem Querschnitt behandelt. Die Erweiterung der Biegetheorie auf Stäbe mit veränderlichem Querschnitt führt lediglich zu einer Vergrösserung des numerischen Rechenaufwandes. Die Erweiterung dieser Theorie für den dünnwandigen Stab konstanten Querschnittes auf Stäbe mit veränderlichen Querschnitten ist jedoch nur für einen begrenzten Bereich gültig. Bei grösseren Änderungen der Querschnitte und besonders dann, wenn diese stufenweise erfolgen, kann eine Erweiterung der Theorie nicht mehr als berechtigt angesehen werden. Erstmals wurde dieses Problem auf dem Gebiete der Flugzeugkonstruktionen usw., hauptsächlich für Stäbe mit geschlossenem Querschnitt, aufgegriffen [11]. Verhältnismässig wenige Arbeiten behandeln dieses Problem auch für Stäbe mit offenem Profil. Für eine gewisse Anzahl derartiger Aufgaben [12], welche Stäbe mit längs ihrer Axe gesetzmässig, d. h. analytisch gegebener Veränderlichkeit der Querschnitte behandeln, liegen geschlossene Lösungen vor. Von den neuesten Arbeiten muss diejenige von *Cywinski* [13] erwähnt werden, welche einen Stab mit einer Symmetrieaxe behandelt. Auf die grosse Bedeutung solcher Untersuchungen braucht nicht besonders hingewiesen zu werden. Es gibt viele Gebiete in der Ingenieurpraxis, bei welchen dieses Problem eine besondere Rolle spielt. So beansprucht zum Beispiel jede unsymmetrische Belastung Brückenträger mit offenem Profil auf Torsion.

Die Analyse des Verhaltens von Konstruktionen im plastischen Bereich, besonders im Stadium des Grenzlastgleichgewichtes, hat heute ihren festen Platz in der Projektierung von Baukonstruktionen und ein weites Anwendungsgebiet gefunden. Hingegen ist auf dem Gebiete der Erforschung des plastischen Verhaltens dünnwandiger, auf Biegung und Torsion beanspruchter Tragwerke noch wenig getan worden. Ein wesentlicher Beitrag zur Erfassung dieses Gebietes ist die Monographie von *Srebrizkaja* [14], in welcher die Grundlagen des Verhaltens von auf Biegung und Torsion beanspruchten Stäben und Stabwerken (Rahmen) gegeben wird. In dieser Arbeit befasst sich die Autorin mit dem Verhalten von Stäben mit I- und [- förmigen Querschnitten, sowie von Rechteckrahmen, welche aus je drei derart profilierten Stäben bestehen. Auf diesem Gebiet gibt es noch eine Anzahl von für die Praxis wichtigen Problemen, welche der Lösung harren.

Im Bauwesen der Nachkriegsjahre haben die Verbundkonstruktionen und die vorgespannten Bauwerke eine besondere Bedeutung erlangt. Diese Tragwerke sind zum grossen Teil als dünnwandige Konstruktionen mit offenem Profil ausgeführt. Das Verhalten dieser Tragwerke wird durch das Kriechen und das Schwinden des Betons wesentlich beeinflusst. Die Theorie der Biegung dieser Tragwerke mit der Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens ist sehr eingehend behandelt worden. Hier sind die theoretischen und experimentellen Probleme von aktuellem Interesse, welche sich mit der Berechtigung der Voraussetzungen befassen, auf welchen die bestehenden technischen Theorien über das Kriechen und Schwinden des Betons aufgebaut sind.

Unter der Zugrundelegung verschiedener anderer rheologischer Modelle zur Beschreibung des Verhaltens von Beton unter den Einflüssen des Kriechens und Schwindens werden in letzter Zeit neue Möglichkeiten gesucht, um Theorien aufzustellen, welche sich den tatsächlichen Vorgängen besser anzupassen versuchen, jedoch noch nicht als abgeschlossen angesehen werden können. Auf Grund solcher Annahmen gefundene Lösungen sind einstweilen jedoch nur von theoretischem Interesse und noch immer weit davon entfernt, eine Grundlage für die Aufstellung technischer, für die praktische Anwendung im Bauwesen geeigneter Theorien zu bilden.

Soviel den Verfassern dieses Aufsatzes bekannt ist, besteht bis heute noch keine Theorie von Verbund- und vorgespannten dünnwandigen Tragwerken mit offenem Profil unter Berücksichtigung der Auswirkungen des Kriechens und Schwindens des Betons. Ausser einigen Arbeiten [15], welche sich mit auf Biegung und Torsion beanspruchten Verbundträgern befassen, jedoch ohne das Kriechen und Schwinden zu berücksichtigen, scheinen bisher keine Aufsätze veröffentlicht worden zu sein, welche dieses Gebiet behandeln. Verbundträger sowie vorgespannte Stahlbetonträger werden meist mit symmetrischen Querschnitten ausgeführt und infolge der ständigen Belastung und der Vorspannung, welche das Kriechen des Betons hervorruft, auf Biegung und Längskraft beansprucht. Für zeitweilig auftretende bzw. bewegliche Belastungen, wie sie z. B. bei Brücken auftreten, wird angenommen, dass diese keinen Einfluss auf das Kriechen und Schwinden haben. Die Folge davon ist, dass dieser Einfluss auch im Falle einer kombinierten Biege- und Torsionsbeanspruchung nicht berücksichtigt wird. Das Bedürfnis nach einer diese Einflüsse berücksichtigenden Theorie dünnwandiger Tragwerke kann heute, selbst bei vorläufig verhältnismässig noch selteneren Anwendungen bereits als aktuell angesehen werden.

Ausser den angeführten noch zu lösenden und für die Praxis interessanten Aufgaben rufen in letzter Zeit auch Probleme wie z. B. dasjenige des Kriechens von hohen Temperaturen ausgesetzten Metallen und andere ein steigendes Interesse hervor. Auf diese Probleme soll hier jedoch nicht eingegangen werden.

4. Dünnwandige Stäbe mit geschlossenem Profil

Die Trennung der Theorie der Stäbe mit geschlossenem von derjenigen der Stäbe mit offenem Profil ist, besonders hinsichtlich Wölbkrafttorsion, durch den Umstand bedingt, dass die Voraussetzung über die Vernachlässigung der Gleitverzerrung der Stabmittelfläche für Stäbe mit geschlossenem Querschnitt nicht zutrifft. Dank dieser Voraussetzung war es möglich, das Problem der Wölbkrafttorsion in dem Masse zu vereinfachen, dass die Theorie des Stabes mit offenem Querschnitt auf eine Form gebracht werden konnte, welche als eine Erweiterung der klassischen Lehren der Festigkeit und der Baustatik angesehen werden kann. Versuche, diese Theorie der offenen Profile mit gewissen Modifikationen auch auf geschlossene Querschnitte zu übertragen, haben jedoch zu keinen befriedigenden Ergebnissen geführt [16]. Die Abweichungen gegenüber genaueren Lösungen, welche von dem tatsächlichen Verhalten solcher Querschnitte besser angepassten Voraussetzungen ausgehen, sind so gross, dass sie vom technischen Gesichtspunkte aus gesehen nicht zulässig sind.

Die Berechnung der durch die Wölbkrafttorsion hervorgerufenen Einflüsse mit Hilfe der von den offenen Querschnitten abgeleiteten Theorie liefert für geschlossene Profile Lösungen, welche nur als grobe Schätzungen dieser Einflüsse zu werten sind. Die Verwölbung der Querschnitte ist bei Stäben mit geschlossenem Profil bedeutend geringer als bei solchen mit offenem Profil. Bei gewissen Formen von Profilmittellinien mit geschlossener Kontur tritt infolge einer Beanspruchung durch reine Torsion überhaupt keine Querschnittsverwölbung auf.

Die in Richtung der Stabaxe infolge der Wölbverhinderung

auf tretenden Normalspannungen sind für die Tragfähigkeit des Stabes von geringerer Bedeutung als im Falle des offenen Querschnittes. Diese Normalspannungen, sowie die ihnen entsprechenden Schubspannungen, klingen ausserdem in der Regel von der Stelle der Einleitung der äusseren, konzentrierten statischen Grösse (äusseres Torsions- bzw. Bimoment) rasch ab. Mit anderen Worten ausgedrückt, haben diese Einflüsse oft nur lokalen Charakter und fallen somit in die Kategorie der *Krafteinleitungsprobleme*. Ihre Bedeutung für die Tragfähigkeit des Gesamtbauwerkes muss daher auch von diesem Gesichtspunkte aus beurteilt werden. Mit Rücksicht auf das Gesagte werden in manchen Fällen diese Einflüsse von sekundärer Bedeutung sein, und eine grobe Abschätzung derselben wird genügen, um einen Einblick in das Verhältnis ihrer Grössenordnung zur Hauptbeanspruchung des Stabes zu gewinnen.

Sehr häufig werden von den projektierenden Ingenieuren die durch die behinderte Verwölbung hervorgerufenen Normalspannungen vernachlässigt und nur die durch die Torsion hervorgerufenen Schubspannungen berechnet, wie im Falle der reinen oder St. Venant'schen Torsion. Bei einer solchen approximativen Berechnung stellt sich (ausser für die Sonderfälle der symmetrischen Querschnitte) die Frage, auf welchen Querschnittspunkt die Querbelastung bezogen werden muss, um die Biegespannungen von den durch die Torsion hervorgerufenen trennen zu können. Die Lage des Schubmittelpunktes als Bezugspunkt hängt von der Verwölbung des Querschnittes ab. Sie wird aus der Form der durch die St. Venant'sche Torsion verwölbten Querschnittsfläche bestimmt.

Die erwähnten Schlussfolgerungen über die Bedeutung der Wölbkrafttorsion für geschlossene Profile haben jedoch nur beschränkte Gültigkeit und lassen sich nicht verallgemeinern. Je nach der Form des Querschnittes, der Art der Belastung und den Randbedingungen können durch die Verhinderung der Querschnittsverwölbung Spannungen hervorgerufen werden, wovon besonders die Normalspannungen auch bei geschlossenen Profilen sehr bedeutend und somit für die Tragfähigkeit des Bauwerkes von Einfluss sein können.

Eine besondere Art von Stäben mit geschlossenem Profil sind die sehr dünnwandigen, jedoch mit kräftigen Längsrippen verstärkten, besonders im Flugzeugbau häufig verwendeten Traglelemente. Die durch die Wölbverhinderung hervorgerufenen Normalspannungen klingen bei diesem Konstruktionstyp bedeutend langsamer ab als bei dem nicht durch Längsrippen verstärkten.

Eine hauptsächlich dieser Klasse von Stäben angepasste Berechnungsmethode ist unter dem Namen «Schubfeldschema» bekannt und stammt von Ebner [17]. Der Grundgedanke dieser im Flugzeugbau fast allgemein üblichen Rechenmethode besteht in der Voraussetzung, dass die Normalspannungen von den Längsrippen und die Schubspannungen von den Wänden des Trägers übernommen werden. Auf die Stahlkonstruktionen des Bauwesens ist diese Methode wegen der Form und Konstruktionsart der Bauelemente jedoch in der Regel leider nicht anwendbar.

Von den Arbeiten Ebner's und seiner Mitarbeiter ausgehend, hat Kubitzki [18] ein Berechnungsverfahren für die sekundären, durch Wölbkrafttorsion hervorgerufenen Spannungen vorgeschlagen. Der Stab wird in durch die Querschotten begrenzte Längszellen geteilt, und die Sekundärspannungen werden mit Hilfe des Kraftgrössenverfahrens berechnet, wobei als statisch unbestimmte Grössen die Gruppen der in den Begrenzungsquerschnitten der einzelnen Längszellen wirkenden Spannungen bzw. Spannkraften eingeführt werden. Nach der Art der Formulierung dieses Verfahrens ist es nur auf Stäbe mit geschlossener Querschnittskontur anwendbar. Auf Grund der getroffenen Voraussetzungen befriedigt die Lösung streng genommen die Verträglichkeitsbedingungen nicht vollständig.

Im Flugzeugbau sind prismatische bzw. konische Stäbe oder, allgemeiner, auch räumliche Tragglieder mit geschlossenem Querschnitt von hervorragender Bedeutung. Die eingehende Erforschung dieses Gebietes ist, wie wir bereits erwähnten, in den letzten Jahren sehr weit vorangeschritten. Im Rahmen dieses Aufsatzes können wir auf die sich damit befassenden, in grösserer Anzahl vorliegenden Arbeiten nicht eingehen.

Für die Anwendung auf aus Metall oder Stahlbeton hergestellten Baukonstruktionen verdienen unserer Ansicht nach die in den Arbeiten von Umanski [19], Benscoter [20] und Heilig [21] dargestellten Verfahren die grösste Beachtung. Diese Verfahren gehen von der Voraussetzung aus, dass das Diagramm der Verschiebungen der Punkte der Profilmitellinie in Richtung der Stabaxe von gleicher Form wie im Falle der St. Venant'schen Torsion ist. Gewisse Unterschiede zwischen

den Verfahren von Umanski und Benscoter einerseits und Heilig andererseits bestehen in der Art der Berücksichtigung des Einflusses der Schubspannungen auf die Verformungen.

In der Anwendung ist das Verfahren von Umanski und Benscoter nur um ein geringes Mass komplizierter als die Berechnung offener Profile. Die Genauigkeit der damit erhaltenen Lösungen übertrifft jedoch bedeutend diejenige, welche durch das grobe, auf der Theorie der offenen Profile aufgebaute Näherungsverfahren erreicht wird. Die Verfasser haben das Verfahren von Umanski und Benscoter in einer etwas unterschiedlichen Formulierung mit gewissen Bemerkungen über die Verteilung der Schubspannungen dargelegt. In dieser Veröffentlichung [16] sind für den Projektanten derartiger Baukonstruktionen auch wichtige Angaben über statische Einflüsse und über Querschnittswerte für die unmittelbare praktische Anwendung beigelegt. Die Grundlage, auf welcher dieses Verfahren beruht, ebenso wie die vorher erwähnten Lösungen, bestehen in der Annahme, dass es im Falle einer beliebigen Belastung sowohl möglich ist als auch berechtigt erscheint, ähnlich wie für Stäbe mit offenem Querschnitt, durch die Reduktion der Schnittkräfte auf den Schubmittelpunkt die Biegungs- von der Torsionsbeanspruchung zu trennen. Durch Anwendung der Theorie von Wlassow [8] kann jedoch gezeigt werden, dass für Stäbe mit geschlossenem Profil diese Annahme nur für Sonderfälle berechtigt ist.

Zur theoretischen Abklärung dieses Problems haben Flüge und Marguerre [22] einen Beitrag geliefert. Für die Lösung von Aufgaben aus der technischen Praxis kann diese Arbeit ebenso wie das von Kármán und Chien [23] gebrachte Lösungsverfahren als wenig geeignet angesehen werden.

Auf dem Gebiete der Anwendung der Theorie der dünnwandigen Stäbe mit geschlossenem Profil sind für die Forschung auch die Probleme der Stäbe mit gekrümmter Stabaxe, sowie diejenigen, welche bei einer Veränderlichkeit des Querschnittes auftreten, interessant. Diese Probleme sind indessen, sofern sie die durch die Wölbkrafttorsion hervorgerufenen Einflüsse betreffen, von geringerer Bedeutung als bei den entsprechenden Stäben mit offenem Profil. Der Grund liegt, wie bereits erwähnt, in dem rascheren Abklingen der Einflüsse infolge der Wölbkrafttorsion, als dies bei den offenen Querschnitten der Fall ist, so dass auch die geometrische Änderung der Stab- oder Querschnittsform weniger wesentlich ist. In gewisser Masse gilt dies auch für Durchlaufträger, Stabwerke und ähnliche Tragwerksysteme.

Die durch die Verhinderung der Verwölbung hervorgerufenen Einflüsse wirken sich nicht bis zu vom Angriff der statischen Grössen entfernten Stellen aus und umfassen nicht das ganze System oder einen Grossteil desselben, sondern lediglich ein begrenztes Teilgebiet. In der Regel kann man sich daher begnügen, diese Einflüsse für den unmittelbar betroffenen Stab oder höchstens für zwei benachbarte Stäbe zu untersuchen, welche aus dem System herausgetrennt betrachtet werden.

Das plastische Verhalten dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Profil ist ebenso wie dasjenige für Stäbe mit offenem Profil, ausser für einige Sonderfälle, noch nicht genügend erforscht. Ebenso liegen keine praktisch anwendbaren Lösungen über die zusammengesetzte Beanspruchung dieser Art von Stäben in vorgespannter und in Verbundbauweise unter Berücksichtigung des Kriechens und Schwindens des Betons vor.

5. Dünnwandige Stäbe mit in ihren Ebenen deformierbaren Querschnitten

Die Forschungsarbeit, welche diejenigen Stäbe betrifft, deren Querschnitte nicht mehr als starr, d. h. als in ihren Ebenen undeformierbar angesehen werden können, hat sich hauptsächlich in zwei Richtungen entwickelt.

Bei der Berechnung der im Flugzeugbau am häufigsten angewendeten Stäbe mit geschlossenem Profil wird von der Teilung des Stabes in durch die Querschotte begrenzte Längszellen ausgegangen. Als statisch unbestimmte Grössen werden die Verbindungskräfte zwischen den einzelnen Zellen eingeführt, wobei gewisse Vereinfachungen hinsichtlich der Spannungsverteilung getroffen werden. Die Verformung der Querschotte wird bei der Lösung der Aufgabe in Abhängigkeit von der Art ihrer Ausbildung berücksichtigt.

Unabhängig davon bestehen, wie wir bereits erwähnten, eine ganze Anzahl von Verfahren, die für die Lösung von lange, prismatische Schalen betreffenden Aufgaben entwickelt wurden, zu deren Kategorie auch die Stäbe mit in ihren Ebenen deformierbaren Querschnitten gezählt werden müssen. Die Anwendung dieser Verfahren ist in der Hauptsache bei der Berechnung von Stahlbetonkonstruktionen üblich.

Die Theorie der langen prismatischen Stäbe, welche für die praktische Anwendung zu befriedigenden Resultaten führt, stammt von Gruber [24]. Die Voraussetzungen, auf welchen diese wie auch eine Anzahl später aufgestellte Theorien beruhen, sind die folgenden:

- a) Vernachlässigung der Gleitverzerrung in der Mittelfläche des Stabes.
- b) Vernachlässigung der Dehnungen in Richtung der Tangente an die Profilmittellinie des Querschnittes.
- c) Vernachlässigung der Biegemomente in der Richtung der Spannweite, sowie der Torsionsmomente in den einzelnen, die Stabwand bildenden Platten.

Bei Stäben mit offenem Querschnitt ist die Voraussetzung b) vollständig gerechtfertigt, ebenso bei Stäben mit geschlossenem Profil ohne oder mit einer relativ geringen Anzahl von Querschotten. Je grösser die Zahl der Queraussteifungen eines Stabes von bestimmter Länge ist, desto mehr nähert sich dessen Verhalten demjenigen eines Stabes mit in seinen Ebenen unverformbaren Querschnitten. In diesem Falle spielt jedoch der Einfluss der Gleitverzerrung der Mittelfläche des Stabes, sofern er ein geschlossenes Profil hat, eine bedeutende Rolle.

Unter Verzicht auf die Voraussetzung b) konnte Wlassow eine allgemeine Theorie dieser Gruppe von Stäben aufstellen. In ihrer Anwendung ist diese Theorie schwieriger als die vorherigen. Diese Theorie hat Lacher [25] zur Entwicklung eines Verfahrens für die praktische Berechnung von Stäben mit Queraussteifungen angewendet. Vom baupraktischen Standpunkt aus gesehen ist hauptsächlich die Frage von grossem Interesse, in welchem Masse die Anzahl, die Anordnung und die Ausführungsart der Querschotte eine Abweichung des Spannungszustandes eines solchen Stabes von dem entsprechenden mit unverformbaren Querschnitten beeinflussen.

In diesem Zusammenhang wäre vom Standpunkte der Projektierung die Kenntnis derjenigen Anordnungs- und Ausführungsart der Querschotte erwünscht, welche es ermöglichen würde, derartige Stäbe, wie die ihnen entsprechenden Stäbe mit in ihren Ebenen unverformbaren Querschnitten auf Grund ihrer einfacheren Theorie und der einfacheren Verfahren zu berechnen. Auf diese Fragen kann indessen auf der Grundlage des für prismatische Schalen üblichen Berechnungsverfahrens einerseits und dem unter Abschnitt 3 beschriebenen Verfahren für die Berechnung von Stäben mit offenem Profil andererseits von keinem wie immer gewählten Gesichtspunkt aus eine Antwort erteilt werden, weil diese Verfahren gar nichts gemeinsam haben und daher unvergleichbar sind.

Vom Standpunkt der Anwendung auf die Berechnung derartiger Stäbe, sofern es sich um solche mit offenem Profil handelt, wäre jedenfalls ein Verfahren vorteilhaft, welches diese Gruppe von Stäben in einer Erweiterung der in Abschnitt 3 beschriebenen Theorie erfassen, oder dieselbe als Sonderfall enthalten würde.

Die in diesem Kapitel besprochenen Stäbe sind schwieriger zu behandeln, und deren Berechnung erfordert einen grösseren Zeitaufwand als diejenige für die vorher beschriebenen Tragwerke. Die neuzeitlichen Rechenhilfsmittel ermöglichen jedoch die Anwendung leistungsfähiger Methoden. Die Ausnützung der durch die modernen Rechengeräte gegebenen Möglichkeiten führt zur Forderung, diese Berechnungsverfahren in Matrizenform aufzustellen. Nur auf diese Weise wird es möglich sein, dass solche, dem tatsächlichen Verhalten dieser Tragwerke angepasste Berechnungsmethoden den ihnen zukommenden Platz in der Projektierung zeitgemässer Baukonstruktionen einnehmen werden.

6. Schlusswort

Auf dem Gebiet der dünnwandigen Stäbe und ihrer Anwendung im Bauwesen ist durch die Schweizer Stahlbau-Vereinigung betreffend Torsion grosse Forschungsarbeit geleistet worden. Hier soll nur an die Grundlagenforschung erinnert werden [26]. Zur Abklärung der noch nicht gelösten Probleme braucht es jedoch noch intensive Forschungsarbeit, damit dem in der Praxis stehenden Ingenieur allgemein verständliche, einfache Formeln zur Verfügung gestellt werden können.

Literaturverzeichnis

- [1] I. Nowinski: Theory of thin-walled Bars. «Applied Mechanics Reviews», Bd. 12, 1959, Nr. 4, S. 219-227.
- [2] C. Bach: Versuche über die tatsächliche Widerstandsfähigkeit von Balken mit [-förmigem Querschnitt. «Z.d.V.d.L.», 1909, S. 170 und 1910, S. 382.
- [3] S. Timoshenko: Einige Stabilitätsprobleme der Elastizitätstheorie. «Zeitschrift für Mathematik und Physik», Bd. 58, 1910, S. 337-385.
- [4] R. Maillart: Zur Frage der Biegung. «Schweiz. Bauzeitung», Bd. 77, 1921, S. 195-197, und Bd. 78, 1921, S. 18.

- [5] A. Eggenschwyler: Über Drehung und Biegung von [-Eisen. «Schweiz Bauzeitung», Bd. 80, 1922, S. 205-207.
- [6] H. Wagner und W. Pretscher: Verdrehung und Knickung von offenen Profilen. «Luftfahrtforschung», Bd. 11, 1934, Heft 6, S. 174 bis 180.
- [7] H. Ebner: Die Beanspruchung dünnwandiger Kastenträger auf Drillung bei behinderter Querschnittswölbung. 349, Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrt, Jahrbuch 1933, S. 72 und «Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschiffahrt», 1933, S. 645-655 und 684-692.
- [8] W. S. Wlassow: Dünnwandige elastische Stäbe. Bd. 1 u. 2. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, 1964/1965.
- [9] C. F. Kollbrunner und N. Hajdin: Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil. Teil I und II. «Mitteilungen der Technischen Kommission der Schweizer Stahlbau-Vereinigung», Hefte 29 und 30. Zürich 1964/1965.
- [10] F. Wansleben: Die Berechnung drehfester gekrümmter Stahlbrücken. «Stahlbau» 21, 1952, Heft 4, S. 53-56, und R. Dabrowski: Zur Berechnung von gekrümmten dünnwandigen Trägern mit offenem Profil. «Stahlbau» 33, 1964, Heft 12, S. 364-372.
- [11] J. H. Argyris und P. C. Dunne: The General Theory of Cylindrical and Conical Tubes under Torsion and Bending Loads. «Journ. Roy. Aer. Soc.», 1947, No. 2, S. 109-269, No. 9, S. 757-783, No. 11, S. 884-930. 1949, No. 5, S. 461-483, No. 6, S. 558-620.
- [12] F. Hamayoshi: On Torsion of I-beam with a Web of Variable Height. «Mem. Faculty Engng.», Hokkaido Univ., No. 11, 1961.
- [13] Z. Cywinski: Torsion des dünnwandigen Stabes mit veränderlichem, einfach symmetrischem offenem Querschnitt. «Der Stahlbau», Heft 10, 1964, S. 301-307.
- [14] A. I. Strelbizkaja: Grenztragfähigkeit von Rahmen aus dünnwandigen Stäben infolge Biegung und Torsion. (Russisch). Akademie Name Unrainssoi SSR, Kiew, 1964.
- [15] Siehe z. B. R. Heilig: Verbundbrücken unter Torsionsbelastung. «Stahlbau» 23, 1954, Heft 2, S. 25-33.
- [16] Siehe z. B. Th. Kármán und N. B. Christensen: Methods of Torsion with Variable Twist. «Journal of the Aeronautical Sciences», Bd. 11, 1944, Heft 2, S. 110-124, und C. F. Kollbrunner und N. Hajdin: Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Profil. «Mitteilungen der Techn. Kommission der Schweizer Stahlbau-Vereinigung», Heft 32, Zürich, Juni 1966.
- [17] Siehe [7].
- [18] H. H. Kubitzki: Biege- und Verdrehungsbeanspruchung unsymmetrischer Kastenträger. «Technische Mitteilungen Krupp», Bd. 17, 1959, Nr. 5, S. 207-229.
- [19] A. A. Umanski: Torsion und Biegung dünnwandiger Luftfahrtkonstruktionen. Olomgiz, 1939, Moskau. (Russisch).
- [20] S. U. Benscoter: A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams. «Journ. of Appl. Mechanics», Bd. 21, 1954, Heft 1, S. 25-34.
- [21] R. Heilig: Beitrag zur Theorie der Kastenträger beliebiger Querschnittsform. «Stahlbau» 1961, Heft 11, S. 333-349.
- [22] W. Flugge und K. Marguerre: Wölbkräfte in dünnwandigen Profilstäben. «Ingenieur-Archiv», XVIII. Band, Heft 1, 1950, S. 23-38.
- [23] Th. v. Kármán und N. Z. Chien: Torsion with variable Twist. «Journal of the Aeronautical Sciences», Bd. 13, 1946, S. 503-510.
- [24] E. Gruber: Berechnung prismatischer Scheibenwerke. Internationale Vereinigung für Brückenbau und Hochbau. Abhandlungen, Bd. 1, S. 225-241, 1932.
- [25] G. Lacher: Zur Berechnung des Einflusses der Querschnittsverformung auf die Spannungsverteilung bei durch elastische und starre Querschotte versteiften Tragwerken mit prismatischem, offenem oder geschlossenem biegesteifem Querschnitt unter Querkraft. «Der Stahlbau» 31, 1962, Nr. 10, S. 299-308, Nr. 11, S. 325-335.
- [26] C. F. Kollbrunner und K. Basler: Torsionskonstanten und Schubspannungen bei St. Venant'scher Torsion. «Mitteilungen der TKSSV», Heft 23, Juli 1962.
C. F. Kollbrunner und N. Hajdin: Die St. Venant'sche Torsion. «Mitteilungen der TKSSV» Heft 26, September 1963.
C. F. Kollbrunner und K. Basler: Torsionsmomente und Stabverdrehung bei St. Venant'scher Torsion. «Mitteilungen der TKSSV», Heft 27, Oktober 1963.
C. F. Kollbrunner und K. Basler: Sektorielle Grössen und Spannungen bei offenen, dünnwandigen Querschnitten. «Mitteilungen der TKSSV», Heft 28, Januar 1964.
C. F. Kollbrunner und N. Hajdin: Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit offenem Profil. Teil I und Teil II. «Mitteilungen der TKSSV», Heft 29, Oktober 1964, Heft 30, März 1965.
C. F. Kollbrunner und K. Basler: Statik der Wölb torsion und der gemischten Torsion. «Mitteilungen der TKSSV», Heft 31, Mai 1965.
C. F. Kollbrunner und N. Hajdin: Wölbkrafttorsion dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Profil. «Mitteilungen der TKSSV», Heft 32, Juni 1966.
C. F. Kollbrunner und K. Basler: Torsion. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1966.

Adressen der Verfasser: Dr. C. F. Kollbrunner, 8702 Zollikon, Witellikerstrasse 50, und Prof. Dr. N. Hajdin, Universität Beograd, Jugoslawien.