Zeitschrift: Schweizerische Bauzeitung
Herausgeber: Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
Band: 123/124 (1944)
Heft: 10

Artikel: Beitrag zu einem elektrischen Fliehkraftregler mit Schwerkrafteinwirkung
Autor: Emden, Karl
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-54006

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

INHALT: Beitrag zu einem elektrischen Fliehkraftregler mit Schwerkrafteinwirkung. — Neubau des Viaduktes von Longeray. — Aus dem Geschäftsbericht für 1943 des Eidg. Post- und Eisenbahn-Departements. — Die Siedlung im Scheibenschachen, Aarau. — Landwirtschaftliche Hofsiedlungen der SVIL für die st. gallische Rheinebene. — Mitteilungen: Verbundwirkung zwischen vorgespanntem und nichtvorgespanntem Beton (Berichtigung). Rettet unsere Gewässer. Ingenieure und Techniker für Rotkreuz-Missionen gesucht. Rückgang der industriellen Baukonjunktur. Die Schaffung eines Eidg. Amtes für Brennstoffwirtschaft. Rhône-Rhin/Rhone-Rhein. Ausstellung «Bau- und Kunstdenkmäler in der Schweiz, ihre Erhaltung und Pflege». Persönliches. — Nekrologe: Georges Cornu-Clemm. Friedr. Brändle. E. Dubochet. — Literatur. — Mitteilungen der Vereine.

Band 124
Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet
Nr. 10

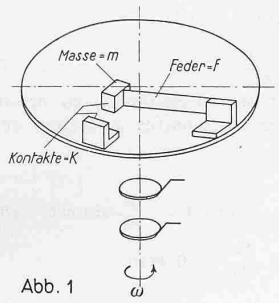

Abb. 1

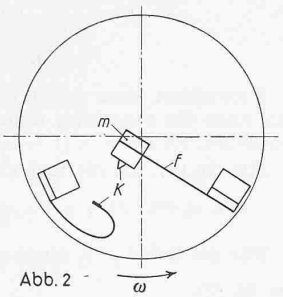

Abb. 2

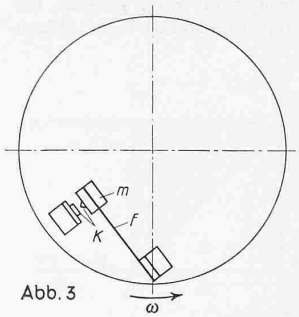

Abb. 3

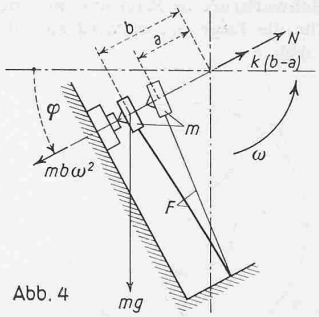

Abb. 4

Beitrag zu einem elektrischen Fliehkraftregler mit Schwerkrafteinwirkung

Von KARL EMDEN, Zürich

Der Regler von H. v. Helmholtz. Der Gedanke, die Drehzahl von Elektromotoren durch Zentrifugalregler mit elektrischer Kontaktgabe möglichst konstant zu halten, stammt zweifellos von H. v. Helmholtz. Er montierte auf der vertikalstehenden Achse eines Elektromotors eine Scheibe, auf der ein fester und ein federnder Kontakt angebracht waren (Abb. 1). Die Stromzuführung zu diesen Kontakten geschah durch Schleifringe. Dieser Regler arbeitete nach folgendem Prinzip: Bei steigender Drehzahl wandert der federnde Kontakt infolge der Zentrifugalkraft immer mehr nach aussen. Bei einer bestimmten kritischen Drehzahl n berühren sich die Kontakte. Hierdurch wird eine Regulierschaltung betätigt, die die Drehzahl des Motors verkleinert. Oeffnen sich nun die Kontakte wieder, so wirkt die Regulierschaltung in umgekehrtem Sinn, die Drehzahl beginnt wieder zu steigen. Hierdurch gelang es, die Drehzahl in engen Grenzen auf dem Wert n konstant zu halten.

Der Regler von Giebe. Das Bedürfnis nach einem besseren Regler wurde gross, als es gelang, Hochfrequenzmaschinen für Sendezwecke zu bauen; schon damals hiess die Parole «Frequenzkonstanz». Die Drehzahl der Hochfrequenzmaschinen musste möglichst konstant gehalten werden. Giebe war der erste, der hiefür einen brauchbaren Regler entwickelte. Sein Regler ist im Prinzip gleich aufgebaut wie jener von Helmholtz; er montierte ihn jedoch auf eine horizontale Achse und führte ausserdem auch den äusseren Kontakt federnd aus (Abb. 2).

Die Arbeitsweise dieses Reglers ist folgende. Bei steigender Drehzahl wandert der innere Kontakt infolge der Zentrifugalkraft immer mehr nach aussen. Ausser der Zentrifugalkraft wirkt aber auch die Schwerkraft auf die Masse m ein und zwar in der unteren Lage der Kontakte radial nach aussen, in der oberen Lage der Kontakte radial nach innen. Ist die Resonanzfrequenz des Kontaktpendels angenähert gleich der sekundlichen Drehzahl des Motors, so führt das Pendel neben seiner Umlaufbewegung noch eine starke radiale Schwingungsbewegung aus. Deshalb berühren sich die Kontakte nur während eines Teiles einer Umdrehung, während sie im übrigen Teil der Umdrehung offen sind. Das Verhältnis von Schliessungszeit zu Oeffnungszeit ist stark abhängig von der Drehzahl und kann deshalb über eine geeignete Schaltung zu ihrer Konstanthaltung benützt werden. In der «Zeitschrift für Instrumentenkunde» 1909, S. 205 hat Giebe ausführliche Unterlagen für seinen Regler veröffentlicht.

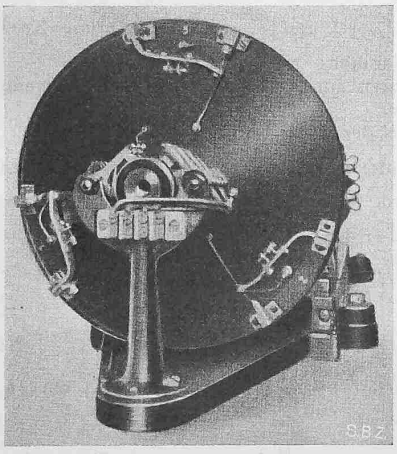

Abb. 3a. Fliehkraftregler von Dornig (nach ETZ 1928, Heft 47, Seite 1713)

Versuche von *W. Dornig* und *H. Schmidt* haben ergeben, dass man auch einen sehr empfindlichen Regler erhält, wenn man den äusseren Kontakt starr ausführt (Abb. 3 und 3a).

Sieht man sich Oszillogramme von solchen Reglern an, so fällt sofort eine gewisse Unregelmässigkeit auf. Die Kontakte können sich während einer Umdrehung mehrmals oder während mehrerer Umdrehungen nur einmal betätigen.

Diese Erscheinungen wurden in der Hauptsache damit erklärt, dass nicht mehr die Schwerkraft von ausschlaggebender Wirkung ist, sondern Vibrationen und Exzentrizitäten (Schlag) der Motorachsen. Ebenso wurde angenommen, dass an dem starren Anschlag Kontaktprellungen auftreten.

Die Konstruktionen dieser Regler variieren stark. Sie wurden, wie Abb. 3a zeigt, auch mit mehreren Kontakten ausgerüstet. Für die Resonanzfrequenz des federnden Kontaktes wird z. B. von W. Dornig in ETZ 1931, S. 1033 als günstiger Wert 3 bis 7 mal die sekundliche Drehzahl angegeben.

Nachstehende Rechnung soll nun zeigen, welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit auch bei dem Regler mit starrem Anschlag Oszillogramme entstehen können, wie sie beim Gieberegler auftreten. Ebenso soll die Rechnung zeigen, welchen Einfluss die verschiedenen Reglerkonstanten auf die Reglereigenschaften haben.

1. Bedingungen für die Oeffnungs- und Schliessungswinkel der Kontakte

Es seien (Abb. 4):

a = Abstand des Masseschwerpunktes vom Drehpunkt, wenn $\omega = 0$, $\varphi = 0$ oder π
b = Abstand des Masseschwerpunktes vom Drehpunkt, wenn Kontakte geschlossen
F = Feder mit Federkonstante k
m = Masse
N = Kontaktdruck
$\varphi = \omega t$ = Momentanwert des Winkels
r = Momentanwert des Abstandes des Masseschwerpunktes vom Drehpunkt
ω = Winkelgeschwindigkeit

ferner seien:

$\omega t_1 = \varphi_1$ = Winkel, unter dem sich die Kontakte öffnen
$\omega t_2 = \varphi_2$ = Winkel, unter dem sich die Kontakte schliessen
$\omega (t_2 - t_1) = \varphi_2 - \varphi_1 = \varphi_{12}$ = Winkel, während dem die Kontakte offen sind

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi \times \text{Eigenfrequenz des federnden Kontaktes}$$

Die Drehzahl sei nun so gross, dass während einer ganzen Umdrehung Kontakt besteht. Wird dann die Drehzahl des Reglers so langsam verkleinert, dass sie während einer Umdrehung als konstant angenommen werden kann, so wird sich der Kontakt erstmals nahe und vor 270° öffnen, denn für diesen Winkel ist die Komponente der Schwerkraft in Richtung auf den Drehpunkt am grössten. Einer kleineren Drehzahl entspricht auch ein kleinerer Winkel φ_1.

Winkel unter $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ dürfen aber nicht in Betracht gezogen werden, denn für Winkel zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ ist die Radialkom-

ponente der Schwerkraft nach aussen gerichtet und im Zunehmen begriffen.

Nach einer weiteren Drehung um den Winkel φ_{12} schliessen sich die Kontakte wieder. Die Geschwindigkeit, mit der der bewegliche auf den festen Kontakt auftrifft, ist äusserst klein. Sie beträgt, wie die Rechnung zeigen wird, z. B. bei 3000 Uml./min im Maximum nur einige cm/s. Deshalb soll angenommen werden, dass Kontaktprellungen nicht auftreten.

Ist aber unter dem Winkel φ_2 die radiale Komponente der Schwerkraft in Richtung auf den Drehpunkt noch grösser als für die Lage φ_1, so wird sich der Kontakt sofort wieder öffnen (Abb. 5).

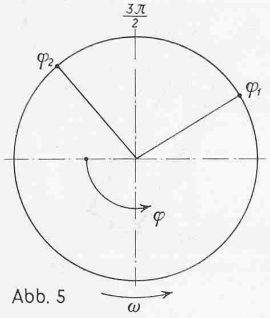

Abb. 5

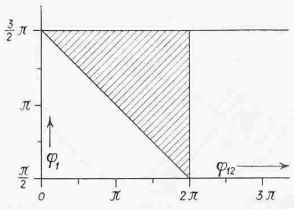

Abb. 6

Nur wenn

$$\frac{3}{2}\pi - \varphi_1 \leqq \varphi_2 - \frac{3}{2}\pi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

ist, wird sich der Kontakt nicht mehr öffnen, bis er bei der nächsten Umdrehung die Lage φ_1 wieder erreicht hat.

Aus Gl. (1) folgt Tabelle I.

Tabelle I

φ_1	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	π	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\pi}{2}$
φ_2	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π	$\frac{9}{4}\pi$	$\frac{5}{2}\pi$
φ_{12}	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

Den grössten Wert erhält die linke Seite der Gl. (1), wenn φ_1 den kleinstmöglichen Wert, nämlich $\frac{\pi}{2}$ annimmt. Dann muss φ_2 mindestens den Wert $\frac{5}{2}\pi$ erhalten. Diesen Werten von φ_1 und φ_2 entspricht ein φ_{12} von 2π. — Grösser als 2π soll der Winkel φ_{12} ebenfalls nicht werden.

Der Bereich, in dem die Bedingungen der Gl. (1), sowie φ_{12} gleich maximal 2π erfüllt sind, ist durch das schraffierte Dreieck der Abb. 6 dargestellt.

2. Gleichungen für die Bahn des beweglichen Kontaktes

Der Winkel φ_{12} ist ausser von ω von verschiedenen Regler-Konstanten abhängig. Diese müssen so bestimmt werden, dass die Bedingungen der Abb. 6 erfüllt sind.

Bei geschlossenen Kontakten ergibt sich aus dem Newtonschen Gesetz für die Radialrichtung (s. Abb. 4):

$$N + k\,(b - a) = m\,g \sin\varphi + m\,b\,\omega^2$$

Bei geöffneten Kontakten gilt ebenso:

$$m\,\frac{d^2r}{dt^2} + k\,(r - a) = m\,g \sin\varphi + m\,r\,\omega^2$$

Diese Gleichungen gehen wegen $k = m\,\omega_0^2$ und $\varphi = \omega\,t$ über in

$$\frac{N}{m} = -\,b\,(\omega_0^2 - \omega^2) + g \sin\omega t + \omega_0^2\,a$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\,r\,(\omega_0^2 - \omega^2) + g \sin\omega t + \omega_0^2\,a \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Aus beiden Gleichungen findet man den Winkel $\varphi_1 = \omega\,t_1$. Bedingung hierfür ist $N = 0$; ebenso $\frac{d^2r}{dt^2} = 0$ und $r = b$.

$$\sin\varphi_1 = \sin\omega t_1 = \frac{b\,(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^2\,a}{g} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Bei der Differential-Gl. (2) muss man drei Fälle unterscheiden, nämlich $\omega_0 > \omega$, $\omega_0 = \omega$ und $\omega_0 < \omega$. Ausführlich wird hier nur der Fall $\omega_0 > \omega$ wiedergegeben, da dieser Fall die gesuchte Lösung enthält.

Die entsprechenden Gleichungen für $\omega_0 = \omega$ und $\omega_0 < \omega$ sind in einem Anhang zusammengestellt.

Die allgemeine Lösung der nicht homogenen Differential-Gl. (2) für $\omega_0 > \omega$ lautet:

$$r = A \sin(c\,t + \alpha) + B \sin\omega t + C \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Aus Gl. (4)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\,c^2 A \sin(c\,t + \alpha) - \omega^2 B \sin\omega t$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\,c^2 r + (c^2 - \omega^2)\,B \sin\omega t - C\,c^2$$

und durch Vergleich mit Gl. (2)

$$c^2 = \omega_0^2 - \omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

$$B = \frac{g}{c^2 - \omega^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

$$C = \frac{\omega_0^2\,a}{c^2} \text{ und wegen Gl. (3)}$$

$$C = b - \frac{g \sin\omega t_1}{c^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

Subtrahiert man in Gl. (4) auf beiden Seiten b, so erhält man links die (absolute) Grösse des Luftspaltes zwischen den Kontakten. Es sei $x = (r - b)$

Mit Gl. (4), Gl. (6) und (7)

$$x = A \sin(c\,t + \alpha) + \frac{g}{c^2 - \omega^2} \sin\omega t - \frac{g}{c^2} \sin\omega t_1 \quad (8)$$

Für die Zeit $t = t_1$ muss x und $\frac{dx}{dt} = 0$ sein.

Aus Gl. (8)

$$A = -\,g\,\frac{\omega^2}{c^2}\,\frac{1}{c^2 - \omega^2}\,\frac{\sin\omega t_1}{\sin(c\,t_1 + \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

ausserdem

$$A = -\,g\,\frac{\omega}{c}\,\frac{1}{c^2 - \omega^2}\,\frac{\cos\omega t_1}{\cos(c\,t_1 + \alpha)} \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

Aus Gl. (9) und (10)

$$tg\,(c\,t_1 + \alpha) = tg\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\omega\,t_1 + \alpha\right] = \frac{\omega}{c}\,tg\,\omega t_1 \quad . \quad (11)$$

Die Gl. (8), (9) und (10) ergeben die vollständige Lösung für die Bewegung des federnden Kontaktes.

$$\frac{x\,\omega^2}{g} = -$$

$$-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 - 1}\,\frac{\sin\omega t_1}{\sin\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\omega\,t + \alpha\right]} \sin\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\omega\,t + \alpha\right] +$$

$$+\,\frac{1}{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 - 1} \sin\omega t - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin\omega t_1 \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Da α nur eine Funktion von $\frac{\omega}{c}$ und $\omega\,t_1$ ist (Gl. (11)), behält die rechte Seite obiger Gleichung für Regler verschiedener Drehzahlen ihre Werte in Funktion von t bei, wenn für jeden Regler das Verhältnis $\frac{\omega}{c}$ und der Winkel $\omega\,t_1$ die gleichen sind. Bei solchen Reglern wird also für den gleichen Winkel $\omega\,t_2$ der Kontaktabstand wieder Null, das heisst: Diese Regler haben den gleichen Winkel $\omega\,(t_2 - t_1) = \varphi_{12}$. Wenn aber für Regler verschiedener Drehzahlen die rechte Seite der Gl. (12) in Funktion von t die gleichen Werte hat, so muss dies auch für die linke Seite gelten, das heisst: Die Grössen der Luftspalte verhalten sich bei solchen Reglern für jeden Winkel $\omega\,t$ umgekehrt proportional wie die Quadrate der Betriebsdrehzahlen.

Daraus folgt für Regler mit gleichen Eigenschaften:

1. Die Resonanzfrequenzen der Kontaktfedern verhalten sich wie die Betriebsdrehzahlen der Regler (Gl. (5)).
2. Die Grössen a und b verhalten sich umgekehrt proportional wie die Quadrate der Betriebsdrehzahlen der Regler (Gl. (3)).

Die Gl. (12) ist für $\frac{\omega}{c} = 1$ und $\frac{\omega}{c} = \infty$ unbestimmt. Zwei Wege führen zum Ziel, nämlich:

1. Man sucht die Lösungen für die Differential-Gl. (2), wenn $c^2 = \omega_0^2 - \omega^2 = \omega^2$ bezw. $c^2 = \omega_0^2 - \omega^2 = 0$;
2. Man bestimmt den Wert der unbestimmten Ausdrücke.

Der zweite Weg soll hier für $\frac{\omega}{c} = 1$, wofür der unbestimmte Ausdruck $-\infty + \infty$ wird, wiedergegeben werden. Durch Ausklammern von $\frac{1}{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 - 1}$ erhält man einen Ausdruck $\frac{0}{0}$.

$$\frac{x\,\omega^2}{g} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 - 1}\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \sin\omega t - \right.$$

$$\left. -\,\sin\omega t_1\,\frac{\sin\left(\frac{c}{\omega}\,\omega t + \alpha\right)}{\sin\left(\frac{c}{\omega}\,\omega t_1 + \alpha\right)}\right] - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin\omega t_1$$

Da auch α eine Funktion von $\frac{\omega}{c}$ ist, muss es in dieser Gleichung eliminiert werden:

$$-\frac{\sin(ct+\alpha)}{\sin(ct_1+\alpha)} = \frac{\sin[c(t_1-t)-(ct_1+\alpha)]}{\sin(ct_1+\alpha)}$$

$$= \frac{\sin[c(t_1-t)]}{tg(ct_1+\alpha)} - \cos[c(t_1-t)] \text{ und wegen Gl. (11)}$$

$$= \frac{c}{\omega}\frac{\cos\omega t_1}{\sin\omega t_1}\sin[c(t_1-t)] - \cos[c(t_1-t)]$$

also

$$\frac{x\omega^2}{g} = \frac{\sin\omega t + \frac{\omega}{c}\cos\omega t_1 \sin\left[\frac{c}{\omega}\omega(t_1-t)\right] - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin\omega t_1 \cos\left[\frac{c}{\omega}\omega(t_1-t)\right]}{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 - 1} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin\omega t_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12')$$

Der Bruch hat für $\frac{\omega}{c}=1$ den Wert $\frac{0}{0}$ und es wird nun die Regel angewendet:

$$\frac{f(x)}{\psi(x)} = \frac{0}{0}_{x=\alpha} = \frac{\frac{d^n f(x)}{dx^n}}{\frac{d^n \psi(x)}{dx^n}_{x=\alpha}}$$

wobei entweder nach ω, c oder $\frac{\omega}{c}$ differenziert werden kann.

Nach $\frac{\omega}{c}$ differenziert und $\frac{\omega}{c}=1$ gesetzt ergibt:

$$\frac{x\omega^2}{g} =$$

$$= \frac{\cos\omega t_1 \sin[\omega(t_1-t)] - \omega(t_1-t)[\cos\omega t_1 \cos[\omega(t_1-t)] + \sin\omega t_1 \sin[\omega(t_1-t)]] - 2\sin\omega t_1 \cos[\omega(t_1-t)]}{-2} - \sin\omega t_1$$

Und nach Umformung:

$$\frac{x\omega^2}{g} = \left(\frac{\omega t_1}{2} + \frac{1}{2}\sin\omega t_1 \cos\omega t_1\right)\cos\omega t - \frac{\omega t}{2}\cos\omega t +$$

$$+ \frac{1}{2}(1+\sin^2\omega t_1)\sin\omega t - \sin\omega t_1 \quad . \quad . \quad . \quad (12a)$$

Diese Gleichung ist die Lösung der Differential-Gl. (2) für den Fall $c^2 = \omega_0^2 - \omega^2 = \omega^2$.

3. Die Gleichungen $\varphi_1 = f(\varphi_{12})$

Aus allen bisherigen Gleichungen ist nichts ersichtlich über die Abhängigkeit des Winkels φ_1 von φ_{12}. Wir wissen nur, dass für den Winkel $\varphi_2 = \omega t_2$ der Kontaktabstand x wieder Null werden muss.

Deshalb ergibt sich aus Gl. (12)

$$\frac{1}{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 - 1}\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \sin\omega t_2 - \sin\omega t_1 \frac{\sin(ct_2+\alpha)}{\sin(ct_1+\alpha)}\right] - \sin\omega t_1 = 0$$

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sin(ct_1+\alpha) - \sin(ct_2+\alpha)}{\sin(ct_1+\alpha)} = \frac{\sin\omega t_1 - \sin\omega t_2}{\sin\omega t_1}$$

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sin[c(t_1-t_2)-(ct_1+\alpha)]}{\sin(ct_1+\alpha)} =$$

$$= 1 + \frac{\sin[\omega(t_1-t_2)-\omega t_1]}{\sin\omega t_1}$$

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{\sin[c(t_1-t_2)]}{tg(ct_1+\alpha)} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cos[c(t_1-t_2)] =$$

$$= 1 + \frac{\sin\omega(t_1-t_2)}{tg\,\omega t_1} - \cos\omega(t_1-t_2)$$

und wegen Gl. (11)

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \frac{\omega}{c}\frac{\sin[c(t_1-t_2)]}{tg\,\omega t_1} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cos[c(t_1-t_2)] =$$

$$= 1 + \frac{\sin[\omega(t_1-t_2)]}{tg\,\omega t_1} - \cos[\omega(t_1-t_2)]$$

und nach Umformung

$$\left.\begin{aligned} tg\,\omega t_1 &= \frac{1}{2}\frac{\frac{\omega}{c}\sin\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\omega(t_2-t_1)\right] - \sin\omega(t_2-t_1)}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin^2\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\frac{\omega(t_2-t_1)}{2}\right] - \sin^2\frac{\omega(t_2-t_1)}{2}} \\ tg\,\varphi_1 &= \frac{1}{2}\frac{\frac{\omega}{c}\sin\frac{c}{\omega}\varphi_{12} - \sin\varphi_{12}}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin^2\left(\frac{c}{\omega}\right)\frac{\varphi_{12}}{2} - \sin^2\frac{\varphi_{12}}{2}} \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Diese Gleichung ist wiederum für $\frac{\omega}{c}=1$ und $\frac{\omega}{c}=\infty$ unbestimmt. Das Verfahren des vorangehenden Abschnittes 2 für den Fall $\frac{\omega}{c}=1$ angewendet, dabei nach $\frac{\omega}{c}$ differenziert, ergibt:

$$tg\,\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{\sin\varphi_{12} - \varphi_{12}\cos\varphi_{12}}{\sin\frac{\varphi_{12}}{2}\left(2\sin\frac{\varphi_{12}}{2} - \varphi_{12}\cos\frac{\varphi_{12}}{2}\right)} \quad . \quad (13a)$$

Diese Gleichung kann auch direkt aus der Gl. (12a) gefunden werden.

In Abb. 7 ist der Winkel φ_1 in Abhängigkeit von φ_{12} für einige Werte von $\frac{\omega}{c}$ aufgetragen. Die Kurven für $\frac{\omega}{c}=\infty$ und $\frac{\omega}{c}$ = imaginär wurden mit Hilfe der Gl. (21) und (25) des Anhanges bestimmt.

Aus Abb. 7 geht hervor, dass einzig die Kurve $\frac{\omega}{c}=1$ den Anforderungen der Abb. 6 vollkommen gerecht wird.

Aus Gl. (5) ergibt sich:

$$c^2 = \omega_0^2 - \omega^2$$

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \sqrt{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 + 1}$$

Tabelle II

$\frac{\omega}{c}$	0,8	0,9	1	1,1	1,2
$\frac{\omega_0}{\omega}$	1,628	1,495	1,414	1,351	1,301

4. Die Grösse des Kontaktabstandes x

In Abb. 8 u. 9 (S. 118) ist der Kontaktabstand x in Abhängigkeit von φ für einige Werte von $\frac{\omega}{c}$ dargestellt. Abb. 8 enthält nur Kurven, die den Winkel $\varphi_{12}=180^0$ einschliessen, Abb. 9 solche für den Winkel $\varphi_{12}=270^0$. Durch Vergleich der Kurvenscharen miteinander geht hervor, dass grössere Winkel φ_{12} bedeutend grössere Kontaktabstände ergeben.

Ebenso sei hervorgehoben, dass bei $\frac{\omega}{c}=1$ verhältnismässig grosse Kontaktabstände entstehen. Diese sind grösser als im Falle $\frac{\omega}{c}=\infty$.

Um eine Vorstellung von der Grössenordnung des Kontaktabstandes zu geben, sei folgendes Beispiel angeführt:

$\frac{\omega}{c}=1$, Drehzahl $n=3000$ U/min, also $\omega=314$, $\varphi_{12}=180^0$.

Der Kurvenschar Abb. 7 entnimmt man: $\frac{x\omega^2}{g}=0{,}4$. Deshalb:

$$x = \frac{0.4 \cdot 9810}{314^2} \backsim 0{,}04 \text{ mm}$$

Es gibt für jeden Winkel φ_{12} ein Verhältnis $\frac{\omega}{c}$, bei dem x am grössten wird. Diesen optimalen Wert $\frac{\omega}{c}$ durch eine allgemeine Lösung zu finden, erscheint schwierig, denn es bestehen neben dem Hauptmaximum noch unendlich viele Nebenmaxima.

Interessehalber sollen nur die Kurven untersucht werden, die die Winkel φ_1 und φ_{12} gleich 180° haben.

Die Gl. (12') ergibt für $\sin\omega t_1 = 0$, $\cos\omega t_1 = -1$

$$\frac{x\omega^2}{g} = \frac{1}{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 - 1}\left[\sin\omega t + \frac{\omega}{c}\sin\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\omega(t_1-t)\right]\right]$$

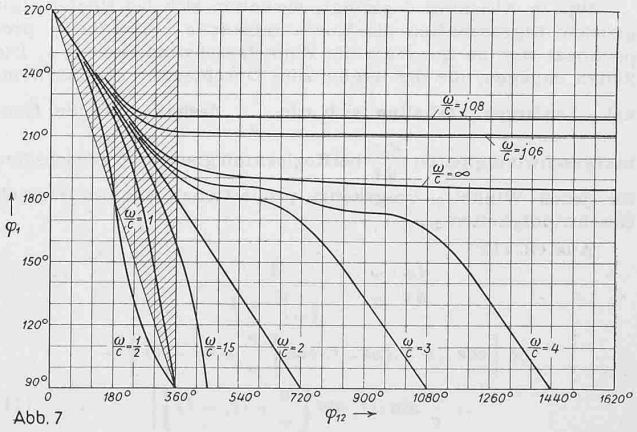

Abb. 7

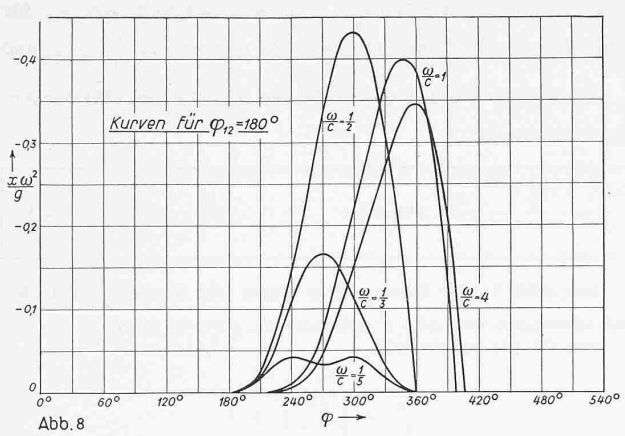

Abb. 8

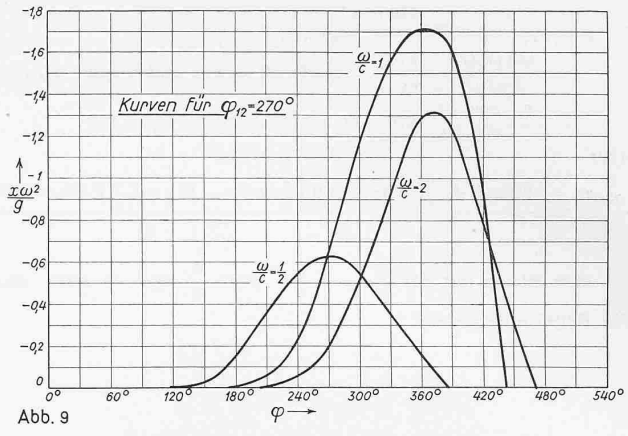

Abb. 9

Da x für ωt_2 und $\omega (t_2 - t_1) = 180^0$ wieder Null werden soll, kann $\frac{c}{\omega}$ nur eine ganze Zahl sein. Der Wert 1 darf nicht weiter benützt werden, da schon die Gl. (12′) für diesen Wert unbestimmt ist. Es kommen deshalb nur Verhältnisse $\frac{\omega}{c} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ ... in Betracht.

Obige Gleichung wird nach der Zeit differenziert und Null gesetzt, wobei mit $\omega \overline{t}$ der Winkel bezeichnet wird, unter dem $\frac{dx}{dt} = 0$ wird.

$$\cos \omega \overline{t} = -\cos\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\omega (t_1 - \overline{t})\right] = -\cos\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\omega (\overline{t} - t_1)\right]$$

$$\omega \overline{t} = l\pi - \frac{c}{\omega}(\omega t_1 - \omega \overline{t}) \quad \text{oder} \quad l\pi - \frac{c}{\omega}(\omega \overline{t} - \omega t_1)$$

$$l = 1, 3, 5, 7, \ldots$$

$$\omega \overline{t} = \frac{\pi\left(l \pm \frac{c}{\omega}\right)}{1 \pm \frac{c}{\omega}}$$

In dieser Gleichung haben nur solche Winkel einen Sinn, die zwischen 180° und 360° liegen.

Für $\frac{\omega}{c} = \frac{1}{5}$ erhält man die Winkel der Tabelle III.

Tabelle III

l	1		3		5		7		9	
$\omega\overline{t}$	180°	180°	240°	90°	300°	0°	360°	-90°	420°	-180°

Daraus geht hervor, dass die Kurve $\frac{\omega}{c} = \frac{1}{5}$ Maxima bei 240° und 300° hat, während 180°, 270° und 360° Minimumstellen sind.

Analog erhält man für $\frac{\omega}{c} = \frac{1}{2}$ ein Maximum bei 300°

und für $\frac{\omega}{c} = \frac{1}{3}$ ein Maximum bei 270°

(siehe Abb. 8).

5. Die radiale Geschwindigkeit des beweglichen Kontaktes

Wie in Abschnitt 2 gezeigt, verhalten sich bei Reglern mit gleichen Eigenschaften die Kontaktabstände x umgekehrt proportional wie die Quadrate der Winkelgeschwindigkeiten ω. Die Zeiten dagegen, die die Regler zum Durchlaufen gleicher Winkel φ benötigen, verhalten sich wie $\frac{1}{\omega}$; deshalb sind die Kontaktgeschwindigkeiten $\frac{dx}{dt}$ bei Reglern mit gleichen Eigenschaften für jeden Winkel φ umgekehrt proportional wie die Winkel-Geschwindigkeiten ω.

Aus Gl. (12′)

$$\frac{dx}{dt}\frac{\omega}{g} = \frac{1}{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 - 1} \times$$

$$\times \left[\cos \omega t - \cos \omega t_1 \cos\left[\frac{c}{\omega}\omega (t_1 - t)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega}{c} \sin \omega t_1 \sin\left[\frac{c}{\omega}\omega (t_1 - t)\right]\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

und aus Gl. (12a) für $\frac{\omega}{c} = 1$

$$\frac{dx}{dt}\frac{\omega}{g} = -\left(\frac{\omega t_1}{2} + \frac{1}{2}\sin \omega t_1 \cos \omega t_1\right)\sin \omega t + \frac{\omega t \sin \omega t}{2} + \frac{\sin^2 \omega t_1}{2}\cos \omega t \quad . \quad . \quad . \quad (14a)$$

Z. B.: $\frac{\omega}{c} = 1$, $\varphi_{12} = 270^0$, $n = 3000$/min, also $\omega = 314$

Einer in grossem Masstab aufgetragenen Abb. 7 entnimmt man $\varphi_1 = 171^0 30'$, $\varphi_2 = 270^0 + 171^0 30' = 441^0 30'$

Im Moment der Kontaktgabe ist die radiale Geschwindigkeit des beweglichen Kontaktes

$$\frac{dx}{dt} = 77{,}5 \text{ mm/s}$$

6. Einfluss der Aenderung der Drehzahl

Aendert sich die Drehzahl von einem konstanten Wert in beliebiger Zeit auf einen neuen Wert, so ändert sich wegen Gl. (5) das Verhältnis $\frac{\omega}{c}$ und wegen Gl. (3) der Winkel φ_1.

Einfluss der Aenderung von $\frac{\omega}{c}$:

Aus Gl. (5): $\frac{\omega}{c} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}}$

$$d\left(\frac{\omega}{c}\right) = \frac{\omega}{c}\left[1 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right]\frac{d\omega}{\omega}$$

Hat man $\frac{\omega}{c} = 1$ gewählt, so ändert sich dieses Verhältnis bei einer Drehzahländerung von 1 ‰ $\left(\frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{1000}\right)$ um 2 ‰. Für eine so kleine Aenderung von $\frac{\omega}{c}$ lässt sich aus der Abb. 7 keine Aenderung des Winkels φ_{12} ablesen. Der Einfluss der Aenderung von $\frac{\omega}{c}$ ist also praktisch zu vernachlässigen.

Einfluss der Aenderung der Drehzahl auf die Winkel φ_1 und φ_{12}. Aus Gl. (3) ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} d\varphi_1 &= -b\omega^2 \frac{2}{g\cos\varphi_1}\frac{d\omega}{\omega} \\ d\varphi_1{}^0 &= -\frac{180}{\pi}\frac{2b\omega^2}{g\cos\varphi_1}\frac{d\omega}{\omega} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Z. B. Für $\frac{\omega}{c} = 1$ und $\varphi_{12} = 225^0$ entnimmt man Abb. 7 $\varphi_1 = 198^0$

Bei 1 ‰ Drehzahländerung wird mit Gl. 15

$$d\varphi_1{}^0 = 1{,}2\,b$$

Wählt man $b = 30$ mm, so wird

$$d\varphi_1{}^0 = 36^0$$

Hat die Drehzahl um 1 ‰ zugenommen, so wird der neue Winkel $\varphi_1 = 198^0 + 36^0 = 234^0$. Diesem Winkel φ_1 entspricht ein Winkel $\varphi_{12} = 130^0$. Bei Zunahme der Drehzahl um 1 ‰ hat sich bei vorliegendem Regler der Winkel φ_{12} um 95° verkleinert. Das Produkt $b\omega^2$ der Gl. (15) bestätigt die Richtigkeit des Satzes (2).

Da praktisch nur der Winkel φ_1 für die Grösse des Winkels φ_{12} bestimmend ist, lassen sich die Bedingungen der Gl. (1) auch auf Regler übertragen, bei denen die Drehzahl während einer Umdrehung beträchtlich schwankt.

7. Einfluss einer Magnetspule

Auf das Masseklötzchen wirke noch eine weitere Kraft, die von einem Magneten herrühren soll (Abb. 10).

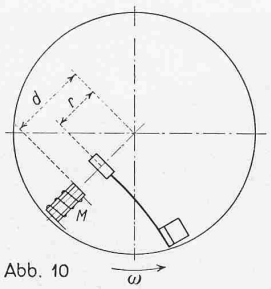

Abb. 10

Die magnetische Kraft ist bekanntlich umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes der magnetischen Belegungen. Die Kraft P ist somit:

$$P = \frac{\text{Konstante}}{(d-r)^2} = \frac{M}{(d-r)^2}$$

$$P = \frac{M}{[(d-b)+(b-r)]^2}$$

wobei b wie in Abb. 4 den Abstand des beweglichen Kontaktes vom Drehpunkt bei geschlossenen Kontakten bedeutet.

Obige Gleichung wird nach der Reihe von Mac Laurin entwickelt.

$$f(b-r) = f(0) + \frac{(b-r)}{1!} f'(0) + \frac{(b-r)^2}{2!} f''(0) +$$

$$P = M\left[\frac{1}{(d-b)^2} - \frac{2(b-r)}{1!\,(d-b)^3} + \frac{6(b-r)^2}{2!\,(d-b)^4} - + -\right]$$

In der Praxis ist stets $d-b$ gross gegenüber $b-r$. Deshalb kann man höhere Potenzen von $d-b$ vernachlässigen und erhält:

$$P = M\left[\frac{d-3b}{(d-b)^3} + \frac{2r}{(d-b)^3}\right]$$

Um dieses Glied muss die Gleichung für den Kontaktdruck und die Differential-Gl. (2) erweitert werden, sodass diese Gleichungen übergehen in:

$$\frac{N}{m} = -b\left[\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2M}{m}\frac{1}{(d-b)^3}\right] + g\sin\omega t + \omega_0^2 a + \frac{M}{m}\frac{d-3b}{(d-b)^3}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -r\left[\omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2M}{m}\frac{1}{(d-b)^3}\right] + g\sin\omega t + \omega_0^2 a + \frac{M}{m}\frac{d-3b}{(d-b)^3}$$

Aus beiden Gleichungen findet man

$$\sin\omega t_1 = \sin\varphi_1 = \frac{b(\omega_0^2 - \omega^2) - \omega_0^2 a - \frac{M}{m}\frac{1}{(d-b)^2}}{g} \qquad (16)$$

An Stelle von Gl. (5) tritt folgende Gleichung:

$$c^2 = \omega_0^2 - \omega^2 - \frac{2M}{m}\frac{1}{(d-b)^3} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (17)$$

Der Magnet bewirkt also neben einer Aenderung von φ_1 wegen der Aenderung von c eine solche von $\frac{\omega}{c}$.

Ein beliebiges Zahlenbeispiel würde zeigen, dass besonders bei grossen Drehzahlen der Einfluss des Magneten auf das Verhältnis $\frac{\omega}{c}$ sehr klein ist. Deshalb wirkt der Magnet besonders bei grossen Drehzahlen nur durch seinen Einfluss auf den Winkel φ_1 auf die Reglereigenschaften.

8. Der Regler mit Ruhekontakt

Die Konstruktion des Reglers kann so abgeändert werden, dass sich unterhalb der kritischen Drehzahl die Kontakte immer berühren.

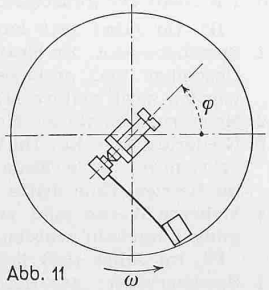

Abb. 11

Der Massepunkt hat ohne Federvorspannung wieder den Abstand a vom Drehpunkt. Durch den starren Kontakt, der diesmal innerhalb der Feder angebracht ist, wird diese bis zur Amplitude b vorgespannt (Abb. 11).

Für diesen Regler gelten die selben Gleichungen wie für den Regler mit Arbeitskontakt. Der Winkel φ muss jedoch von der rechten Seite her nach oben gemessen werden.

9. Anhang

Für den Fall $c^2 = \omega_0^2 - \omega^2 = 0$ lässt sich die Differential-Gl. (2) leicht integrieren. Aus Gl. (2) ergibt sich:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = +g\sin\omega t + \omega_0^2 a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (18)$$

$$r = -\frac{g}{\omega^2}\sin\omega t + \frac{\omega_0^2 a}{2}t^2 + C_1 t + C_2 \quad . \quad . \qquad (19)$$

Bestimmt man die Integrationskonstanten C_1 und C_2 und setzt wieder $r - b = x$, so erhält man:

$$\frac{x\omega^2}{g} = -\sin\omega t - \frac{\omega^2 t^2}{2}\sin\omega t_1 + (\cos\omega t_1 + \omega t_1 \sin\omega t_1)\,\omega t - \omega t_1\cos\omega t_1 + \left(1 - \frac{\omega^2 t_1^2}{2}\right)\sin\omega t_1 \qquad (20)$$

Diese Gleichung kann auch durch Auflösen der für $\frac{\omega}{c} = \infty$ unbestimmten Gl. (12′) gefunden werden.

Aus der Gl. (4) erhält man:

$$\left.\begin{aligned} tg\,\omega t_1 &= \frac{\omega(t_2-t_1) - \sin[\omega(t_2-t_1)]}{\frac{\omega^2(t_2-t_1)^2}{2} - 2\sin^2\frac{\omega(t_2-t_1)}{2}} \\ tg\,\varphi_1 &= \frac{\varphi_{12} - \sin\varphi_{12}}{\frac{\varphi_{12}^2}{2} - 2\sin^2\frac{\varphi_{12}}{2}} \end{aligned}\right\} \quad . \qquad (21)$$

Auch diese Gleichungen können aus den Gl. (13) durch Lösen der unbestimmten Ausdrücke für $\frac{\omega}{c} = \infty$ erhalten werden.

Wird $c^2 = \omega_0^2 - \omega^2 < 0$, so tritt an Stelle der Gl. (4) folgender Ansatz:

$$r = A\,\mathfrak{Sin}(ct + \alpha) + B\sin\omega t + C \quad . \quad . \quad . \qquad (22)$$

Der nämliche Rechnungsgang, wie für $c^2 = \omega_0^2 - \omega^2 > 0$ ergibt für Gl. (11):

$$\mathfrak{Tg}\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\omega t_1 + \alpha\right] = -\frac{\omega}{c}\,tg\,\omega t_1 \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (23)$$

für Gl. (12):

$$\frac{x\omega^2}{g} = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \frac{1}{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 + 1}\,\frac{\sin\omega t_1}{\mathfrak{Sin}\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\omega t_1 + \alpha\right]}\,\mathfrak{Sin}\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\omega t + \alpha\right] - \frac{1}{\left(\frac{c}{\omega}\right)^2 + 1}\sin\omega t + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin\omega t_1 \quad . \quad . \quad . \qquad (24)$$

und für die Gl. (13):

$$\left.\begin{aligned} tg\,\omega t_1 &= \frac{1}{2}\,\frac{\frac{\omega}{c}\,\mathfrak{Sin}\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\omega(t_2-t_1)\right] - \sin\omega(t_2-t_1)}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathfrak{Sin}^2\left[\left(\frac{c}{\omega}\right)\frac{\omega(t_2-t_1)}{2}\right] - \sin^2\frac{\omega(t_2-t_1)}{2}} \\ tg\,\varphi_1 &= \frac{1}{2}\,\frac{\frac{\omega}{c}\,\mathfrak{Sin}\left(\frac{c}{\omega}\right)\varphi_{12} - \sin\varphi_{12}}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \mathfrak{Sin}^2\left(\frac{c}{\omega}\right)\frac{\varphi_{12}}{2} - \sin^2\frac{\varphi_{12}}{2}} \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

An Stelle der Gl. (5) tritt:

$$c^2 = \omega^2 - \omega_0^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (26)$$

Wird c nach dieser Definition imaginär, so gehen die Gl. (24) und (25) in die Gl. (12) bezw. (13) über.

Neubau des Viaduktes von Longeray

Der Viadukt von Longeray der Eisenbahnlinie Bellegarde-Annemasse über die Rhone, der von der Hauptlinie Bellegarde-La Plaine unterhalb des Fort de l'Ecluse aus gut sichtbar ist, wurde im Juni 1940 gesprengt und ist seither in neuer Gestalt wieder erstanden. Die ursprüngliche, aus den achtziger Jahren des letzten Jahrhunderts stammende, 365 m lange Brücke setzte sich aus vier, mit parallelgurtigen, auf Mauerwerkpfeilern ruhenden Eisengitterträgern überspannten Hauptöffnungen von rund 49, 58, 69 und 54 m Pfeilerabstand, und aus einem fünffeldrigen, gemauerten Anschlussviadukt zusammen. Die einspurige Bahnlinie schneidet das wilde, tiefeingeschnittene Tal unter einem Winkel von 45° und liegt rund 65 m über dem Wasserspiegel des Flusses. Durch die unter Zugsbelastung vollzogene Sprengung ist ein Mittelpfeiler des Talüberganges ganz umgelegt und sind die beiden benachbarten Pfeiler so stark beschädigt worden, dass sie in der Folge für den Neubau unbrauchbar waren und beseitigt werden mussten. Dass wenigstens die auf Kalkfelsen ruhenden Fundamente grösstenteils wieder verwendet werden konnten, vereinfachte die wenigen zusätzlich erforderlichen Gründungsarbeiten unter der durch die Brückentrümmer um etwa 2 m aufgestauten Wasserlinie der Rhone wesentlich. Allerdings bedingte die Beibehaltung der Fundamente unter Berücksichtigung der zulässigen Bodenpressung von 8 kg/cm² die Begrenzung des Totalgewichtes der Neukonstruktion.

Diese stellt in ihrer Gesamtheit einen kühnen Eisenbetonbau dar, der aus drei Spitzbogengewölben in den Hauptöffnungen mit rd. 55 m grösster Lichtweite in den Kämpfern und den hochgeführten Zwischenpfeilern besteht, die zusammen die Fahrbahnträger aufnehmen (Abb. 1). An diesen Hauptteil des Bauwerkes schliessen beidseitig normale Viadukte mit 15 m Oeffnungsweite an, wobei die am rechten Flussufer liegenden an Stelle des vierten grossen Feldes der ursprünglichen Brücke ge-