Band 119 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich
Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 8

Ueber die Bemessung hölzerner Knickstäbe mit Hilfe von Nomogrammen

Von Prof. Dr. Ing. ARVO YLINEN, Technische Hochschule Helsinki

Zur Bemessung der im Brückenbau und Hochbau vorkommenden hölzernen Knickstäbe wird gewöhnlich das bekannte ω-Verfahren angewandt. Hiernach wird die auf den Stab wirkende Druckkraft P mit der Knickzahl ω multipliziert und die Kraft ωP durch die Querschnittfläche F des Stabes dividiert. Die auf diese Weise erhaltene, gedachte Spannung σ muss kleiner oder höchstens ebenso gross wie die zulässige Druckspannung σ_{zul} des verwendeten Holzmaterials sein, also

$$\sigma = \frac{\omega P}{F} \leqq \sigma_{\text{zul}}$$

Die Knicklast ω wird durch die Gleichung

$$\omega = \frac{\sigma_{\text{zul}}}{\sigma_{d\,\text{zul}}} = \frac{\sigma_{\text{zul}}\,\nu}{\sigma_K}$$

definiert, wo σ_K die Knickspannung, ν den Sicherheitskoeffizienten und $\sigma_{d\,\text{zul}} = \sigma_K/\nu$ die zulässige Druckspannung des Knickstabes bedeuten. Die Knickzahl ist eine Funktion des Schlankheitsgrades $\lambda = l/i$ des Stabes, wo l die Knicklänge des Stabes und i der dem kleinsten Trägheitsmoment J seiner Querschnittfläche entsprechende Trägheitsradius $i = \sqrt{\dfrac{J}{F}}$ ist.

Die erforderliche Querschnittfläche des Stabes kann mit Hilfe des ω-Verfahrens nicht direkt berechnet, sondern sie muss durch Probieren ermittelt werden, weil die Knickzahl vom Schlankheitsgrad des Stabes abhängt und dieser wiederum durch Vermittlung des Trägheitsradius von der Querschnittfläche und dem Trägheitsmoment abhängig ist. Da beide unbekannt sind, müssen die Abmessungen der Querschnittfläche zuerst angenommen, der Schlankheitsgrad und die ihm entsprechende Knickzahl berechnet und schliesslich geprüft werden, ob diese Werte der obigen Ungleichung genügen. Ist dies nicht der Fall, so müssen die Abmessungen der Querschnittfläche geändert und muss die Rechnung so oft wiederholt werden, bis das gewünschte Ergebnis erreicht ist.

Im folgenden geben wir ein Verfahren, mit dessen Hilfe die erforderliche Querschnittfläche des Stabes direkt ohne wiederholtes Probieren bestimmt werden kann. Zu diesem Zweck nehmen wir als Ausgangspunkt die von Engesser[1]) verallgemeinerte Euler'sche Knickformel

$$\sigma_K = \frac{\mu \pi^2 T_K}{\lambda^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

die für alle Werte des Schlankheitsgrades Gültigkeit hat. In der Formel bedeutet μ den durch die Befestigungsart der Enden bestimmten Einspannkoeffizienten und T_K den Knickmodul. Der Wert des Einspannkoeffizienten schwankt innerhalb der Grenzen $^1/_4 \leqq \mu \leqq 4$. In der Praxis kommt meistens $\mu = 1$ in Frage und zwar in dem Falle, wo beide Enden des Stabes gelenkig gelagert sind. Sofern die Enden des Stabes fest eingespannt sind, ist $\mu = 4$.

Der Wert des Knickmoduls T_K schwankt je nach dem, ob es sich um ein Ausknicken im elastischen oder im unelastischen Bereich handelt. Im elastischen Bereich, wo die Knickspannung kleiner als die Proportionalitätsgrenze σ_P des Materials ist, ist der Knickmodul T_K gleich dem Elastizitätsmodul E des Materials. Für Nadelholz kann man $\pi^2 E = 1\,000\,000$ kg/cm² nehmen. Für den Fall, dass die Stabenden gelenkig gelagert sind, erhält man dann aus der Formel (1)

$$\sigma_K = \frac{1\,000\,000}{\lambda^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Die Formel gilt, wenn $\lambda > 100$ ist.

Im unelastischen Bereich fällt der Knickmodul allmählich unter den Wert $T_K = E$ und wird Null, wenn die Druckspannung die Druckfestigkeit des Materials erreicht. In welcher Weise diese Verkleinerung vor sich geht, hängt von der Form des Druckstauchungsdiagramms oberhalb der Proportionalitätsgrenze und von der Form des Querschnittes ab.

Da die Anwendung des mit Hilfe des Druckstauchungsdiagramms ermittelten Knickmoduls im Zusammenhang mit der Formel (1) in der Praxis mühsam wäre, wird die Knickspannung im unelastischen Bereich gewöhnlich mit Hilfe einer empirischen Formel angegeben. Die gebräuchlichste von diesen ist die Formel von Tetmajer

$$\sigma_K = \alpha - \beta \lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Hierbei kann die Einwirkung der Befestigungsart der Stabenden berücksichtigt werden, indem man der Formel eine allgemeinere Form[2]) gibt

$$\sigma_K = \alpha - \beta \frac{\lambda}{\sqrt{\mu}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

Diese enthält als Spezialfall auch die Formel (3), wenn man $\mu = 1$ setzt.

Die Koeffizienten α und β sind Konstanten, deren Werte von der Beschaffenheit des verwendeten Materials abhängen. α entspricht zunächst der Druckfestigkeit des Materials. Für Nadelholz kann man $\alpha = 300$ kg/cm² und $\beta = 2$ kg/cm² nehmen. Die Formel (3) erhält dann die Form

$$\sigma_K = 300 - 2\lambda \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

die gilt, wenn $0 \leqq \lambda \leqq 100$ ist.

Nachdem wir derart die Grösse der Knickspannung im unelastischen Bereich durch die Formel von Tetmajer definiert haben, kann der Ausdruck für den ihr entsprechenden Knickmodul abgeleitet werden. Durch Eliminieren von λ aus den Formeln (1) und (4) findet man

$$T_K = \frac{\alpha^2 \sigma_K}{\beta^2 \pi^2}\left(1 - \frac{\sigma_K}{\alpha}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (6)$$

Im elastischen Bereich ist $T_K = E$, wie oben dargelegt worden ist.

Wenn man den Ausdruck des Knickmoduls (6) in die verallgemeinerte Euler'sche Formel (1) einsetzt, können beide Seiten mit σ_K gekürzt werden. Indem man den Klammerausdruck mit der Querschnittfläche F erweitert, wobei $\sigma_K F$ die Knickkraft P_K ist, und die Identität $\lambda^2 = l^2/i^2 = l^2 F/J$ berücksichtigt, ergibt sich

$$1 = \frac{\alpha^2 \mu J}{\beta^2 l^2 F}\left(1 - \frac{P_K}{\alpha F}\right)^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Um die Querschnittfläche F aus dieser Formel lösen zu können, muss das Trägheitsmoment I der Querschnittfläche als Funktion von F ausgedrückt werden. Hierfür setzen wir

$$F^2 = k I \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

wo k der sogen. Profilwert der Querschnittfläche ist. Dieser ist eine dimensionslose Grösse, deren Wert nur von der Form der Querschnittfläche abhängt. Für geometrisch ähnliche Querschnittformen, wie z. B. für den Kreis und das Quadrat, ist er eine Konstante. Indem man das Trägheitsmoment aus der Gleichung (8) in die Formel (7) einsetzt und diese Gleichung mit der Grösse $\left(\dfrac{\alpha F}{P_K}\right)^2$ multipliziert, kann man sie auf die Form bringen:

$$\left(\frac{\alpha F}{P_K}\right)^2 - \left(2 + \frac{\beta^2 k l^2}{\alpha \mu P_K}\right)\frac{\alpha F}{P_K} + 1 = 0 \quad . \; . \; . \quad (9)$$

Löst man diese Gleichung nach der Grösse $\dfrac{\alpha F}{P_K}$ auf, so erhält man

$$\frac{\alpha F}{P_K} = 1 + \frac{\beta^2 k l^2}{2\alpha \mu P_K} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\beta^2 k l^2}{2\alpha\mu P_K}\right)^2 - 1}$$

Die Knickkraft ist $P_K = \nu P$, wo ν den Sicherheitskoeffizienten und P die zulässige Druckkraft bezeichnen. Indem man $P_K = \nu P$ einsetzt, kann die Formel

$$F = \frac{\nu P}{\alpha}\left[1 + \frac{\beta^2 k l^2}{2\alpha\nu\mu P} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{\beta^2 k l^2}{2\alpha\nu\mu P}\right)^2 - 1}\,\right] \quad (10)$$

geschrieben werden. Wir sehen, dass der Ausdruck der Querschnittfläche aus zwei Faktoren zusammengesetzt ist. Der erste Faktor, $\dfrac{\nu P}{\alpha}$ bezeichnet die erforderliche Querschnittfläche des Stabes unter der Voraussetzung, dass keine Knickgefahr besteht. Setzt man nämlich die Stablänge $l = 0$, so erhält man gerade $F = \dfrac{\nu P}{\alpha}$. Der zweite Faktor, der Ausdruck in den eckigen Klammern, gibt an, wieviel mal die Grundfläche $\dfrac{\nu P}{\alpha}$ genommen werden muss, damit der Stab aushält ohne auszuknicken, wenn

[1]) *Engesser, F.:* Ueber die Knickfestigkeit gerader Stäbe, in «Zeitschrift des Arch. und Ing. Vereins zu Hannover», 1889, S. 455, sowie: Ueber Knickfragen, in «Schweiz. Bauzeitung», 1895, Bd. 26, S. 24.

[2]) *Ylinen, Arvo:* Die Knickfestigkeit eines zentrisch gedrückten geraden Stabes im elastischen und unelastischen Bereich. Diss. Helsinki 1938, S. 96. (Siehe die Besprechung dieses Buches in «SBZ», Bd. 118, S. 168).

seine Länge l ist. Da der Wert des Klammerausdruckes > 1 sein muss, muss die Quadratwurzel positiv gewählt werden. Ausser von den Materialkonstanten α und β und dem Sicherheitskoeffizienten ν hängt der Wert des Klammerausdruckes dann auch von der Grösse $\frac{k\,l^2}{\mu P}$ ab. Die darin enthaltenen Grössen kann man als bekannt voraussetzen.

Die Formel (10) gilt nur im unelastischen Bereich. Um eine entsprechende Formel für den elastischen Bereich abzuleiten, nimmt man als Ausgangspunkt die Euler'sche Knickkraftformel

$$P_K = \frac{\mu \pi^2 E J}{l^2}$$

Wird hier $P_K = \nu P$ und $I = F^2/k$ eingesetzt, die erhaltene Gleichung inbezug auf F gelöst und die so erhaltene Gleichung auf der rechten Seite mit dem Faktor $\alpha \sqrt{\nu P}$ erweitert, so ergibt sich schliesslich

$$F = \frac{\nu P}{\alpha} \; \frac{\alpha}{\pi \sqrt{\nu E}} \sqrt{\frac{k\,l^2}{\mu P}} \quad . \; . \; . \quad (11)$$

Die rechte Seite der Gleichung ist in dieser ungekürzten Form gelassen worden, um darin die selben Faktoren wie in (10) leichter feststellen zu können.

Zwecks Bestimmung der Gültigkeitsgrenzen der Formeln (10) und (11) wird (11) nach der Grösse $\frac{k\,l^2}{\mu P}$ aufgelöst:

$$\frac{k\,l^2}{\mu P} = \pi^2 \nu E \left(\frac{F}{\nu P}\right)^2$$

Die Euler'sche Formel (2) gilt, wenn $\lambda > 100$ oder $\sigma_K < 100$ kg pro cm² ist. Danach ist $\frac{F}{\nu P} = \frac{F}{P_K} = \frac{F}{\sigma_K F} > \frac{1}{100}$. Setzt man diesen Wert in die obige Formel ein und berücksichtigt man ausserdem den Wert $\pi^2 E = 1\,000\,000$ kg/cm², so erhält man als Gültigkeitsgrenze der Formel (11)

$$\frac{k\,l^2}{\mu P} > 100\,\nu \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12)$$

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so knickt der Stab im unelastischen Bereich aus und seine Querschnittfläche kann aus der Formel (10) berechnet werden. Für den Sicherheitskoeffizienten wählen wir die Werte $\nu = 4$ und $\nu = 5$. Die zulässigen Spannungen stimmen dann mit der S. I. A.-Holznorm No. 111 überein.

In der Praxis kommen zumeist Stäbe mit rundem oder rechteckigem Querschnitt in Frage. Bei rundem Querschnitt ist der Profilwert

$$k = \frac{F^2}{J} = \frac{\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)^2}{\frac{\pi d^4}{64}} = 4\pi$$

beim Rechteck, dessen Seiten b und h sind,

$$k = \frac{(b\,h)^2}{\frac{b\,h^3}{12}} = 12\,\frac{b}{h}$$

Hierbei wird vorausgesetzt, dass die Seite h mit der Knickrichtung zusammenfällt.

Setzt man in die Formel (10) $F = \frac{\pi d^2}{4}$, $k = 4\pi$, $\alpha = 300$ kg/cm², $\beta = 2$ kg/cm² und $\nu = 4$ ein, so erhält man zur Berechnung der erforderlichen Dicke des runden Stabes die Formel

$$d = 0{,}130 \sqrt{P} \left[1 + 0{,}0209 \frac{l^2}{\mu P} + \sqrt{\left(1 + 0{,}0209 \frac{l^2}{\mu P}\right)^2 - 1} \right]^{1/2} \quad (13)$$

Nach der Ungleichung (12) gilt dies, wenn $\frac{l^2}{\mu P} \leq 31{,}8$ ist. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so knickt der Stab im elastischen Bereich aus und sein Querschnitt wird aus der Formel

$$d = 0{,}130 \sqrt{P}\; 0{,}729 \sqrt[4]{\frac{l^2}{\mu P}} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (14)$$

berechnet, die sich aus (11) ergibt, indem man die im Zusammenhang mit (13) angegebenen Beiwerte einsetzt.

Setzt man in die Formel (10) und (11) $F = b\,h$, $k = 12\,\frac{b}{h}$ ein und gibt man den übrigen Konstanten die selben Werte wie in (13) und (14), so erhält man zur Berechnung der Dicke h eines, seinem Querschnitte nach rechteckigen Stabes die Formel

$$h = 0{,}115 \sqrt{P\,\frac{h}{b}} \left[1 + 0{,}02 \frac{b\,l^2}{\mu h P} + \sqrt{\left(1 + 0{,}02 \frac{b\,l^2}{\mu h P}\right)^2 - 1} \right]^{1/2} \quad (15)$$

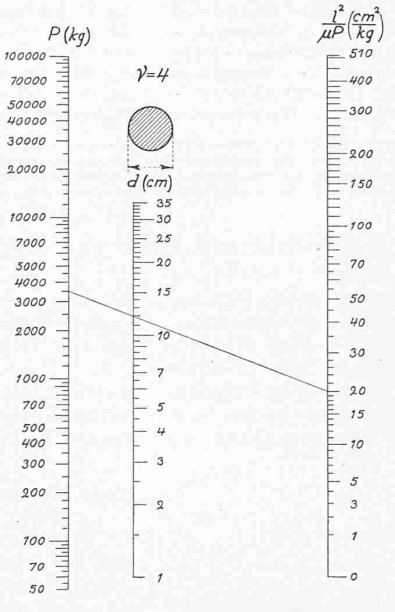

Abbildung 1

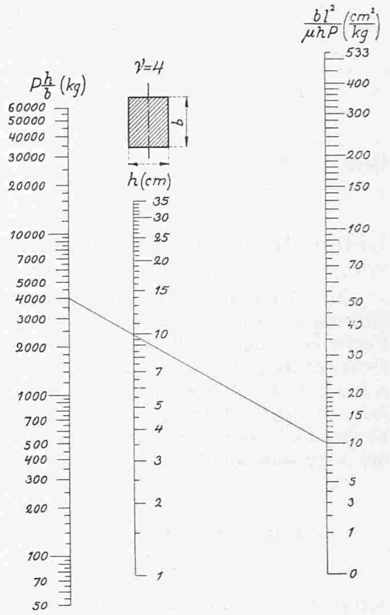

Abbildung 2

Diese gilt, wenn $\frac{b\,l^2}{\mu h P} \leq 33{,}3$ ist, und

$$h = 0{,}115 \sqrt{P\,\frac{h}{b}}\; 0{,}721 \sqrt[4]{\frac{b\,l^2}{\mu h P}} \quad . \; . \; . \; . \quad [16]$$

für den Bereich $\frac{b\,l^2}{\mu h P} > 33{,}3$.

Die dem Wert $\nu = 6$ des Sicherheitskoeffizienten entsprechenden Formeln geben wir nicht wieder, weil sie sich von (13), (14), (15), (16) nur in Bezug auf die numerischen Werte der Koeffizienten unterscheiden würden.

Um die durch die Anwendung der Formeln (13) bis (16) bedingte Rechenarbeit zu vermeiden, geben wir obenstehend die auf entsprechende Formeln gegründeten *Nomogramme* wieder. Das Nomogramm Abb. 1 wurde mit Hilfe der Formeln (13) und (14) erhalten. Seine Anwendung geht aus folgendem Beispiel hervor. An einem Stabe, dessen Länge $l = 265$ cm ist, wirkt die zentrisch drückende Kraft $P = 3500$ kg. Die Stabenden sind gelenkig gelagert, sodass $\mu = 1$ ist. Aus wie dickem Rundholz muss der Stab hergestellt werden? — Auf Grund dieser Werte erhält man $\frac{l^2}{\mu P} = 20$ cm²/kg. Wenn man aus den entsprechenden Skalen des Nomogrammes in Abb. 1 die Werte $P = 3500$ und $\frac{l}{\mu P} = 20$ wählt und die gefundenen Punkte miteinander verbindet, so ist in der mittleren Skala $d = 12$ cm, d. h. die Dicke des gesuchten Stabes. Die Formel (13) ergibt ein analoges Resultat.

Wenn man zum Stabe rechteckiges Holz verwendet, ergibt sich die Länge h der Seite des Stabquerschnittes, in deren Richtung die Knickung erfolgt, aus dem Nomogramm in Abb. 2, wo der Sicherheitskoeffizient $\nu = 4$ ist. Beispiel: An einem Stabe, dessen Länge $l = 200$ cm, und dessen Seitenverhältnis $b/h = 2$ ist, wirkt die zentrisch drückende Kraft $P = 8000$ kg. Wie gross muss man die Dicke h wählen, damit der Stab die betreffende Kraft aushalten würde, wenn die Stabenden als friktionslose Gelenke angenommen werden? Auf Grund der gegebenen Werte erhält man $P\,\frac{h}{b} = 4000$ kg und $\frac{b\,l^2}{\mu h P} = 10$ cm²/kg. Wählt man diese Werte aus den entsprechenden Skalen des Nomogrammes Abb. 2 und verbindet man dann die gefundenen Punkte miteinander, so erhält man aus der mittlern Skala $h = 9{,}9$ cm, als Dicke. Die Formel (15) ergibt das selbe Resultat. Da das Seitenverhältnis der Querschnittfläche $b/h = 2$ ist, ist $b = 2 \cdot 9{,}9 = 19{,}8$ cm.

Die Nomogramme in Abb. 3 und 4 sind für runde oder rechteckige Querschnitte und $\nu = 5$ entworfen. In sämtlichen Nomogrammen ist der grösste Wert des Veränderlichen $\frac{l^2}{\mu P}$ oder $\frac{b\,l^2}{\mu h P}$ so gewählt, dass er dem grössten in der Praxis zulässigem Wert des Schlankheitsgrades $\lambda = 200$ entspricht, wenn $\mu = 1$ ist.