**Zeitschrift:** Schweizerische Bauzeitung
**Herausgeber:** Verlags-AG der akademischen technischen Vereine
**Band:** 115/116 (1940)
**Heft:** 8

**Artikel:** Comment calculer les arcs continus
**Autor:** Sarrasin, A.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-51144

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 15.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

INHALT: Comment calculer les arcs continus. — Nachtrag zum Geiser-Wettbewerb 1939 des S. I. A. über aktuelle Probleme des architekton. Wettbewerbs. — Vom Bau der Sustenstrasse Innertkirchen-Wassen. — Stösse beim motorischen Antrieb. — Mitteilungen: «Superfinish», eine neue Art der Feinstbearbeitung. Zum Wettbewerb für das Kurparktheater Baden. Axialer, dreistufiger Bergwerks-Ventilator. Motor-Rettungsboot mit Wasserstrahlantrieb. Gebäude-Blitzschutz. Befestigungsbauten und zivile Fachleute. Fünfzig Jahre Rhätische Bahn. Eidg. Oberbauinspektor. — Wettbewerbe: Waisenhaus in Winterthur. — Nekrologe: R. A. Kerkhofen. Jak. Sutter. — Mitteilungen der Vereine. — Vortrags-Kalender.

Band 115 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet Nr. 8

# Comment calculer les arcs continus

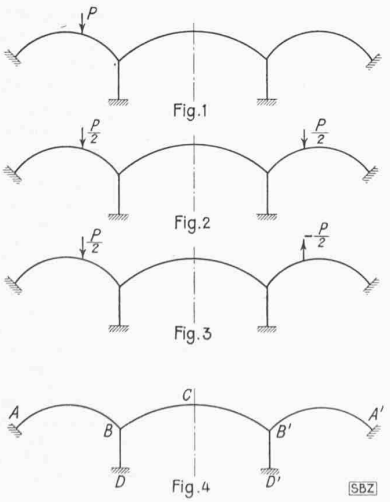
Par A. SARRASIN, ingénieur, Bruxelles-Lausanne

Dans son travail courant, le staticien rencontre peu de problèmes dont la solution théorique offre de réelles complications, mais il arrive qu'il doive fournir une somme de travail excessif pour résoudre pratiquement certains d'entre eux. Or, un calcul trop long est bien souvent entaché d'erreurs matérielles. Pour l'éviter, on fait des hypothèses plus ou moins proches de la réalité. C'est parfois nécessaire, mais on simplifie aussi sans raison. Par exemple, on calcule souvent comme arcs encastrés des ouvrages qu'il serait probablement plus avantageux, en tous cas plus exact, de traiter comme arcs continus. Or, ce dernier système ne présente pas les difficultés qu'on lui prête généralement. Nous voudrions le montrer.

Commençons, pour cela, par déterminer quelles seraient les réactions[1]) des arcs continus à étudier, si leurs piles étaient indéformables. On coupe ensuite aux points de continuité pour former les systèmes isostatiques convenables et on fait agir en ces sections les réactions trouvées. A ce stade, les déformations[2]) sont nulles aux extrémités des arcs et différentes de 0 aux extrémités des piles. Pour réaliser l'équilibre réel, on ajoute sur les arcs et les piles des réactions complémentaires inconnues, qu'on calcule en écrivant que les rotations et déplacements des arcs et des piles en leurs points de contact sont les mêmes. Or, les déformations des arcs sous des réactions complémentaires égales à l'unité, sont connues par le calcul de l'arc encastré et celles des piles se trouvent de la manière la plus simple. Pour un système donné d'arcs continus, on pose donc très rapidement et on résout une fois pour toutes autant d'équations linéaires qu'il y a de grandeurs hyperstatiques. Les tensions dans une section quelconque se déterminent ensuite de la manière habituelle.

Le procédé le plus rapide pour obtenir les réactions des arcs encastrés, c'est de faire agir les grandeurs hyperstatiques au centre de gravité des poids élastiques $\frac{ds}{J}$, la direction des réactions étant choisie de telle sorte que $\int \frac{x\,y\,ds}{J} = 0$. Les réactions sur la même pile de deux arcs voisins ont donc, dans le cas général, des directions différentes. Or, ce sont les déplacements suivant ces directions que nous avons calculés. Il faut par conséquent, lorsqu'on établit les conditions d'équilibre, fixer deux directions orthogonales — par exemple la verticale et l'horizontale — et exprimer que les composantes suivant ces deux directions des déplacements obliques de l'extrémité des arcs et de la pile sont égales.

Lorsque le système à calculer possède un axe de symétrie verticale, on remplace une charge $P$ en un point quelconque (fig. 1) par la superposition d'un cas de charge symétrique (fig. 2) et d'un cas de charge antisymétrique (fig. 3). On décomposera ainsi un système à $n$ grandeurs hyperstatiques en deux systèmes dont le total des inconnues est $n$. C'est là une simplification dont, en général, on ne se représente pas assez l'importance.




[1]) Par réactions, nous entendons aussi bien le moment d'encastrement que les forces suivant deux axes orthogonaux.

[2]) Nous appelons «déformations en un point», la rotation de la section qui passe par ce point et ses déplacements suivant deux axes orthogonaux.

En outre, pour chaque arc possédant un axe de symétrie vertical, on pourra employer, avec une exactitude suffisante lorsqu'il s'agit d'un avant-projet, une table donnant les réactions pour l'encastrement parfait. L'établissement de lignes d'influences devient dans ce cas un travail simple et relativement court.

Pour le montrer et pour expliquer en même temps notre méthode, nous allons donner les parties théoriques intéressantes de l'avant-projet de trois arcs continus (fig. 4) que nous avons dû récemment étudier. Les trois arcs possèdent chacun un axe vertical de symétrie, l'axe de l'arc central étant en même temps axe de symétrie du système. Les axes $BD$ et $B'D'$ des piles sont verticaux. En $A$, $A'$, $D$ et $D'$ l'encastrement est parfait. Il s'agit de déterminer pour une section quelconque les lignes d'influences des moments fléchissants et des efforts normaux et tranchants.

Nous calculons tout d'abord au moyen des tables de Strassner les réactions des arcs encastrés $AB$, $BB'$ et $B'A'$ pour une position quelconque de la charge $P$. Puis, nous décomposons le système à neuf grandeurs hyperstatiques en deux systèmes respectivement à cinq et quatre inconnues en remplaçant le cas de charge $P = 1$ en un point quelconque par deux cas de charge, l'un symétrique et l'autre antisymétrique. Nous calculons en premier lieu les réactions complémentaires pour le cas de charge symétrique (fig. 2). Pour des positions symétriques des charges, le point $C$ ne subit aucun déplacement horizontal, la tangente y reste horizontale et l'effort tranchant y est nul. Nous pouvons donc couper la construction en $C$ et remplacer l'action de $B'C$ sur $CB$ par un encastrement permettant un déplacement vertical (voir fig. 5). Appelons $M$, $H$ et $R$ le moment fléchissant, la poussée horizontale et la réaction verticale en $B$ de l'arc encastré $AB$. Les réactions de l'arc encastré $BC$ seront nulles tant qu'il ne sera pas chargé. Les réactions complémentaires seront pour l'arc $AB$, le moment $\Delta M_1$, la poussée horizontale $\Delta H_1$ et la réaction verticale $\Delta R_1$, pour l'arc $BC$, le moment $\Delta M_2$ et la poussée horizontale $\Delta H_2$. La fig. 5 représente les systèmes isostatiques adoptés avec les réactions des arcs encastrés et les réactions complémentaires.

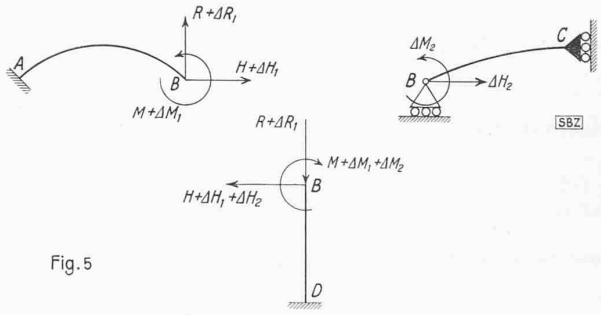



Fig. 5

Convenons que des réactions positives ont le sens indiqué sur la fig. 5, qu'une rotation est positive dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre, qu'un déplacement horizontal positif va de $A$ vers $C$, et qu'un déplacement vertical positif va de bas en haut. Dans le calcul des déformations des arcs, nous ne tenons compte que des moments fléchissants et nous négligeons les efforts normaux et tranchants, ce qui est suffisamment exact, puisqu'il s'agit ici de déformations dues aux réactions complémentaires.

Pour l'arc $AB$, les déformations en $B$ proviendront des réactions complémentaires seulement:

Influence de $\Delta M_1$: (fig. 5 et 6)

rotation:

$$\Delta M_1 \int_A^B \frac{ds}{EJ} = a\,\Delta M_1$$

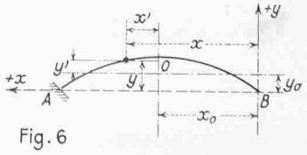



Fig. 6

déplacement horizontal: $\Delta M_1 \int_A^B \frac{y\,ds}{EJ} = \Delta M_1\, y_0 \int_A^B \frac{ds}{EJ} = b\,\Delta M_1$

déplacement vertical: $\Delta M_1 \int_A^B \frac{x\,ds}{EJ} = \Delta M_1\, x_0 \int_A^B \frac{ds}{EJ} = c\,\Delta M_1$

Influence de $\Delta H_1$:

rotation: $= b\,\Delta H_1$

déplacement horizontal: $\Delta H_1 \int_A^B \frac{y^2\,ds}{EJ} =$

$$= \Delta H_1 \left( \int_A^B \frac{y'^2\,ds}{EJ} + y_0^2 \int_A^B \frac{ds}{EJ} \right) = d\,\Delta H_1$$

déplacement vertical: $\Delta H_1 \int_A^B \frac{x\,y\,ds}{EJ} = \Delta H_1\, x_0\, y_0 \int_A^B \frac{ds}{EJ} = e\,\Delta H_1$

Influence de $\Delta R_1$:

rotation: $= c\,\Delta R_1$

déplacement horizontal: $= e\,\Delta R_1$

déplacement vertical: $\Delta R_1 \int_A^B \frac{x^2\,ds}{EJ} =$

$$= \Delta R_1 \left( \int_A^B \frac{x'^2\,ds}{EJ} + x_0^2 \int_A^B \frac{ds}{EJ} \right) = f\,\Delta R_1$$

Toutes les intégrales, $a\,b\,c\,d\,e\,f$ sont déjà connues par le calcul fait pour l'arc encastré. Les valeurs des rotations et déplacements de l'extrémité $B$ de l'arc $AB$ sont donc très rapidement obtenues.

Passons à l'arc $BB'$ (fig. 5 et 7):

Il n'y a pas ici de déplacement vertical de $B$.

Influence de $\Delta M_2$:

rotation: $\Delta M_2 \int_B^C \frac{ds}{EJ} = \alpha\,\Delta M_2$

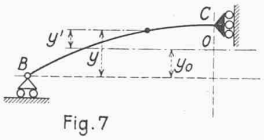


Fig. 7

déplacement horizontal: $\Delta M_2 \int_B^C \frac{y\,ds}{EJ} = \Delta M_2\, y_0 \int_B^C \frac{ds}{EJ} = \beta\,\Delta M_2$

Influence de $\Delta H_2$:

rotation: $= \beta\,\Delta H_2$

déplacement horizontal: $\Delta H_2 \int_B^C \frac{y^2\,ds}{EJ} =$

$$= \Delta H_2 \left( \int_B^C \frac{y'^2\,ds}{EJ} + y_0^2 \int_B^C \frac{ds}{EJ} \right) = \gamma\,\Delta H_2$$

Comme pour l'arc $AB$, les intégrales $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sont connues par le calcul de l'arc encastré. Elles ne s'étendent toutefois ici que sur un demi-arc.

Considérons enfin la pile $BD$ (fig. 8)

Influence du moment:

rotation:

$$-(M + \Delta M_1 + \Delta M_2) \int_B^D \frac{ds}{EJ} = -r\,(M + \Delta M_1 + \Delta M_2)$$

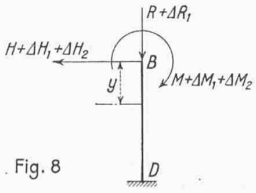


Fig. 8

déplacement horizontal:

$$(M + \Delta M_1 + \Delta M_2) \int_B^D \frac{y\,ds}{EJ} = n\,(M + \Delta M_1 + \Delta M_2)$$

déplacement vertical: $= 0$.

Influence de l'effort horizontal:

rotation: $n\,(H + \Delta H_1 + \Delta H_2)$

déplacement horizontal:

$$-(H + \Delta H_1 + \Delta H_2) \int_B^D \frac{y^2\,ds}{EJ} = -\,t\,(H + \Delta H_1 + \Delta H_2)$$

déplacement vertical: $= 0$.

Influence de la charge verticale:

La rotation et le déplacement horizontal sont nuls.

déplacement vertical: $-(R + \Delta R_1) \int_B^D \frac{ds}{EF} = -\,s\,(R + \Delta R_1)$

Nous pouvons maintenant écrire:

$$a\,\Delta M_1 + b\,\Delta H_1 + c\,\Delta R_1 = \alpha\,\Delta M_2 + \beta\,\Delta H_2 =$$
$$= -\,r\,(M + \Delta M_1 + \Delta M_2) + n\,(H + \Delta H_1 + \Delta H_2) \quad (1 \text{ et } 2)$$
$$b\,\Delta M_1 + d\,\Delta H_1 + e\,\Delta R_1 = \beta\,\Delta M_2 + \gamma\,\Delta H_2 =$$
$$= n\,(M + \Delta M_1 + \Delta M_2) - t\,(H + \Delta H_1 + \Delta H_2) \quad (3 \text{ et } 4)$$
$$c\,\Delta M_1 + e\,\Delta H_1 + f\,\Delta R_1 = -\,s\,(R + \Delta R_1) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Les équations 1 à 5, résolues en fonction de $M$, $H$ et $R$, nous donnent les réactions complémentaires pour une position quelconque des charges symétriques $\frac{P}{2}$ [3]). Il nous reste encore à considérer le cas de deux charges antisymétriques suivant fig. 3. Les arcs chargés ont déjà été calculés comme s'ils étaient encastrés en $B$ et $B'$. Soient de nouveau $M$, $H$ et $R$ les réactions en $B$; elles seront en $B'$: $-M$, $-H$ et $-R$. Pour l'arc $AB$, les réactions complémentaires sont les mêmes qu'auparavant; elles provoquent donc les mêmes déformations $a\,b\,c\,d\,e\,f$ (fig. 9). Dans l'arc $BB'$, la poussée horizontale est nulle. Le moment en $C$ est aussi égal à 0.

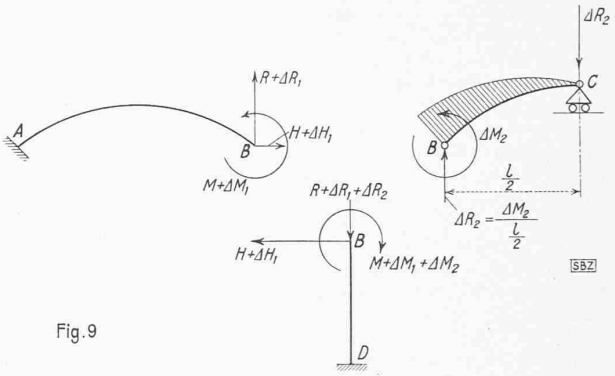


Fig. 9

L'influence de la seule grandeur hyperstatique $\Delta M_2$ sera:

rotation: $\Delta M_2 \int_C^B \left(\frac{x'}{\frac{l}{2}}\right)^2 \frac{ds}{EJ} = \frac{\Delta M}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} \int_C^B \frac{x'^2\,ds}{EJ} = \varepsilon\,\Delta M_2$

Nous pouvons donc écrire pour le cas de charge antisymétrique

$$a\,\Delta M_1 + b\,\Delta H_1 + c\,\Delta R_1 = \varepsilon\,\Delta M_2 =$$
$$= -\,r\,(M + \Delta M_1 + \Delta M_2) + n\,(H + \Delta H_1) \quad (6 \text{ et } 7)$$
$$b\,\Delta M_1 + d\,\Delta H_1 + e\,\Delta R_1 =$$
$$= n\,(M + \Delta M_1 + \Delta M_2) - t\,(H + \Delta H_1) \quad (8)$$
$$c\,\Delta M_1 + e\,\Delta H_1 + f\,\Delta R_1 = -\,s\left(R + \Delta R_1 + \frac{\Delta M_2}{\frac{l}{2}}\right) \quad . \; . \; . \quad (9)$$

Les équations 6 à 9 résolues en fonction de $M$, $H$ et $R$, nous n'avons plus qu'à additionner les cas de charge symétriques et antisymétriques pour pouvoir tracer la courbe des moments fléchissants et des efforts normaux et tranchants des arcs continus pour une charge $P$ en un point quelconque. Par les procédés usuels, nous en tirerons les lignes d'influence cherchées.

Comme on le voit, ce système à neuf grandeurs hyperstatiques est au fond très simple. On peut le calculer par des méthodes avec lesquelles tout praticien est familiarisé. Le temps nécessaire pour résoudre ce cas excède de peu celui qu'on devrait consacrer à des arcs encastrés.

[3]) Si la charge se trouve sur l'arc $BB'$ au lieu d'être sur l'arc $AB$, les conditions d'équilibre s'écrivent de la même manière. La seule différence c'est que $M$, $H$ et $R$ sont alors les réactions de l'arc encastré $BB'$. Lorsque les arcs $AB$, $BB'$ et $B'A'$ sont chargés, la valeur de $M$, $H$ et $R$ à introduire dans les équations 1 à 5 est la somme des réactions des arcs encastrés $AB$ et $BB'$ sur la pile $BD$. Si l'arc $AB$ n'était pas symétrique et si ses axes formaient respectivement un angle $\alpha$ avec l'horizontale et la verticale, on devrait alors introduire dans les équations 1 à 5, par exemple pour l'influence de $\Delta M_1$ sur le déplacement horizontal, l'expression $(b \cos \alpha - c \sin \alpha)\,\Delta M_1$ au lieu de $b\,\Delta M_1$, en admettant comme sens positif des déplacements ceux de la fig. 10. Sur les piles, $\Delta H_1$ donnerait une composante horizontale et une composante verticale, $\Delta R_1$ une composante verticale et une composante horizontale. Il faut naturellement en tenir compte dans les équations d'équilibre.

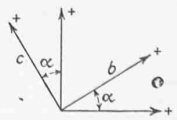


Fig. 10