Band 100 Der S. I. A. ist für den Inhalt des redaktionellen Teils seiner Vereinsorgane nicht verantwortlich. Nachdruck von Text oder Abbildungen ist nur mit Zustimmung der Redaktion und nur mit genauer Quellenangabe gestattet. Nr. 13

Schwingungen von Maschinenfundamenten.

Von Ing. J. BÄCHTOLD, bei Locher & Cie., Zürich.

Erfahrung, Versuche und theoretische Erwägungen haben gelehrt, dass für den Bestand und die Qualität von Bauwerken, die periodischen Impulsen ausgesetzt sind, nicht allein Standsicherheit und Materialbeanspruchung massgebend sind, sondern dass fast ebensogrosse Bedeutung den Vibrationen zukommt. Diese können, je nachdem die Eigenfrequenzen der Konstruktion in der Nähe der Maschinenumlaufzahl liegen oder genügend weit von dieser abweichen, gefährlich oder unbedeutend sein. Eine vollständige statische Berechnung von Bauwerken dieser Art enthält daher neben den üblichen statischen Untersuchungen die Bestimmung der Eigenschwingungszahlen.

Für die praktisch vorkommenden Fälle ist es sehr oft erlaubt, sich die schwingende Masse in einem Punkt konzentriert zu denken. Unter dieser Annahme gestaltet sich das Problem sehr einfach. Die Differentialgleichung der Schwingung eines Massenpunktes lautet:

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} = - P' y$$

wenn m die schwingungsfähige Masse, y die Auslenkung aus der Ruhelage und P' die Kraft, die der Auslenkung 1 des Massenpunktes entspricht, bedeuten;

oder:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{P'}{m} y = - \frac{P'}{P} g y$$

$\frac{P}{P'} = \delta =$ Durchbiegung oder Verschiebung infolge der Kraft P an der Stelle des Massenpunktes,

somit ist $$\frac{d^2 y}{at^2} = - \frac{g}{\delta} y$$

und integriert:

$$y = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\delta}}\, t\right)$$

hieraus ergibt sich die minutliche Schwingungszahl

$$n = \sqrt{\frac{g}{\delta}} \frac{60}{2\pi} = \sim \frac{300}{\sqrt{\delta}}; \ \delta \text{ in cm.}$$

Diese Formel, die als Geigersche Formel bekannt ist und auch bei der Berechnung biegungskritischer Drehzahlen verwendet wird, dient heute, dank ihrer Einfachheit in der Praxis für zahlreiche Schwingungsprobleme. Der Genauigkeitsgrad, der mit dieser Annäherung erreicht werden kann, hängt von der wirklichen Verteilung der Massen ab.

Dampfturbinenfundamente, für die wegen ihrer immer weitergehenden Auflösung die Kenntnis der Eigenschwingungszahlen besonders wichtig ist, haben sich allmählich zu einem Normaltypus entwickelt. Sie bestehen in der Regel aus mehreren Querrahmen, die durch zwei Längsträger unter sich verbunden sind. Das Problem besteht nun darin, diejenigen Schwingungsformen herauszugreifen, die das gesamte dynamische Verhalten der Konstruktion zu überblicken gestatten. Der vollständige Schwingungsvorgang ist bestimmt, sobald die Schwingungen in den Hauptschwingungsrichtungen bekannt sind. Ein räumliches System besitzt im allgemeinen, bei beliebiger Impulsrichtung drei Hauptschwingungsrichtungen mit drei verschiedenen Frequenzen, entsprechend den drei Freiheitsgraden. Für die Dampfturbinenfundamente genügt es, die Schwingungen senkrecht zur Maschinenaxe zu untersuchen, da, wie Erfahrung und Versuche gezeigt haben, die Impulse in Richtung der Axe praktisch bedeutungslos sind. Die Aufgabe reduziert sich somit auf ein ebenes Schwingungsproblem mit zwei zueinander senkrechten Hauptschwingungsrichtungen, nämlich die vertikale und die horizontale.

Auf die Schwingungen in horizontaler Richtung möchte ich im Folgenden nicht näher eintreten, da für diesen Fall die Genauigkeit der obigen Formel für die Praxis durchaus genügend ist. Dieses erklärt sich ohne weiteres, wenn man bedenkt, dass für die horizontale Schwingungsrichtung die Verteilung der Lasten auf dem Riegel und Längsträger belanglos ist, indem es ja nur auf die Höhenlage des Schwerpunktes dieser Massen ankommt. Die Ungenauigkeit besteht dabei nur in der Schätzung des Einflusses der Stützenmassen, die aber in der Regel von untergeordneter Bedeutung ist.

Für die Vertikalschwingungen hingegen kann die Formel nur solange befriedigen, als die Maschinenlast je in einem Punkte eines Trägers angreift, und die verteilte Belastung im Verhältnis zu jener klein ist. Sind diese Forderungen nicht erfüllt, so wird es wünschenswert erscheinen, die Eigenfrequenz genauer zu kennen, wenn sie in der Nähe der Maschinenumlaufzahl liegt. Für solche kompliziertere Fälle sind bereits verschiedene Verfahren angegeben worden, die gestatten, die Eigenfrequenzzahl, meist unter erheblichem Aufwand von Rechenarbeit zu ermitteln.

Nachfolgend möchte ich anhand einiger Beispiele auf ein solches Verfahren hinweisen, das mir insofern sehr geeignet scheint, als es verhältnismässig wenig Rechenarbeit erfordert und sich überdies auf jedes beliebige statische System anwenden lässt.

Prof. Hahn hat in seinen Abhandlungen in der „S. B. Z."[1]) einen Weg gezeigt, die Eigenschwingungen beliebiger Konstruktionen mit guter Annäherung zu bestimmen mit Hilfe der Theorie der Integralgleichungen. Auf die Wiedergabe des ganzen Lösungsweges, der rein mathematisches Interesse hat, verzichte ich. Prof. Hahn findet für die Eigenfrequenz λ in erster Annäherung die Formel:

$$\lambda^2 = \frac{1}{\int_0^l \left(\alpha_{xx}\, m_x + \delta_{xx}\, \Theta_x\right) dx}$$

$\alpha_{xx} =$ Ausbiegung an der Stelle x infolge $P = 1$ in x

$\delta_{xx} =$ Drehung des Querschnittes bei x infolge $M = 1$ in x.

Ist die Kurve der α_{xx} gefunden, so ergibt sich diejenige der δ_{xx} aus der Beziehung

$$\delta_{xx} = \frac{d^2\, \alpha_{xx}}{dx^2}$$

$\Theta_x =$ Massenträgheitsmoment des Massenelementes von der Länge dx in x.

Der Einfluss der Drehungsträgheit darf in der Regel vernachlässigt werden, besonders bei geraden Stäben, sofern sie nicht durch Massen mit aussergewöhnlichen Massenträgheitsmomenten belastet sind. Die Formel, deren Anwendungen in folgenden Beispielen gezeigt werden soll, lautet dann

$$\lambda^2 = \frac{1}{\int_0^l \alpha_{xx}\, m_x\, dx}$$

[1]) *E. Hahn*, Prof. à l'Université de Nancy: „Note sur la vitesse critique des arbres et la formule de Dunkerley", Bd. 72, S. 191* u. 206* (9. u. 16. Nov. 1918). „Détermination des fréquences critiques d'une pièce élastique". Bd. 87, S. 1* (2. Jan. 1926).