Ueber Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen.

Von Prof. Dr. *F. Prášil* in Zürich.

Die Behandlung hydrotechnischer Probleme auf Grundlage der Fundamentalgleichungen der Hydrodynamik von Lagrange oder Euler stösst bekanntlich deshalb auf Schwierigkeiten, weil die Integration der hierbei in Frage kommenden partiellen Differentialgleichungen vielfach mit den bisher bekannten Methoden nicht durchführbar ist.

Die Untersuchungen, welche für inkompressible Flüssigkeiten bereits bestehen, beziehen sich einerseits auf Bewegungen, bei denen die Geschwindigkeiten durch das Vorhandensein eines Geschwindigkeitspotentials bestimmt sind und anderseits auf die Theorie der Wirbelbewegungen. Dieselben sind zum grössten Teil auf Grundlage eines räumlichen, geradlinigen und orthogonalen Koordinatensystems durchgeführt; Grashof hat in seiner theoretischen Maschinenlehre (1. Band Seite 398 u. ff.) für die allgemeine Untersuchung strömender Bewegung längst gegebener Bahnen krummlinige, orthogonale Koordinaten angewendet; mit zylindrischen Koordinaten sind bisher nur einige Spezialfälle behandelt worden. Die Untersuchung ebener Strömungen hat zur Lösung der sogenannten zweidimensionalen Probleme und darunter zur Bestimmung der Form von Flüssigkeitsstrahlen geführt. So sehr diese Untersuchungen geeignet sind, eine Reihe von Flüssigkeitsbewegungen exakt zu beschreiben, so sind dieselben doch in den wenigsten Fällen unmittelbar an aktuelle Vorgänge anschliessbar; sie geben im allgemeinen nur Vergleichsgrundlagen.

Zu den hydrotechnischen Problemen, die namentlich im Maschinenbau von aktueller Bedeutung sind, gehören unter andern auch jene, welche sich auf die Bewegung von Flüssigkeiten durch Hohlräume beziehen, die entweder direkt als Rotationshohlräume geometrisch charakterisiert (Röhren, Düsen), oder in solchen Räumen gesetzmässig gruppiert sind (Leit- und Laufräder von Turbinen und Zentrifugalpumpen).

Es ist nun naheliegend in der Transformation der anfangs genannten, auf ein räumliches, orthogonales Koordinatensystem bezogenen Fundamental-Gleichungen auf ein zylindrisches Koordinatensystem mit der Raumachse als Hauptachse ein Mittel zur eventuellen Vereinfachung der analytischen Ableitungen für die Untersuchung von Flüssigkeitsbewegungen in Rotationshohlräumen zu suchen. Die Resultate eines solchen Versuches bilden das Thema der folgenden Abhandlung; derselbe wurde in erster Linie zu dem Zwecke unternommen, Methoden zur Bestimmung der Meridianlinien von Saugröhren für Turbinen zu finden.

Es wird hiebei an die Erörterungen angeschlossen, die Grashof in seiner theoretischen Maschinenlehre (I. Band Seite 386 u. ff.) hinsichtlich der Fundamentalgleichungen für inkompressible und reibungslose Flüssigkeiten gegeben hat.

I. Die transformierten Fundamentalgleichungen.

Die beabsichtigte Transformation könnte auf analytischem Wege erfolgen, indem man unter Belassung der Z Achse als Hauptachse, die Koordinaten x und y und deren Ableitungen durch Einführung der Polarkoordinaten r und φ ersetzen würde.

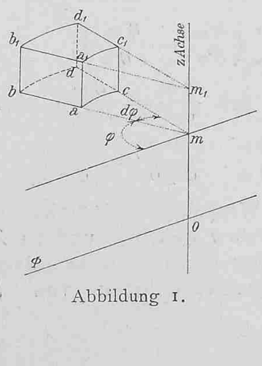

Abbildung 1.

Es erscheint jedoch einfacher, die Gleichungen direkt abzuleiten.

Es sei in Abb. 1 im Ringstück $a\,b\,c\,d\;a_1\,b_1\,c_1\,d_1$ ein Volumelement dargestellt, dessen Eckpunkt a die zylindrischen Koordinaten: $\overline{Om} = z$; $\overline{ma} = r$ und φ habe; die Seitenlängen des Volumelementes seien:

$$\overline{ab} = \overline{a_1 b_1} = \overline{cd} = \overline{c_1 d_1} = dr$$
$$\widehat{ac} = \widehat{a_1 c_1} = \qquad = r\,d\varphi$$
$$\widehat{bd} = \widehat{b_1 d_1} = \qquad = (r + dr)\,d\varphi$$
$$\overline{aa_1} = \overline{bb_1} = \overline{cc_1} = \overline{dd_1} = \overline{mm_1} = dz.$$

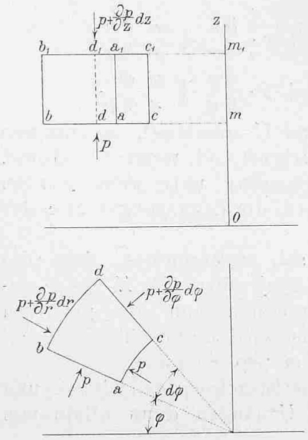

Abb. 2 und 3.

Auf Ebenen senkrecht zur Z Achse projiziert sich das Volumelement hiemit nach Abb. 3; einen Aufriss gibt Abb. 2.

Die Masse Flüssigkeit, welche das Volumelement ausfüllt, ist bestimmt durch

$$dM = \frac{\gamma}{g}\,r\,d\varphi \cdot dr \cdot dz,$$

wobei γ das Gewicht der Volumeinheit der Flüssigkeit, g die Beschleunigung der Schwere bedeuten.

Die pro Masseneinheit wirksamen Massenkräfte seien bezeichnet mit R in der Richtung r, radial nach auswärts positiv; Z in der Richtung der Z Achse, positiv im Sinne der Abbildungen 1 und 2; U senkrecht zu R und Z und positiv im Sinne der Drehung des Uhrzeigers. Die Geschwindigkeitskomponenten seien bezeichnet

mit v in radialer	(R)	Richtung	positiv im selben Sinne wie die Kraftkomponenten;
„ w „ achsialer	(Z)	„	
„ u „ tangentialer	(U)	„	

p bezeichnet die Pressung an den Seitenflächen $abcd$, aba_1b_1, aca_1c_1.

Setzt man die Summe der Kraftkomponenten nach jeder der drei Richtungen gleich der Masse des Elementes multipliziert mit der betreffenden Beschleunigungskomponente, so erhält man

A) für die Z Richtung:

$$\frac{\gamma}{g}\,r\,d\varphi\,dr\,dz \cdot Z + \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\,dz\right)\right] r\,d\varphi \cdot dr = $$
$$= \frac{\gamma}{g}\,r\,d\varphi \cdot dr \cdot dz \cdot \frac{dw}{dt}$$

$$Z - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial z} = \frac{dw}{dt} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I}$$

B) für die R Richtung:

$$\frac{\gamma}{g}\,r\,d\varphi\,dr\,dz \cdot R + \left[p \cdot r \cdot d\varphi \cdot dr - \left(p + \frac{\partial p}{\partial r}\,dr\right)(r + dr)\,d\varphi\right] +$$
$$+ p\,dr\,dz\,d\varphi = \frac{\gamma}{g}\left[\frac{dv}{dt} - \frac{u^2}{r}\right]$$

$$R - \frac{g}{\gamma}\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{dv}{dt} - \frac{u^2}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{II}$$

Das Glied $p\,dr\,dz\,d\varphi$ rührt von den Pressungen auf die Seitenflächen $a\,b\,a_1\,b_1$ und $c\,d\,c_1\,d_1$ her, die unter dem Winkel $d\varphi$ wirkend, unter Vernachlässigung unendlich kleiner Grössen höherer Ordnung, in der r Richtung eine Kraft von der angegebenen Grösse ergeben.

Das Glied $-\frac{u^2}{r}$ entspricht der Zentripetalbeschleunigung des Massenelementes.

C) für die U Richtung:

$$\frac{\gamma}{g}\,r\,d\varphi\,dr\,dz \cdot U + \left[p - \left(p + \frac{\partial p}{\partial \varphi}\,d\varphi\right)\right] dr\,dz =$$
$$= \frac{\gamma}{g}\,(r\,d\varphi\,dr\,dz) \cdot \left(\frac{du}{dt} + \frac{uv}{r}\right)$$

$$U - \frac{g}{\gamma}\,\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{du}{dt} + \frac{uv}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{III}$$

Das Glied $\frac{uv}{r}$ entspricht dem Beschleunigungszuschuss in der U Richtung, der durch die Bogenkoordinate bedingt