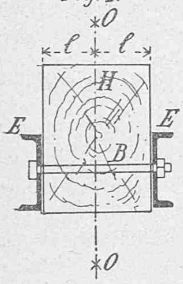
Ueber die Festigkeitsverhältnisse einer häufig angewendeten Bolzenverbindung.

Von Dr. *A. Föppl*, Ing.

Durch einen Specialfall wurde ich kürzlich veranlasst, die Festigkeitsverhältnisse einer Bolzenverbindung einer eingehenden Untersuchung zu unterziehen. Da die betreffende Verbindung in der Praxis nicht selten zur Anwendung gelangt, möge mir eine kurze Mittheilung über die dabei erlangten Resultate gestattet sein.

Fig. 1.



In Fig. 1 seien H ein Holzkörper, E und E' zwei Eisenlaschen von beliebigem Querschnitt (Flacheisen, L Eisen, [Eisen u. dgl.), die durch den Bolzen B mit dem Holzkörper verbunden sind und eine Kraft P auf denselben übertragen. Für meine heutige Mittheilung ist es völlig gleichgültig, wie die Construction im Uebrigen aussieht; ich habe die Figur deshalb auch nicht so gezeichnet, wie sie in dem betreffenden speciellen Falle aussah, sondern alles Unwesentliche daraus entfernt.

Gewöhnlich begnügt man sich in einem solchen Falle damit, den Bolzen auf Abscheeren zu berechnen. Wenn man noch etwas sorgfältiger verfahren will, berechnet man auch den Druck zwischen Bolzen und Lochwand in der Eisenlasche. Wird der Bolzendurchmesser mit d und die Stärke der Eisenlasche mit m bezeichnet, so erhält man (wie hier als bekannt vorausgesetzt werden soll) den grössten Druck p_{max} zwischen Bolzen und Eisenlasche aus der Formel

$$p_{max} = \frac{{}^1/_2\, P}{m \,.\, {}^1/_4\, d\pi} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

indem von jeder der beiden Laschen die Kraft $^1/_2\,P$ übertragen wird.

Der grösste Druck, welcher von dem Bolzen auf das Holz übertragen wird, scheint dagegen bisher nicht genauer berechnet worden zu sein. Dürfte man annehmen, dass sich der Bolzen nicht biegt, so könnte dieser grösste specifische Druck ebenfalls aus Gl. (1) bestimmt werden, wenn man darin $^1/_2\,P$ durch P und m durch die Länge $2\,l$ des Bolzens ersetzt. In Wirklichkeit wird er aber wegen der Biegung, welche der Bolzen erfährt, an den beiden Enden des Bohrloches ganz erheblich grösser. Die nachfolgende Rechnung zeigt, wie die Verhältnisse in dieser Hinsicht liegen.

Zuvor will ich noch erwähnen, dass die Kraftübertragung zwischen den Eisenlaschen E und dem Holzkörper H allerdings nicht ausschliesslich durch den Bolzen, sondern zum grossen Theile durch die Vermittelung der Reibung zwischen E und H stattfindet. Auf diesen günstigen Umstand darf man aber kein zu grosses Gewicht legen. In Folge der Erschütterungen denen jede Bauconstruction ausgesetzt ist, findet ein allmähliches Abrutschen statt, so dass zuletzt die Kraftübertragung doch nur (oder wenigstens vorwiegend) an den dauernd widerstandsfähigen Punkten vor sich geht.

Bezeichnet man mit K einen Coefficienten, über dessen Grösse späterhin Weiteres bemerkt werden wird, so hat man für das Biegungsmoment M des Bolzens in einem Abstande x von der Symmetrieachse desselben die Gleichung

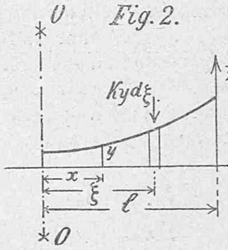
$$M = {}^1/_2\, P\,(l-x) - \int_x^l K y\, d\xi\, (\xi - x) \quad \ldots \quad (2)$$

Die Bezeichnungen erklären sich im Uebrigen aus Fig. 2, welche die Hälfte der elastischen Linie des gebogenen Bolzens darstellt. Die x-Achse fällt mit der ursprünglichen Lage der Bolzenachse und die y-Achse mit der Symmetrie-Achse OO zusammen. Durch zweimalige Differentiirung und Benützung der Gleichung $M = EJ\,\frac{d^2 y}{dx^2}$ erhält man aus (2)

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = -\frac{K}{EJ}\,.\,y \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

Das allgemeine Integral dieser Differentialgleichung vierter Ordnung lässt sich leicht angeben und es lässt sich auch ohne besondere Schwierigkeit den hier vorliegenden Grenzbedingungen anpassen. Um den Leser nicht durch diese etwas verwickelten Rechnungen zu ermüden, unterlasse ich es, den ganzen Rechnungsgang hier anzuschreiben. Ich bemerke nur, dass zur Bestimmung der vier Constanten des allgemeinen Integrals die Bedingungen zu beachten sind

Fig. 2.



1) für $x = 0$ ist $\frac{dy}{dx} = 0$, 2) für $-x$ wird y eben so gross als für $+x$, 3) für $x = l$ wird $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, 4) muss $\int_0^l K y\, dx = {}^1/_2\, P$ sein.

Die fertige Lösung lautet dann

$$y = \frac{P}{K\,.\,l} \cdot \frac{\lambda}{l^{2\lambda} - l^{-2\lambda} + 2 \sin 2\lambda} \left[\left(l^{\lambda \frac{l+x}{l}} + l^{-\lambda \frac{l+x}{l}} \right) \cos \lambda \frac{l-x}{l} + \left(l^{\lambda \frac{l-x}{l}} + l^{-\lambda \frac{l-x}{l}} \right) \cos \lambda \frac{l+x}{l} \right] \quad (4)$$

worin zur Abkürzung gesetzt ist

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K}{4} \cdot \frac{l^4}{EJ}} \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

Man kann sich nachträglich leicht davon überzeugen, dass die gegebene Lösung richtig ist, d. h. sowol der Gl. (3) als den erwähnten Grenzbedingungen genügt.

Von besonderem Interesse sind die Werthe y_0 und y_l, welche y für $x = 0$ bezw. für $x = l$ annimmt und der Durchschnittswerth y_m von y, d. h. jener Werth, um den sich der Bolzen in das Holz elastisch eindrücken würde, wenn er ein so grosses Trägheitsmoment hätte, dass er gar nicht (oder wenigstens nicht merklich) gebogen würde. Man erhält aus Gl. (4)

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= \frac{P}{Kl} \cdot \frac{2\lambda \left(l^{\lambda} + l^{-\lambda} \right) \cos \lambda}{l^{2\lambda} - l^{-2\lambda} + 2 \sin 2\lambda} \\ y_l &= \frac{P}{Kl} \cdot \lambda \frac{l^{2\lambda} + l^{-2\lambda} + 2 \cos 2\lambda}{l^{2\lambda} - l^{-2\lambda} + 2 \sin 2\lambda} \\ y_m &= \frac{P}{2Kl} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6)$$

Die Aufgabe wäre jetzt als vollständig gelöst zu betrachten, wenn der Coefficient K bekannt wäre. Ungefähr lässt sich die Grösse desselben aus der letzten der Gleichungen (6) bestimmen. Die genaue Berechnung von K aus dieser Gleichung ist freilich selbst eine sehr verwickelte Aufgabe. Da in dem Ausdrucke für λ der Coefficient K indessen nur unter dem vierten Wurzelzeichen vorkommt, lässt sich λ mit ziemlicher Annäherung berechnen, wenn auch K nur in sehr grober Annäherung bekannt ist. Selbst wenn z. B. K in Wirklichkeit vier Mal so gross wäre, als wir es zunächst schätzten, würde dadurch λ nur 1,41 Mal so gross werden, d. h. der Fehler würde immerhin nicht mehr als 41 % betragen.

Um zu einer blossen Schätzung des Werthes von K zu gelangen, vergleiche man den vorliegenden Fall mit einem andern. Es sei nämlich derselbe Druck P auf einen