

# Réseaux tracés sur une surface fermée bilatère

Autor(en): **Chuard, Jules**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mémoires de la Société Vaudoise des Sciences Naturelles**

Band (Jahr): **13 (1963)**

Heft 5

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-258312>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Réseaux tracés sur une surface fermée bilatère

PAR

JULES CHUARD

### INTRODUCTION

C'est la lecture du mémoire de O. VEBLEN (1912) qui nous a engagé à étudier la géométrie de situation. Nous en avons d'abord tiré l'objet de notre thèse de doctorat : « Questions d'Analysis Situs », ce qui nous a permis d'étudier les « homologues » de H. Poincaré et de montrer en particulier la différence qui existe entre les « homologues par division » et les « homologues sans division ». Nous avons alors abandonné les variétés unilatères pour ne plus nous préoccuper que des variétés bilatères. C'est ce qui nous a donné l'occasion de publier plusieurs études sur les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs.

Si maintenant nous revenons sur cette question, c'est qu'elle nous paraît suffisamment importante pour justifier une mise au point. Aussi, pour éviter toute équivoque, nous commençons par rappeler quelques définitions et principes qui ont servi de base à nos travaux.

\* \* \*

Une *arête* est un segment linéaire, droit ou courbe, peu importe. Elle est limitée à chacune de ses extrémités par un point appelé *sommet*. Nous admettons que les sommets ne font pas partie de l'arête qu'ils limitent. Si un point d'une arête devient un sommet, il en résulte deux arêtes distinctes.

Tout ensemble d'arêtes en nombre fini, tel qu'un point de l'une n'appartienne pas à une autre arête de l'ensemble, constitue un *réseau*. Le réseau a parfois pris le nom de configuration linéaire. Dans les réseaux que nous examinerons les deux sommets qui limitent une arête ne seront jamais confondus. Nous convenons de désigner par  $\alpha_0$  le nombre des sommets d'un réseau et par  $\alpha_1$  celui de ses arêtes.

On entend par *degré* d'un sommet le nombre des arêtes du réseau qui aboutissent à ce sommet. Un sommet de degré 1 est dit *sommet libre*. Il est de *liaison* lorsque son degré est supérieur à 1. Nous désignerons volontiers dans la suite sous le nom de *bifurcation* un sommet de liaison de degré 3.

Si tous les sommets d'un réseau ont le même degré, le *réseau* est dit *homogène*.

Un *réseau* homogène du premier degré est appelé *linéaire*. Il ne renferme que des sommets libres. Il est représenté par des arêtes isolées. Puisque chaque arête est limitée par deux sommets, on a l'égalité

$$\alpha_0 = 2 \alpha_1.$$

Un *réseau* homogène du second degré est un *réseau quadratique*. Chacun de ses sommets sert de liaison à deux arêtes du réseau. Celui-ci comporte donc un, ou plusieurs contours fermés isolés les uns des autres. Dans ce cas on a :

$$\alpha_0 = \alpha_1.$$

Un *réseau* homogène du troisième degré est un *réseau cubique*. Chacun de ses sommets est une bifurcation. Il s'en suit que :

$$3 \alpha_0 = 2 \alpha_1.$$

Un *réseau* est dit *connexe* si, étant donnés deux sommets quelconques de celui-ci, il existe un certain nombre d'arêtes du réseau telles que l'on puisse en suivant ces arêtes passer de l'un de ces sommets à l'autre. Si cette opération n'est pas toujours possible, le réseau n'est pas connexe. Un réseau linéaire n'est jamais connexe. Un réseau quadratique composé de plus d'un contour fermé ne l'est pas non plus.

PETERSEN<sup>1</sup> désigne sous le nom de *feuille* la partie d'un réseau qui est maintenue en connexion avec l'ensemble par une arête unique à laquelle il a donné le nom d'*isthme*. Il a en outre démon-

<sup>1</sup> (2) V. A. ERRERA (1921), p. 13.

tré le théorème suivant auquel on a donné son nom : *Un réseau cubique irréductible possède au moins trois feuilles.*

Constatons d'emblée que si un réseau cubique est réductible il donne naissance, cela de diverses façons, à un réseau linéaire et à un réseau quadratique, chacun d'eux empruntant la totalité des sommets du réseau cubique donné.

Les réseaux cubiques que nous nous proposons d'examiner seront sans isthmes et par conséquent sans feuilles. Il s'en suit qu'ils seront toujours réductibles.

Rappelons encore les notions qui suivent dont nous ferons un usage constant.

Un *contour fermé* est un réseau quadratique connexe. Il comprend au minimum deux arêtes.

Si d'un contour fermé on supprime une, ou plusieurs arêtes en connexion les unes avec les autres, on obtient un *contour ouvert*. Un contour ouvert de  $n - 1$  arêtes comprend  $n$  sommets.

Un *arbre linéaire*, parfois simplement désigné sous le nom d'*arbre*, est un réseau connexe qui ne renferme aucun contour fermé. Un arbre de  $n - 1$  arêtes comprend  $n$  sommets. Ces  $n - 1$  arêtes constituent le nombre minimum d'arêtes qui permettent de relier entre eux les  $n$  sommets envisagés. Un contour ouvert est ainsi un arbre d'une forme particulière. Le théorème suivant est connu :

*Il est possible de transformer en un arbre un réseau connexe de  $\alpha_0$  sommets et de  $\alpha_1$  arêtes par la suppression de  $\mu$  arêtes convenablement choisies.*

$$\mu = \alpha_1 - \alpha_0 + 1.$$

Un *contour bouclé* résulte de l'association d'un contour fermé et d'un arbre (voire de plusieurs) à la condition que cette association ne crée pas un second contour fermé. Un contour bouclé a un nombre égal d'arêtes et de sommets.

## PREMIÈRE PARTIE

## LA MATRICE A.

Avec O. VEBLEN (1912) nous caractérisons un réseau à l'aide d'une matrice que nous dénommons : *la matrice A*. A cet effet nous numérotons dans un ordre arbitraire les sommets

$$a^0_1, a^0_2, \dots, a^0_i, \dots, a^0_{\alpha_0}.$$

puis les arêtes du réseau donné

$$a^1_1, a^1_2, \dots, a^1_j, \dots, a^1_{\alpha_1}.$$

Nous introduisons alors un nombre à deux indices  $\eta^1_{ij}$  qui est égal à 1 si le sommet  $a^0_i$  limite l'arête  $a^1_j$ , qui est nul dans tous les autres cas. Nous disposons ces nombres  $\eta^1_{ij}$  en un tableau rectangulaire de  $\alpha_0$  lignes et de  $\alpha_1$  colonnes. Ce tableau est la *matrice A*. Chacune de ses lignes se rapporte à un sommet et chacune de ses colonnes à une arête du réseau. Du moment qu'une arête est limitée par deux sommets distincts, une colonne de la matrice A ne renferme que deux nombres égaux à 1. Dans une ligne par contre il y en a un nombre égal au degré du sommet correspondant.

Un déterminant est extrait de la matrice A s'il est formé de lignes et de colonnes, partielles ou complètes, issues de cette matrice. La recherche de la valeur d'un déterminant oblige souvent à faire des combinaisons linéaires de ses lignes ou de ses colonnes. Ces opérations sont toujours réduites selon le module 2. Il s'en suit que pour les additions on a

$$1 + 1 = 0 \quad 1 + 0 = 0 + 1 = 1 \quad 0 + 0 = 0$$

et pour les multiplications

$$1.1 = 1 \quad 1.0 = 0.1 = 0 \quad 0.0 = 0$$

Ainsi donc nous ne travaillons qu'avec les nombres 0 et 1. Un déterminant ne peut avoir que les valeurs 0 ou 1.

Le plus grand déterminant extrait de la matrice A qui n'est pas nul, fixe le *rang* de cette matrice.

Un déterminant qui correspond à un contour fermé ou bouclé est nul.

Dans le cas d'un arbre ou d'un contour ouvert, il y a un sommet de plus que d'arêtes. On revient à l'égalité, sans supprimer la con-

nexion de l'ensemble, en faisant abstraction d'un sommet libre. Le déterminant correspondant est égal à 1.

Le rang de la *matrice* A d'un réseau connexe de  $\alpha_0$  sommets est égal à  $\alpha_0 - 1$ .

VEBLEN a imaginé d'associer à chaque ligne de la matrice A une équation linéaire et homogène. Rappelons que la ligne de rang  $i$  de cette matrice comprend les nombres

$$\eta^{1i_1}, \eta^{1i_2}, \dots, \eta^{1i_{\alpha_1}}$$

Nous envisageons  $\alpha_1$  inconnues  $x_j$  et écrivons

$$(1) \quad \eta^{1i_1} x_1 + \eta^{1i_2} x_2 + \dots + \eta^{1i_{\alpha_1}} x_{\alpha_1} = 0 \pmod{2} \\ (i = 1, 2, \dots, \alpha_0).$$

Les  $\alpha_0$  équations ci-dessus constituent un système de  $\alpha_0$  équations linéaires et homogènes à  $\alpha_1$  inconnues que nous appellerons le *système (1)*. Chaque inconnue  $x_j$  est liée à l'arête  $a^1_j$ . Si  $x_j = 1$  cela signifie que l'arête  $a^1_j$  est retenue. Dans le cas contraire, cette arête est momentanément omise. On fait donc abstraction des arêtes marquées d'un 0 pour ne retenir que celles qui sont désignées par 1.

Il va de soi que le rang du système (1) est celui de la matrice de ses coefficients, soit  $\alpha_0 - 1$ .

Résoudre le système (1) c'est rechercher la valeur de  $\alpha_0 - 1$  de ses inconnues en fonction des autres ou si l'on préfère c'est rechercher un *système fondamental de solutions*.

A cet effet on abandonne une des lignes du système (1) et fait en sorte que le déterminant des  $\alpha_0 - 1$  premiers coefficients des inconnues du système restant soit différent de zéro. On isole ainsi les  $\alpha_0 - 1$  premières inconnues et en donnant la valeur 1 aux autres, on forme une matrice de solutions à laquelle on peut donner le nom de *matrice fondamentale des solutions du système (1)*. Cela signifie que cette matrice permet d'obtenir toutes les solutions du système (1). Il ne faut pas oublier que toutes les opérations sont faites selon le (mod. 2) et que par suite l'ensemble des solutions du système (1) en comprend  $2^\mu - 1$ . Or on constate bien vite que chacune d'elles correspond à un contour fermé (voire plusieurs) constitué par des arêtes du réseau donné.

Il va de soi que pour un système d'équations (1) déterminé, il n'y a pas qu'une matrice fondamentale de solutions. Tout ensemble de  $\mu$  solutions linéairement indépendantes donne lieu à une matrice fondamentale de solutions. Nous aurons l'occasion d'y revenir.

## CONFIGURATIONS SUPERFICIELLES.

Jusqu'ici nous avons examiné quelques propriétés des réseaux envisagés comme systèmes de lignes, indépendamment des surfaces sur lesquelles ils peuvent être tracés. La nature de la surface qui supporte un réseau ne saurait cependant demeurer indifférente aux propriétés de ce dernier. En effet tel réseau que l'on rencontre sur une surface d'un certain genre ne se retrouve pas sur une surface d'un autre genre. Il y a donc un réel intérêt à étudier les propriétés d'un réseau en rapport avec celles de la surface qui le supporte. Nous considérerons dans la suite des surfaces fermées bilatères telles que la sphère, le tore, le tore à deux trous, ... Un réseau tracé sur l'une d'elles transforme la surface en un *polyèdre*. On voit ainsi apparaître des faces. Peu importe si ces faces sont planes ou gauches.

Une *face* est toujours, pour nous, simplement connexe. Elle est limitée par un contour fermé unique, sa frontière, qui comprend au minimum deux arêtes. Si l'on considère une face isolément, nous dirons que les arêtes de sa frontière sont de degré 1. Ce sont des *arêtes libres*.

Si deux faces sont en connexion le long d'une arête commune, celle-ci est une *arête de liaison*, soit de degré 2. Les autres arêtes de l'une ou de l'autre de ces faces sont demeurées des arêtes libres. Dans cette étude il ne sera fait état que d'arêtes de liaison de degré 2.

Une *configuration superficielle* est dite *connexe* si, étant données deux faces quelconques de la configuration, il existe des faces soudées entre elles par des arêtes de liaison telles que l'on puisse en se déplaçant sur ces faces et en traversant les arêtes de liaison passer de l'une à l'autre.

La connexion d'une configuration superficielle est différente de celle d'un réseau. Nous avons en effet montré qu'un réseau peut être connexe sans que la configuration superficielle à laquelle il sert de frontière le soit (CHUARD, 1932, p. 59).

Voici quelques définitions qui nous seront utiles.

Une *chaîne fermée* est un ensemble de faces tel que chacune d'elles soit contiguë à deux faces de l'ensemble et à deux seulement. Si une chaîne fermée comprend  $n$  faces, elle comprend également  $n$  arêtes de liaison. Les autres arêtes des frontières de ces faces sont des arêtes libres; elles forment deux contours fermés.

Un *nœud superficiel* est une chaîne fermée d'un type spécial. Toutes ses arêtes de liaison convergent en un même sommet. La frontière d'un nœud superficiel ne comporte qu'un contour fermé.

Si d'une chaîne fermée ou d'un nœud superficiel on supprime une ou plusieurs faces qui sont soudées entre elles, on forme une *chaîne ouverte*. Dans une chaîne ouverte de  $n$  faces on ne compte que  $n - 1$  arêtes de liaison. La frontière d'une chaîne ouverte ne comporte qu'un seul contour fermé.

Un *arbre superficiel* est une configuration superficielle connexe qui ne renferme ni nœud superficiel, ni chaîne fermée. Les  $n$  faces d'un arbre superficiel sont maintenues en connexion par  $n - 1$  arêtes de liaison. La frontière d'un arbre superficiel ne comporte qu'un seul contour fermé. Une chaîne ouverte est un arbre superficiel d'une forme particulière.

Une *chaîne bouclée* résulte de la soudure d'une chaîne fermée et d'un ou de plusieurs arbres superficiels à la condition que cette soudure n'entraîne pas la formation d'une nouvelle chaîne fermée. Une chaîne bouclée a le même nombre d'arêtes de liaison que de faces.

Un *nœud bouclé* se définit de la même manière.

#### LA MATRICE B.

Nous sommes maintenant en présence d'un polyèdre, tel qu'il a été défini plus haut, qui comprend  $\alpha_0$  sommets,  $\alpha_1$  arêtes et  $\alpha_2$  faces. A l'aide des sommets et des arêtes de ce polyèdre, nous avons dressé la matrice A. Nous allons dresser de la même façon la matrice B à l'aide des arêtes et des faces. Pour cela nous introduisons des nombres  $\eta^2_{jk}$  qui seront égaux à 1 si l'arête  $a^1_j$  fait partie de la frontière de la face  $a^2_k$ , sinon ils seront nuls. Ces nombres seront répartis dans un tableau rectangulaire de  $\alpha_1$  lignes et de  $\alpha_2$  colonnes, chaque ligne se rapportant à une arête et chaque colonne à une face du polyèdre. Telle est la *matrice B*.

Sans qu'il soit nécessaire de nous étendre sur les avantages que présente la matrice B, on peut faire les constatations suivantes :

Du moment qu'une arête de liaison est adjacente à deux faces du polyèdre, et à deux seulement, chaque ligne de la matrice B renferme deux termes égaux à 1, tous les autres étant nuls.

Dans chaque colonne les seuls termes qui ne sont pas nuls sont ceux qui correspondent aux arêtes faisant partie de la frontière de la face correspondante. Or ces arêtes constituent un contour fermé.

N'oublions pas que toutes les opérations de calcul se font selon le (mod. 2). Il s'en suit que la valeur de tout déterminant extrait de la matrice B est égale à zéro ou à 1.

En vertu de ce qui précède (deux termes égaux à 1 dans chaque ligne), tout déterminant de  $\alpha_2$  lignes et de  $\alpha_2$  colonnes extrait de la matrice B est nul. Le rang de la matrice B est donc inférieur à  $\alpha_2$ .

Une chaîne fermée ou bouclée, un nœud superficiel simple ou bouclé renferment le même nombre de faces et d'arêtes de liaison. Tout déterminant extrait de la matrice B dont les lignes et les colonnes correspondent à ces arêtes de liaison et à ces faces est nul.

Dans un arbre superficiel ou une chaîne ouverte, le nombre des arêtes de liaison est inférieur d'une unité à celui des faces. Pour obtenir l'égalité on fait abstraction de l'une des faces soudée à l'ensemble par une seule arête de liaison (ce qui est toujours possible) afin de ne pas détruire la connexion de la configuration superficielle considérée. L'arête de liaison qui devient ainsi libre est cependant considérée comme une arête de liaison non utilisée. Le déterminant correspondant est alors égal à 1.

Il est possible de transformer le polyèdre donné, qui comprend  $\alpha_2$  faces, en un arbre superficiel comportant toujours ces  $\alpha_2$  faces (sous la réserve exprimée ci-dessus) reliées les unes aux autres par  $\alpha_2 - 1$  arêtes de liaison, en supprimant  $\alpha_1 - \alpha_2 + 1$  arêtes convenablement choisies. Le déterminant correspondant aux éléments de cet arbre superficiel étant égal à 1, il s'en suit que le rang de la matrice B est aussi égal à  $\alpha_2 - 1$ .

Nous avons indiqué un moyen de résoudre le système d'équations (1) issu de la matrice A et avons constaté que toutes les solutions de ce système résultent d'une matrice de solutions M à laquelle nous avons donné le nom de *matrice fondamentale de solutions du système* (1). De plus chaque solution caractérise un ou plusieurs contours fermés constitués par des arêtes du réseau donné. Or chaque colonne de la matrice B définit la frontière d'une face du polyèdre, autrement dit un contour fermé. Elle représente donc une solution du système (1). Et comme le rang de la matrice B est égal à  $\alpha_2 - 1$ , il s'en suit que  $\alpha_2 - 1$  colonnes de cette matrice caractériseront des solutions linéairement indépendantes du système (1). Ces colonnes pourront donc être utilisées dans la confection d'une matrice fondamentale de solutions. Cette dernière matrice sera désignée dorénavant par le symbole M'.

Imaginons maintenant que le réseau considéré soit tracé sur une sphère. En vertu du théorème d'Euler on pourra écrire

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = 2$$

ce qui conduit à

$$\alpha_1 - \alpha_0 + 1 = \alpha_2 - 1 = \mu.$$

Cela montre que pour la sphère, et pour la sphère seulement, on obtiendra une matrice fondamentale de solutions du système (1) M' en utilisant  $\alpha_2 - 1$  colonnes de la matrice B. Ainsi il ne sera plus nécessaire de résoudre ce système d'équations suivant la méthode indiquée, la connaissance de la matrice B suffira.

## RÉSEAUX TRACÉS SUR UNE SPHÈRE.

*Exemple 1.* Le réseau que nous envisageons ici (fig. 1) comprend 8 sommets, 12 arêtes et 6 faces.

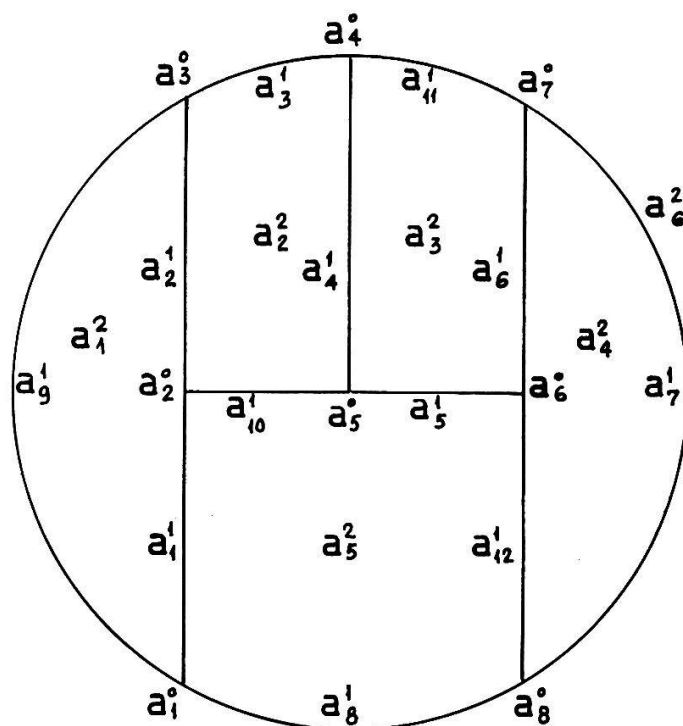


FIG. 1.

Pour étudier cet exemple, nous suivons exactement la méthode qui vient d'être exposée. Nous dressons la matrice  $A$  qui permet d'établir le système d'équations (1). Nous résolvons ce système d'équations et obtenons une matrice fondamentale de solutions  $M$ . Les colonnes de cette dernière sont désignées par les symboles  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$ . Nous dressons ensuite la matrice  $B$  qui renferme 6 colonnes dont les 5 premières constitueront la matrice  $M'$ .

 MATRICE  $A$ 

|         | $a_1^1$ | $a_2^1$ | $a_3^1$ | $a_4^1$ | $a_5^1$ | $a_6^1$ | $a_7^1$ | $a_8^1$ | $a_9^1$ | $a_{10}^1$ | $a_{11}^1$ | $a_{12}^1$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|
| $a_1^0$ | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0          | 0          | 0          |
| $a_2^0$ | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1          | 0          | 0          |
| $a_3^0$ | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 0          | 0          | 0          |
| $a_4^0$ | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0          | 1          | 0          |
| $a_5^0$ | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1          | 0          | 0          |
| $a_6^0$ | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0          | 0          | 1          |
| $a_7^0$ | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0          | 1          | 0          |
| $a_8^0$ | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0          | 0          | 1          |

## SYSTÈME (1)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_8 + x_9 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_{10} = 0 \\ x_2 + x_3 + x_9 = 0 \\ x_2 + x_4 + x_{11} = 0 \\ x_4 + x_5 + x_{10} = 0 \\ x_5 + x_6 + x_{12} = 0 \\ x_6 + x_7 + x_{11} = 0 \\ x_7 + x_8 + x_{12} = 0 \end{array} \right. \\
 (2) \quad & \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_8 + x_9 \\ x_2 = x_8 + x_9 + x_{10} \\ x_3 = x_8 + x_{10} \\ x_4 = x_8 + x_{10} + x_{11} \\ x_5 = x_8 + x_{11} \\ x_6 = x_8 + x_{11} + x_{12} \\ x_7 = x_8 + x_{12} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

## MATRICE M

|            | C <sub>1</sub> | C <sub>2</sub> | C <sub>3</sub> | C <sub>4</sub> | C <sub>5</sub> |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $a^1_1$    | 1              | 1              | 0              | 0              | 0              |
| $a^1_2$    | 1              | 1              | 1              | 0              | 0              |
| $a^1_3$    | 1              | 0              | 1              | 0              | 0              |
| $a^1_4$    | 1              | 0              | 1              | 1              | 0              |
| $a^1_5$    | 1              | 0              | 0              | 1              | 0              |
| $a^1_6$    | 1              | 0              | 0              | 1              | 1              |
| $a^1_7$    | 1              | 0              | 0              | 0              | 1              |
| $a^1_8$    | 1              | 0              | 0              | 0              | 0              |
| $a^1_9$    | 0              | 1              | 0              | 0              | 0              |
| $a^1_{10}$ | 0              | 0              | 1              | 0              | 0              |
| $a^1_{11}$ | 0              | 0              | 0              | 1              | 0              |
| $a^1_{12}$ | 0              | 0              | 0              | 0              | 1              |

## MATRICE B

| $a^2_1$ | $a^2_2$ | $a^2_3$ | $a^2_4$ | $a^2_5$ | $a^2_6$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1       | 0       | 0       | 0       | 1       | 0       |
| 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| 0       | 1       | 0       | 0       | 0       | 1       |
| 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       |
| 0       | 0       | 1       | 0       | 1       | 0       |
| 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       |
| 0       | 0       | 0       | 1       | 0       | 1       |
| 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       |
| 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       |
| 0       | 1       | 0       | 0       | 1       | 0       |
| 0       | 0       | 1       | 0       | 0       | 1       |
| 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       |

La matrice M' est constituée par les 5 premières colonnes de la matrice B. C'est cette matrice M' que nous avons utilisée pour obtenir l'ensemble des 31 solutions ( $2^5 - 1$ ) que comporte le système (1). Nous en avons dressé le tableau D en notant au bas de chaque colonne le nombre d'arêtes que compte la solution correspondante.

*Exemple 2.* Ce réseau (fig. 2) comprend 10 sommets, 15 arêtes et 7 faces. Nous avons dressé la matrice A de laquelle nous avons tiré le système d'équations (1). Ce système a été résolu, ce qui nous a conduit à la matrice M. Nous avons donné ensuite la matrice B dont 6 colonnes (par exemple les six premières) constituent une matrice M' qui peut parfaitement remplacer la matrice M.

Le système (1) a donc 6 solutions linéairement indépendantes et en tout  $2^6 - 1$  solutions. Pour les obtenir, il est indiqué d'utiliser

TABLEAU DE L'ENSEMBLE DES SOLUTIONS DU SYSTÈME (1)

(\*) Nombre d'arêtes que comporte chaque solution.

## MATRICE A

|            | $a^1_1$ | $a^1_2$ | $a^1_3$ | $a^1_4$ | $a^1_5$ | $a^1_6$ | $a^1_7$ | $a^1_8$ | $a^1_9$ | $a^1_{10}$ | $a^1_{11}$ | $a^1_{12}$ | $a^1_{13}$ | $a^1_{14}$ | $a^1_{15}$ |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| $a^0_1$    | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0          | 0          | 0          | 0          | 1          | 1          |
| $a^0_2$    | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| $a^0_3$    | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0          | 0          | 1          | 0          | 0          | 0          |
| $a^0_4$    | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0          | 0          | 1          | 0          | 0          | 0          |
| $a^0_5$    | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0          | 0          | 0          | 0          | 1          | 0          |
| $a^0_6$    | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0          | 0          | 0          | 1          | 0          | 0          |
| $a^0_7$    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0          | 0          | 0          | 1          | 0          | 0          |
| $a^0_8$    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0          | 0          | 0          | 0          | 0          | 1          |
| $a^0_9$    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0          | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          |
| $a^0_{10}$ | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1          | 1          | 0          | 0          | 0          | 0          |

## SYSTÈME D'ÉQUATIONS (1)

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_{14} + x_{15} = 0 \\ x_1 + x_2 + x_{10} = 0 \\ x_2 + x_3 + x_{12} = 0 \\ x_3 + x_4 + x_{12} = 0 \\ x_4 + x_5 + x_{14} = 0 \\ x_5 + x_6 + x_{15} = 0 \\ x_6 + x_7 + x_{13} = 0 \\ x_7 + x_8 + x_{15} = 0 \\ x_8 + x_9 + x_{11} = 0 \\ x_9 + x_{10} + x_{11} = 0 \end{array} \right.$$

## MATRICE M

|            | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_6$ |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $a^1_1$    | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     |
| $a^1_2$    | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     |
| $a^1_3$    | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 1     |
| $a^1_4$    | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     |
| $a^1_5$    | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     |
| $a^1_6$    | 1     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     |
| $a^1_7$    | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     |
| $a^1_8$    | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $a^1_9$    | 1     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $a^1_{10}$ | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $a^1_{11}$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $a^1_{12}$ | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     |
| $a^1_{13}$ | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     |
| $a^1_{14}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     |
| $a^1_{15}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     |

## MATRICE B

|            | $a^2_1$ | $a^2_2$ | $a^2_3$ | $a^2_4$ | $a^2_5$ | $a^2_6$ | $a^2_7$ |
|------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $a^1_1$    | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $a^1_2$    | 0       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       |
| $a^1_3$    | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 0       | 1       |
| $a^1_4$    | 0       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       |
| $a^1_5$    | 0       | 0       | 1       | 0       | 0       | 0       | 1       |
| $a^1_6$    | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       |
| $a^1_7$    | 0       | 0       | 1       | 0       | 0       | 0       | 1       |
| $a^1_8$    | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       |
| $a^1_9$    | 0       | 0       | 0       | 1       | 0       | 0       | 1       |
| $a^1_{10}$ | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       |
| $a^1_{11}$ | 1       | 0       | 0       | 1       | 0       | 0       | 0       |
| $a^1_{12}$ | 0       | 1       | 0       | 0       | 1       | 0       | 0       |
| $a^1_{13}$ | 0       | 0       | 1       | 0       | 0       | 1       | 0       |
| $a^1_{14}$ | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       |
| $a^1_{15}$ | 1       | 0       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       |

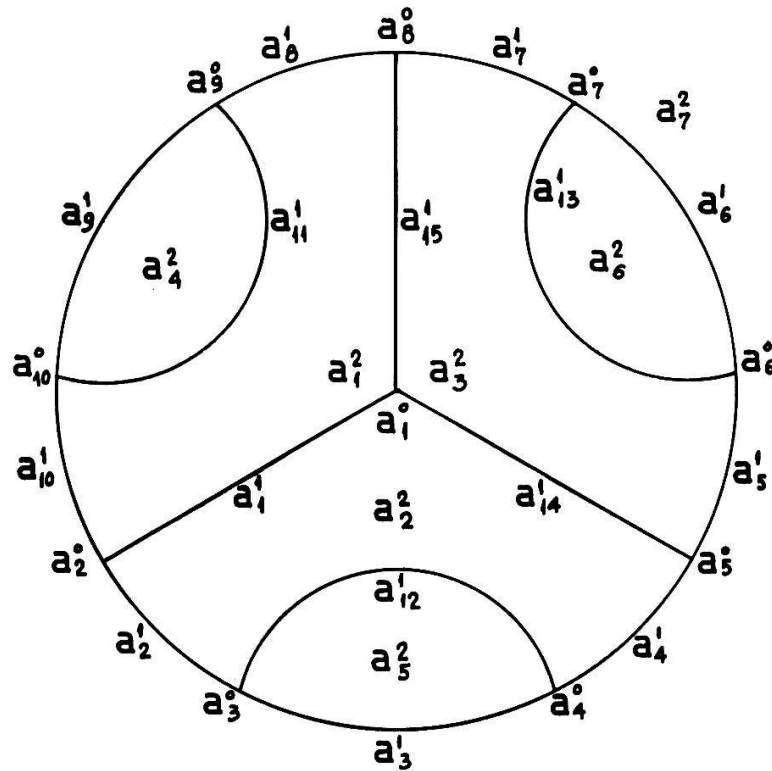


FIG. 2.

la matrice  $M'$ . Nous n'avons pas jugé à propos de publier le tableau D de cet ensemble de solutions. Rappelons simplement qu'il comprend 3 solutions de 2 arêtes, 3 de 4 arêtes, 6 de 5 arêtes, 1 de 6 arêtes, 12 de 7 arêtes, 12 de 8 arêtes, 14 de 9 arêtes et 12 de 10 arêtes.

#### RÉSEAU TRACÉ SUR UN TORE.

Ce réseau (fig. 3) comporte 4 sommets, 8 arêtes et 4 faces. Dans la fig. 3 nous admettons que la face  $a_3^2$  est située exactement sous la face  $a_1^2$  et la face  $a_4^2$  sous  $a_2^2$ . Nous agissons comme précédemment en dressant la matrice A puis en résolvant le système d'équations (1) qui en est issu. Ce système comprend 4 équations à 8 inconnues, mais comme le rang de la matrice A est égal à 3, il s'en suit que la matrice M comportera 5 colonnes.

La matrice B renferme 4 colonnes, mais comme son rang est égal à 3, 3 seulement d'entre elles caractériseront des solutions linéairement indépendantes du système (1). Elles ne suffiront pas pour former une matrice  $M'$ . Cette dernière comprendra nécessairement 2 colonnes de la matrice M. C'est ce qui permet de conclure que si sur la sphère tout contour fermé délimite une certaine aire composée d'une ou de plusieurs faces du polyèdre envisagé, sur le tore il y a des contours fermés qui ne limitent pas d'aire, fait qui est d'ailleurs parfaitement connu.

## MATRICE A.

|         | $a^1_1$ | $a^1_2$ | $a^1_3$ | $a^1_4$ | $a^1_5$ | $a^1_6$ | $a^1_7$ | $a^1_8$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| $a^0_1$ | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 1       |
| $a^0_2$ | 1       | 1       | 0       | 0       | 1       | 1       | 1       | 0       |
| $a^0_3$ | 0       | 1       | 1       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       |
| $a^0_4$ | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 1       | 1       |

## SYSTÈME (1)

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_6 + x_7 + x_8 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_7 + x_8 = 0 \end{array} \right. \quad (2) \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_6 + x_7 + x_8 \\ x_2 = x_5 + x_7 + x_8 \\ x_3 = x_4 + x_7 + x_8 \end{array} \right.$$

## MATRICE M

|         | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $a^1_1$ | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     |
| $a^1_2$ | 0     | 1     | 0     | 1     | 1     |
| $a^1_3$ | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     |
| $a^1_4$ | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $a^1_5$ | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     |
| $a^1_6$ | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     |
| $a^1_7$ | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     |
| $a^1_8$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     |

## MATRICE B

|         | $a^2_1$ | $a^2_2$ | $a^2_3$ | $a^2_4$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|
| $a^1_1$ | 1       | 1       | 0       | 0       |
| $a^1_2$ | 1       | 0       | 1       | 0       |
| $a^1_3$ | 1       | 1       | 0       | 0       |
| $a^1_4$ | 0       | 0       | 1       | 1       |
| $a^1_5$ | 0       | 1       | 0       | 1       |
| $a^1_6$ | 0       | 0       | 1       | 1       |
| $a^1_7$ | 0       | 1       | 0       | 1       |
| $a^1_8$ | 1       | 0       | 1       | 0       |

## MATRICE M'

|         | $C_1$ | $C_2$ | $a^2_1$ | $a^2_2$ | $a^2_3$ |
|---------|-------|-------|---------|---------|---------|
| $a^1_1$ | 0     | 0     | 1       | 1       | 0       |
| $a^1_2$ | 0     | 1     | 1       | 0       | 1       |
| $a^1_3$ | 1     | 0     | 1       | 1       | 0       |
| $a^1_4$ | 1     | 0     | 0       | 0       | 1       |
| $a^1_5$ | 0     | 1     | 0       | 1       | 0       |
| $a^1_6$ | 0     | 0     | 0       | 0       | 1       |
| $a^1_7$ | 0     | 0     | 0       | 1       | 0       |
| $a^1_8$ | 0     | 0     | 1       | 0       | 0       |

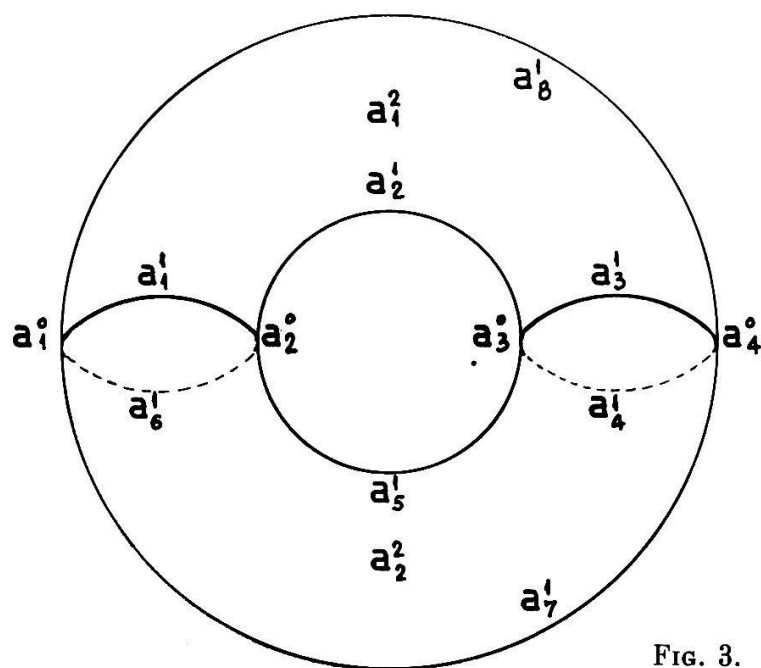


FIG. 3.

## LE TORE A DEUX TROUS

Nous envisageons ici (fig. 4) un réseau tracé sur un tore (ou coussin) à deux trous qui comprend : 6 sommets, 12 arêtes et 4 faces. Sur le dessin la face  $a^2_3$  est située sous la face  $a^2_1$  et la face  $a^2_4$  sous la face  $a^2_2$ .

Les opérations à effectuer sont identiques aux précédentes. De la matrice A on déduit le système d'équations (1) que l'on résout. Puis on dresse la matrice B. Il faut remarquer que le rang de chacune des matrices A et B est égal à 3. Le système d'équations (1) comporte 6 équations à 12 inconnues, mais comme 5 seulement de ces équations sont linéairement indépendantes, la matrice M des solutions de ce système comprendra 7 colonnes qui seront désignées par les lettres  $C_1, C_2, \dots, C_7$ . Les colonnes de la matrice B ne donneront que 3 solutions linéairement indépendantes. Il s'en suit que pour former une matrice M' à l'aide de ces 3 colonnes on se verra dans l'obligation de conserver 4 colonnes de la matrice M. Il en serait d'ailleurs de même quelque soit le réseau qui affecterait la même surface.

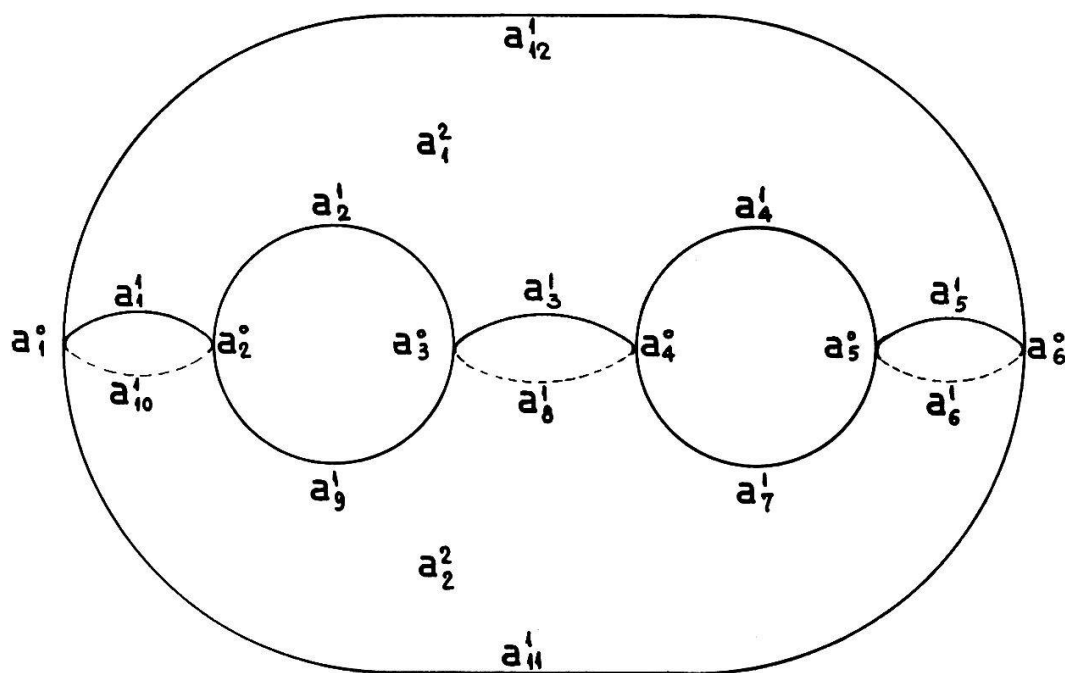


FIG. 4.

## MATRICE A

|         | $a^1_1$ | $a^1_2$ | $a^1_3$ | $a^1_4$ | $a^1_5$ | $a^1_6$ | $a^1_7$ | $a^1_8$ | $a^1_9$ | $a^1_{10}$ | $a^1_{11}$ | $a^1_{12}$ |
|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|------------|------------|------------|
| $a^0_1$ | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1          | 1          | 1          |
| $a^0_2$ | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1          | 0          | 0          |
| $a^0_3$ | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0          | 0          | 0          |
| $a^0_4$ | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0          | 0          | 0          |
| $a^0_5$ | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0          | 0          | 0          |
| $a^0_6$ | 0       | 0       | 0       | 0       | 1       | 1       | 0       | 0       | 0       | 0          | 1          | 1          |

## SYSTÈME (1)

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_{10} + x_{11} + x_{12} = 0 \\ x_1 + x_2 + x_9 + x_{10} = 0 \\ x_2 + x_3 + x_8 + x_9 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_7 + x_8 = 0 \\ x_4 + x_5 + x_6 + x_7 = 0 \\ x_5 + x_6 + x_{11} + x_{12} = 0 \end{array} \right.$$

## MATRICE M

|            | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $C_5$ | $C_6$ | $C_7$ |
|------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $a^1_1$    | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     |
| $a^1_2$    | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 1     | 1     |
| $a^1_3$    | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     |
| $a^1_4$    | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     |
| $a^1_5$    | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     |
| $a^1_6$    | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $a^1_7$    | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $a^1_8$    | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     | 0     |
| $a^1_9$    | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     | 0     |
| $a^1_{10}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     | 0     |
| $a^1_{11}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 0     |
| $a^1_{12}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     |

## MATRICE B

|            | $a^2_1$ | $a^2_2$ | $a^2_3$ | $a^2_4$ |
|------------|---------|---------|---------|---------|
| $a^1_1$    | 1       | 1       | 0       | 0       |
| $a^1_2$    | 1       | 0       | 1       | 0       |
| $a^1_3$    | 1       | 1       | 0       | 0       |
| $a^1_4$    | 1       | 0       | 1       | 0       |
| $a^1_5$    | 1       | 1       | 0       | 0       |
| $a^1_6$    | 0       | 0       | 1       | 1       |
| $a^1_7$    | 0       | 1       | 0       | 1       |
| $a^1_8$    | 0       | 0       | 1       | 1       |
| $a^1_9$    | 0       | 1       | 0       | 1       |
| $a^1_{10}$ | 0       | 0       | 1       | 1       |
| $a^1_{11}$ | 0       | 1       | 0       | 1       |
| $a^1_{12}$ | 1       | 0       | 1       | 0       |

MATRICE  $M'$

|            | $C_1$ | $C_2$ | $C_3$ | $C_4$ | $a^2_1$ | $a^2_2$ | $a^2_3$ |
|------------|-------|-------|-------|-------|---------|---------|---------|
| $a^1_1$    | 0     | 0     | 0     | 0     | 1       | 1       | 0       |
| $a^1_2$    | 0     | 0     | 0     | 1     | 1       | 0       | 1       |
| $a^1_3$    | 0     | 0     | 1     | 0     | 1       | 1       | 0       |
| $a^1_4$    | 0     | 1     | 0     | 0     | 1       | 0       | 1       |
| $a^1_5$    | 1     | 0     | 0     | 0     | 1       | 1       | 0       |
| $a^1_6$    | 1     | 0     | 0     | 0     | 0       | 0       | 1       |
| $a^1_7$    | 0     | 1     | 0     | 0     | 0       | 1       | 0       |
| $a^1_8$    | 0     | 0     | 1     | 0     | 0       | 0       | 1       |
| $a^1_9$    | 0     | 0     | 0     | 1     | 0       | 1       | 0       |
| $a^1_{10}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0       | 0       | 1       |
| $a^1_{11}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 0       | 1       | 0       |
| $a^1_{12}$ | 0     | 0     | 0     | 0     | 1       | 0       | 1       |

Les remarques que nous avons faites à propos du tore en ce qui concerne la matrice  $M'$  se retrouvent ici avec encore plus de pertinence. On ne peut pas obtenir une matrice fondamentale de solutions du système (1) sans résoudre ce dernier. Une matrice  $M'$  comprenant des colonnes de la matrice  $B$  contiendra nécessairement des colonnes de la matrice  $M$ . Cela s'explique par le fait qu'il existe sur la surface considérée des contours fermés qui ne limitent pas d'aire de la surface.

Il y a ainsi une grande différence entre la sphère et les surfaces fermées d'un autre genre. Lorsqu'un réseau est tracé sur une sphère, il n'est pas nécessaire de résoudre le système d'équations (1) auquel il conduit. On a immédiatement une matrice fondamentale de solutions  $M'$  en utilisant  $\alpha_2 - 1$  colonnes de la matrice  $B$ .

Telle est la raison pour laquelle, dans les pages qui suivent, nous n'allons envisager que des réseaux cubiques tracés sur une sphère.

---

## DEUXIÈME PARTIE

*Etude systématique, selon la méthode de O. Veblen,  
des réseaux cubiques tracés sur une sphère.*

Ainsi donc nous n'examinerons ici que des réseaux cubiques tracés sur une sphère. Ces réseaux donnent naissance à des polyèdres homéomorphes à la sphère. Nous admettons que le polyèdre considéré repose sur une de ses faces (celle que l'on ne voit pas); par suite toutes les autres sont parfaitement visibles. Et pour éviter toute confusion nous précisons que la frontière d'une face est constituée par un contour fermé unique composé d'un certain nombre d'arêtes du réseau donné, deux au minimum. De plus une arête sert toujours de frontière à deux faces distinctes du polyèdre.

La face de base du polyèdre peut être celle dont la frontière comprend le plus grand nombre d'arêtes (on dit aussi de côtés), ou le plus petit ou un nombre intermédiaire. Cela n'a aucune importance. Il faut cependant remarquer que le polyèdre peut se présenter sous des aspects différents suivant la face qui a été choisie pour base du polyèdre.

Nous partons d'un polyèdre comprenant  $\alpha_0$  sommets,  $\alpha_1$  arêtes et  $\alpha_2$  faces et introduisons le nombre  $\mu$  égal à

$$\mu = \alpha_2 - 1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$$

puisqu'il s'agit de la sphère. Nous dressons les matrices A et B ainsi que cela a été exposé plus haut. Le rang de la matrice A est égal à  $\alpha_0 - 1$ . Celui de la matrice B à  $\mu$ . De la matrice A nous extrayons le système d'équations linéaires et homogènes (1). Les opérations d'arithmétique s'effectuant selon le module 2, le système (1) a  $2^\mu - 1$  solutions. Ces solutions s'expriment en nombres 0 et 1. Elles sont représentées sur le réseau par des contours fermés, les arêtes marquées d'un 1 étant seules prises en considération. Or les faces du polyèdre sont limitées par des contours fermés. Chaque colonne de la matrice B caractérise une solution du système (1).  $\mu$  d'entre elles sont linéairement indépendantes. Ces  $\mu$  colonnes forment la matrice fondamentale M' de solutions du système (1). Un tableau D comprenant l'ensemble des solutions du système (1) peut parfaitement se dresser à l'aide de la matrice M'. Nous allons l'examiner.

Il comporte  $\alpha_1$  lignes et  $2^\mu - 1$  colonnes qui résultent des additions entre elles des  $\mu$  colonnes de la matrice M'. Certaines lignes de cette matrice renferment un seul nombre 1, les autres en ont

deux. Regardons comme un indice le chiffre qui marque le rang de la face correspondante du polyèdre. Cet indice se répète dans le tableau D  $2^{\mu-1}$  fois. Si donc cet indice caractérise l'unique 1 d'une ligne de la matrice M' on comptera sur cette ligne du tableau D  $2^{\mu-1}$  nombres 1.

Si une ligne de la matrice M' renferme deux nombres 1, il faut se rappeler que  $1 + 1 = 0$  et que par suite on doit envisager séparément chacun de ces deux indices (en supprimant l'autre) ce qui conduit à  $2 \cdot 2^{\mu-2} = 2^{\mu-1}$ , autrement dit le même nombre que précédemment. Il en résulte que chaque ligne du tableau D renferme  $2^{\mu-1}$  nombres 1 et que par suite le tableau D dans son ensemble en renferme un nombre  $N = \alpha_1 \cdot 2^{\mu-1}$ .

On constate ainsi que le nombre  $\mu$  joue un rôle essentiel. En vertu du théorème d'EULER on peut écrire les égalités suivantes :

$$\mu - 1 = \alpha_2 - 2 = \frac{\alpha_1}{3} = \frac{\alpha_0}{2} .$$

Si par conséquent  $\mu$  est connu, tous les éléments du polyèdre le sont également de même que N. C'est la raison pour laquelle dorénavant nous choisirons ce nombre  $\mu$  comme terme de référence.

Il va de soi qu'en général,  $\mu$  étant fixé, il peut exister plusieurs polyèdres qui diffèrent entre eux par le nombre d'arêtes qui leur servent de frontières. Pour tous ces polyèdres le nombre N demeure invariable.

Les solutions du système (1) comporteront au minimum deux arêtes (s'il existe au moins une face limitée par deux arêtes seulement) et au maximum  $\alpha_0$ , soit le nombre des sommets du polyèdre. Dans ce dernier cas, nous serons en présence d'un réseau quadratique, les arêtes n'intervenant pas constituant un réseau linéaire. En obtenant de telles solutions, nous aurons opéré la réduction du réseau cubique donné en un réseau quadratique et un réseau linéaire. Le théorème de PETERSEN nous apprend que cette réduction est toujours possible. Ainsi de tels réseaux quadratiques existent toujours.

Il convient maintenant de rappeler que nous avons proposé de répartir ces réseaux quadratiques en trois types, cela de la façon suivante (CHUARD, 1932, p. 68) :

*Type I.* Le réseau quadratique est d'un seul tenant. Il est autrement dit constitué par un contour fermé unique.

*Type II.* Le réseau quadratique comprend deux ou plusieurs contours fermés, chacun d'eux renfermant un nombre pair d'arêtes.

*Type III.* Le réseau quadratique comprend également deux ou plusieurs contours fermés, certains d'entre eux ayant un nombre impair d'arêtes.

Remarquons que, du moment que le nombre des sommets du polyèdre est pair, dans un réseau quadratique du type III, le nombre des contours fermés comprenant un nombre impair d'arêtes est lui-même pair.

Au surplus si une solution du système (1) comporte deux contours fermés, ceux-ci sont nettement séparés l'un de l'autre. Du moment qu'à chaque sommet du polyèdre n'aboutissent que trois arêtes et que chaque arête n'est comptée qu'une fois, il n'y a aucune possibilité de rencontre de deux contours fermés. La région du polyèdre qui est comprise entre les deux contours fermés d'une solution du système (1) caractérise une chaîne fermée telle que nous l'avons définie précédemment.

#### LA MATRICE $M'$

Ainsi que nous l'avons constaté plus haut, les solutions du système (1) s'obtiennent indifféremment à l'aide d'une matrice  $M$  ou d'une matrice  $M'$ . Lorsqu'il s'agit de polyèdres homéomorphes à une sphère, on ne se donne pas la peine de rechercher une matrice  $M$ , la connaissance de la matrice  $M'$  est immédiate. Il convient donc de mettre en évidence ses caractères.

On a vu que l'on peut classer ses lignes en deux catégories suivant qu'elles renferment un ou deux nombres 1. Lorsqu'il n'y en a qu'un, ce nombre caractérise une face du polyèdre. Mieux il représente l'arête qui sépare cette face de la face de base du polyèdre. On peut le considérer comme un indice qui est compris entre 1 et  $\mu$ . Il va de soi que si ces faces ont plusieurs arêtes en commun, cet indice sera répété plusieurs fois.

Les autres lignes de la matrice  $M'$  renferment deux nombres 1. Elles caractérisent des arêtes servant de frontière à deux faces adjacentes du polyèdre, la face de base étant exclue. Ces arêtes pourraient être qualifiées d'*internes* par opposition à celles qui limitent la face de base que l'on dénommerait *arêtes externes*. Les arêtes internes seraient assujetties à deux indices  $j$  et  $k$  distincts, tous deux compris entre 1 et  $\mu$ . Le nombre des groupes de ces deux indices est bien connu puisqu'il est égal à  $1/2 \mu (\mu - 1)$ . Là encore si deux faces du polyèdre ont en commun plusieurs arêtes internes, le même groupe d'indices  $jk$  se répète plusieurs fois.

Dans ces conditions, ce qui paraît prendre de l'importance, c'est la numérotation des faces du polyèdre de 1 à  $\mu$ . Les arêtes limitant la face de base seront notées d'un seul indice, toutes les autres le seront à l'aide de deux indices.

On peut opérer une distinction analogue à l'égard des sommets en disant que ceux d'entre eux qui appartiennent à la frontière de la face de base sont *externes*, les autres sommets étant *internes*. Mais

à ces derniers on préfère donner le nom de *nœuds*. Il va de soi que ces qualifications sont toutes relatives, attendu qu'elles dépendent de la présentation du réseau celle-ci résultant du choix que l'on a fait pour la face de base.

Revenons maintenant au tableau D en reprenant, pour fixer les idées, l'exemple de la fig. 1. Il s'agit d'un réseau composé de 2 triangles, de 2 quadrilatères et de 2 pentagones. Le polyèdre qui en résulte comprend donc 6 faces, 12 arêtes et 8 sommets. Le nombre  $\mu$  est égal à 5. Nous avons déjà indiqué, page 337, le tableau D auquel il donne lieu. C'est un tableau de 12 lignes et 31 colonnes. Chaque ligne contient 16 nombres 1. Il s'en suit que

$$N = 12 \cdot 16 = 192.$$

Si l'on classe ces colonnes en catégories suivant la quantité de nombres 1 qu'elles renferment, on obtient

$$2 \times 3, 2 \times 4, 4 \times 5, 8 \times 6, 10 \times 7, 5 \times 8.$$

Une solution du système (1) comporte au minimum 3 arêtes (puisque la plus petite face du réseau est un triangle) et au maximum 8 (soit le nombre des sommets du réseau).

On peut encore ajouter que le réseau cubique considéré renferme 5 réseaux quadratiques distincts. Nous désignerons volontiers ces réseaux par le symbole R, ceci par souci d'abréviation. Nous les représentons fig. 5 en constatant que les deux premiers tracés sont du type III tandis que les trois derniers sont du type I. Les arêtes de ces réseaux quadratiques sont marquées de traits renforcés

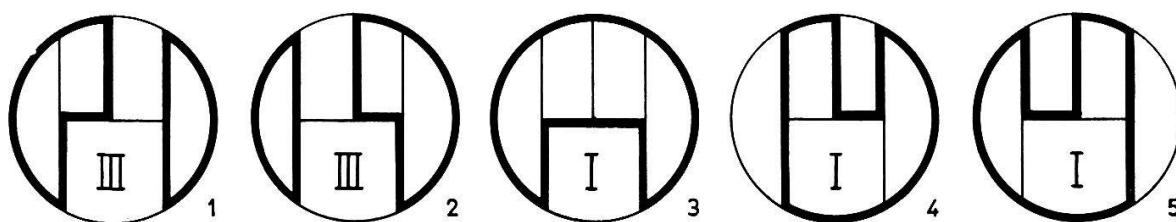


FIG. 5.

Le nombre  $\mu$  étant égal à 5, il existe d'autres réseaux cubiques pour lesquels le nombre  $N$  est égal à 192 : le cube par exemple, dont les 6 faces sont des quadrilatères. On y rencontre 9 réseaux quadratiques distincts.

La recherche du nombre de ces derniers nous intéressant d'une façon toute particulière, nous désignerons dorénavant par  $n$  le nombre des réseaux R contenus dans un réseau cubique donné. Le tableau qui suit indique différentes valeurs de  $n$  correspondant à quelques valeurs de  $\mu$ .

**TABEAU DU NOMBRE  $n$  DE RÉSEAUX QUADRATIQUES  
CONTENUS DANS UN RÉSEAU CUBIQUE DONNÉ**

Nombre de faces du réseau limitées par

| $\mu$ | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 | 14 | 18 | 30 | côtés | N         | $n$    |
|-------|----|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|-------|-----------|--------|
| 2     | 3  |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |       | 6         | 3      |
| 3     |    | 4 |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |       | 24        | 3      |
|       | 2  |   | 2 |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 5      |
| 4     |    | 2 | 3 |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |       | 72        | 4      |
|       | 1  | 2 |   | 2 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 5      |
|       | 2  |   | 2 |   | 1 |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 8      |
|       | 3  |   |   |   | 2 |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 9      |
| 5     |    |   | 2 | 2 | 2 |   |   |   |    |    |    |    |    |       | 192       | 5      |
|       |    | 4 |   |   | 2 |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 5      |
|       |    |   | 6 |   |   |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 9      |
|       | 1  | 2 | 1 |   | 2 |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 6      |
|       | 1  | 1 | 2 | 1 | 1 |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 7      |
|       | 1  | 2 | 1 | 1 |   | 1 |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 8      |
|       | 3  |   | 1 |   | 1 |   | 1 |   |    |    |    |    |    |       |           | 14     |
|       | 4  |   |   |   |   |   | 2 |   |    |    |    |    |    |       |           | 17     |
| 6     |    |   | 2 | 2 | 1 |   |   |   |    |    |    |    |    |       | 480       | 6      |
|       |    | 3 |   | 3 |   | 1 |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 6      |
|       |    | 2 | 3 |   | 2 |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 7      |
|       |    | 3 | 2 |   | 1 | 1 |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 7      |
|       |    | 4 |   | 2 |   |   | 1 |   |    |    |    |    |    |       |           | 8      |
|       |    |   | 5 | 2 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 11     |
|       | 1  | 2 | 2 |   |   | 2 |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 7      |
|       | 2  | 2 |   |   | 2 |   | 1 |   |    |    |    |    |    |       |           | 9      |
|       | 2  | 1 | 1 | 1 | 1 |   | 1 |   |    |    |    |    |    |       |           | 10     |
|       | 2  |   | 2 | 2 |   |   | 1 |   |    |    |    |    |    |       |           | 13     |
|       | 3  |   |   | 3 |   |   |   | 1 |    |    |    |    |    |       |           | 12     |
|       | 5  |   |   |   |   |   |   |   | 2  |    |    |    |    |       |           | 33     |
| 7     |    | 3 | 1 | 2 | 1 | 1 |   |   |    |    |    |    |    |       | 1 152     | 7      |
|       |    | 2 | 2 | 3 |   | 1 |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 7      |
|       |    | 2 | 2 | 2 | 2 |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 10     |
|       |    |   | 4 | 4 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 12     |
|       | 2  | 2 |   | 2 | 1 |   |   |   | 1  |    |    |    |    |       |           | 12     |
|       | 2  |   | 5 |   |   |   |   |   |    | 1  |    |    |    |       |           | 34     |
|       | 6  |   |   |   |   |   |   |   |    | 2  |    |    |    |       |           | 65     |
| 8     |    | 2 | 2 | 4 |   |   | 1 |   |    |    |    |    |    |       | 2 688     | 8      |
|       |    |   | 3 | 6 |   |   |   |   |    |    |    |    |    |       |           | 12     |
|       | 7  |   |   |   |   |   |   |   |    |    | 2  |    |    |       |           | 129    |
| 10    | 9  |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    | 2  |    |       | 13 824    | 513    |
| 16    | 15 |   |   |   |   |   |   |   |    |    |    |    | 2  | 2     | 1 474 560 | 32 769 |

Il va de soi que ce tableau est très incomplet. Il n'est d'ailleurs donné uniquement qu'à titre indicatif, ceci pour bien montrer la grande variété du nombre de réseaux quadratiques qui sont contenus dans un réseau cubique donné. Dès que le nombre  $\mu$  prend quelque importance, les nombres  $N$  et  $n$  deviennent extrêmement grands.

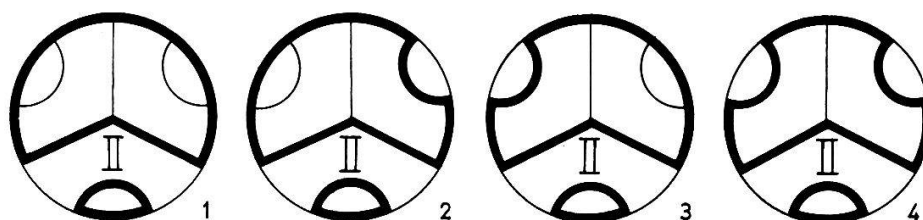


FIG. 6.

Constatons maintenant que l'exemple fourni par la fig. 2 appartient au groupe  $\mu = 6$ . Il renferme 12 réseaux quadratiques qui sont tous du type II. Nous l'avons choisi précisément pour cette raison. Nous indiquons (fig. 6) quatre de ces réseaux, les huit autres s'obtenant de ceux qui sont représentés par une simple rotation autour du centre de chaque dessin. Là encore les arêtes des réseaux R ont été marquées par des traits renforcés.

#### EXAMEN DE QUELQUES CAS PARTICULIERS

a) Un réseau cubique d'un type spécial est celui qui comporte 2 faces de  $2\mu - 2$  arêtes et  $\mu - 1$  faces de 2 arêtes. Si l'on totalise le nombre des arêtes on obtient  $6\mu - 6 = 2\alpha_1$  soit le double du nombre d'arêtes du réseau, ce qui est normal attendu que chaque arête a été comptée deux fois. Tous les sommets sont situés sur la frontière de la face de base. Il n'y a donc pas de nœuds. Le nombre des réseaux quadratiques que renferme le réseau donné est  $2^{\mu-1} + 1$ . En effet la frontière de la face de base en est un. Puis on peut associer à cette frontière celles des faces de 2 arêtes, combinées entre elles de toutes les manières possibles, ce qui donne  $2^{\mu-1}$ .

b) Un second cas est celui qui est donné par un réseau composé de 2 faces de 2 côtés,  $\mu - 2$  faces de 4 côtés et une face de  $2\mu - 2$  côtés. Si l'on totalise le nombre des arêtes on obtient également  $6\mu - 6$  comme ci-dessus. On crée de tels réseaux par un procédé élémentaire que nous tenons à exposer. On part du réseau qui renferme un nombre minimum d'éléments. Il comprend 3 faces, 3 arêtes et 2 sommets :  $\mu = 2$ . L'une des faces étant la face de base, 2 faces seules sont apparentes. Ces faces sont liées entre elles par une arête que nous supposons verticale. Une arête extérieure est à gauche, l'autre à droite. Sur l'arête de gauche, nous marquons

2 points qui deviennent des sommets. Cette arête est ainsi remplacée par 3 arêtes. Les nouveaux sommets sont reliés entre eux par une nouvelle arête. Un nouveau polyèdre est donc créé qui comprend 4 faces, dont 2 de 2 côtés et 2 de 4 côtés. La face de gauche est limitée par 2 arêtes dont l'une est extérieure.

Sur cette arête extérieure nous marquons 2 points qui deviennent des sommets lesquels sont reliés par une nouvelle arête. Nous créons un nouveau polyèdre qui comporte 5 faces soit 2 faces de 2 côtés, 2 de 4 côtés et une de 6 côtés. Ici  $\mu = 4$ . La face de gauche est encore limitée par 2 arêtes dont l'une est extérieure.

On répète la même série d'opérations et l'on aboutit à un polyèdre de 6 faces,  $\mu = 5$ , comprenant 2 faces de 2 côtés, 3 de 4 côtés et une de 8 côtés. C'est ainsi que finalement on aboutit à la disposition générale énoncée plus haut.

Il va de soi que de tels polyèdres ne renferment pas de nœuds, tous les sommets étant situés sur la frontière de la face de base. En ce qui concerne les réseaux quadratiques contenus dans de tels réseaux, les constatations suivantes s'imposent :

Le premier réseau renfermait 3 réseaux quadratiques. Chacune des arêtes du réseau cubique se retrouve dans 2 réseaux quadratiques. C'est le cas, par exemple, de l'arête sur laquelle nous avons marqué 2 nouveaux sommets. L'un et l'autre de ces 2 réseaux quadratiques vont donner naissance dans le nouveau polyèdre à 2 réseaux quadratiques et le troisième à un seul. Nous voyons donc que si

$$\begin{aligned}\mu = 2, & \text{ il y a } 2 + 1 = 3 \text{ R.} \\ \mu = 3, & \text{ il y a } 2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ R.}\end{aligned}$$

Quand on passera de  $\mu = 3$  à  $\mu = 4$ , l'arête sur laquelle sont marqués les 2 nouveaux sommets se retrouvera sur 3 réseaux quadratiques et non sur les deux autres. Il s'en suit que pour

$$\mu = 4, \text{ il y a } 3 \cdot 2 + 2 = 8 \text{ R.}$$

Pour les mêmes raisons, si l'on continue on obtient pour

$$\begin{aligned}\mu = 5, & \quad 5 \cdot 2 + 3 = 13 \text{ R.} \\ \mu = 6, & \quad 8 \cdot 2 + 5 = 21 \text{ R.} \\ \mu = 7, & \quad 13 \cdot 2 + 8 = 34 \text{ R.} \\ \mu = 8, & \quad 21 \cdot 2 + 13 = 55 \text{ R.} \\ \mu = 9, & \quad 34 \cdot 2 + 21 = 89 \text{ R.}\end{aligned}$$

. . . . .

c) Un autre exemple de même nature mais qui diffère cependant des précédents est celui qui est caractérisé par 1 face de 2, 2 de 3,  $\mu - 4$  de 4, 1 de 5 et 1 de  $2\mu - 3$  arêtes. Là encore on constate que le total des arêtes est  $6\mu - 6$  soit  $2\alpha_1$ .

Le nombre de réseaux quadratiques que renferme un réseau donné obéit à la même loi que celle du cas *b*) à la seule réserve d'un décalage dans la valeur de  $\mu$ . En effet c'est pour  $\mu = 3$  que l'on rencontre 3 réseaux quadratiques. Pour  $\mu = 4$ , il y en aura 5, pour  $\mu = 5$ , il y en aura 8, etc.

Ce qui est intéressant à relever, c'est que tous ces réseaux renferment un nœud.

*d*) Il convient encore d'examiner cet autre cas de réseaux qui renferment 2 nœuds et comprennent 1 face de 2 côtés, 1 de 3,  $\mu - 3$  de 4, 1 de 5 et 1 de  $2\mu - 4$  côtés. Si l'on totalise ces derniers on trouve  $6\mu - 6$  qui est effectivement égal à  $2\alpha_1$ .

On constate immédiatement que le réseau, pour lequel  $\mu = 4$ , qui renferme 2 faces de 3 côtés et 3 faces de 4 côtés contient 4 réseaux quadratiques. Par l'adjonction d'une nouvelle arête nous remplaçons une des faces triangulaires par une face de 2 et une face de 4 côtés. Nous obtenons ainsi un polyèdre de 6 faces comprenant une face de 2 côtés, 1 de 3, 2 de 4, 1 de 5 et 1 de 6 côtés pour lequel  $\mu = 5$ . 3 des réseaux quadratiques cités plus haut donnent naissance chacun à 2 nouveaux réseaux quadratiques et 1 à 1 seul. Il s'en suit que :

$$\mu = 5 \text{ conduit à } 3 \cdot 2 + 1 = 7 \text{ R.}$$

En suivant le même processus que précédemment, on crée une face de plus, ce qui donne un polyèdre de 1 face de 2 côtés, 1 de 3, 3 de 4, 1 de 5 et 1 de 8 côtés. Des 7 réseaux quadratiques que nous venons d'obtenir, 4 donnent lieu chacun à 2 réseaux quadratiques nouveaux et 3 à un seul. D'où

$$\mu = 6 \quad \text{et} \quad 4 \cdot 2 + 3 = 11 \text{ R.}$$

Ces opérations peuvent se poursuivre, ce qui conduit à

$$\mu = 7 \quad 7 \cdot 2 + 4 = 18 \text{ R.}$$

$$\mu = 8 \quad 12 \cdot 2 + 6 = 30 \text{ R.}$$

. . . . .

Cette étude quoique sommaire va nous permettre de tirer des conclusions intéressantes. A cet effet pour fixer les idées, admettons que  $\mu = 6$ .

Le réseau considéré est du type :

*b*) Fig. 7.1 Il comprend 2 faces de 2, 4 de 4 et 1 de 10 côtés.  
Il n'a pas de nœud et renferme 21 R.

*c*) Fig. 7.2 Il comprend 1 face de 2, 2 de 3, 2 de 4, 1 de 5 et 1 de 9 côtés.  
Il a 1 nœud et renferme 13 R.

d) Fig. 7.3 Il comprend 1 face de 2, 1 de 3, 3 de 4, 1 de 5 et 1 de 8 côtés.

Il a 2 nœuds et renferme 11 R.

Fig. 7.4 Il comprend 3 faces de 3, 2 de 4, 1 de 6 et 1 de 7 côtés.

Il a 3 nœuds et renferme 7 R.

Fig. 7.5 Il comprend 2 faces de 3, 2 de 4, 2 de 5 et 1 de 6 côtés.

Il a 4 nœuds et renferme 6 R.

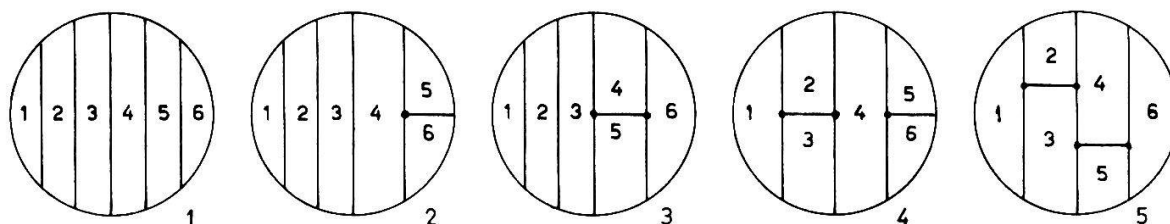


FIG. 7.

Du moment que le réseau a dans son ensemble 10 sommets et que 6 d'entre eux se trouvent sur la frontière de la face de base, il ne peut y avoir au maximum que 4 nœuds. Il s'en suit que pour les réseaux tels que  $\mu = 6$  il y a au minimum 6 réseaux quadratiques.

On pourrait répéter des opérations analogues sur d'autres réseaux cubiques. On serait amené à conclure que les réseaux que nous envisageons renferment au minimum  $\mu$  réseaux quadratiques.

Dans tous les cas un fait est certain : la présence d'une face limitée par 2 arêtes seulement augmente le nombre des réseaux quadratiques que renferme un réseau cubique donné. On pourrait poursuivre cette étude. Nous préférons la reprendre sous une autre forme.

*Remarque.* Lorsqu'un réseau quadratique est du type I, il est formé d'un contour fermé unique qui comprend un nombre pair d'arêtes. Il est par suite décomposable en deux réseaux linéaires. Le réseau cubique donné est ainsi décomposable en trois réseaux linéaires. Comme on peut associer entre eux, deux à deux, ces réseaux linéaires de 3 manières différentes, on aboutit ainsi à trois réseaux quadratiques distincts. On peut dire que ces trois réseaux forment une famille. Il arrive qu'ils soient tous trois des réseaux du type I. Il se peut aussi que certains d'entre eux soient du type II. Pour effectuer cette décomposition, on aurait pu partir d'un réseau du type II. Mais alors il existe une plus grande variété d'association des réseaux linéaires entre eux, par suite des familles de réseaux quadratiques plus étendues.

## ARBRES LINÉAIRES

On peut étudier les réseaux cubiques tracés sur une sphère en procédant d'une toute autre façon. Il n'y a qu'à faire apparaître sur le réseau donné un arbre qui relie entre eux l'ensemble de ses sommets. Du moment que le réseau renferme  $\alpha_0$  sommets, un tel arbre comprend  $\alpha_0 - 1$  arêtes. Il présente des sommets de degré 1 (sommets libres), de degré 2 (sommets de liaison), de degré 3 (bifurcations). Le nombre des sommets libres est toujours supérieur de deux unités à celui des bifurcations. Si l'arbre  $\alpha$  n'a pas de bifurcations, il devient un contour ouvert.

Une façon de distinguer ces arbres entre eux consiste à les classer d'après le nombre de leurs bifurcations. Au surplus, bien que cela n'ait pas une grande importance, on constate qu'un tel arbre a au plus 2, parfois 3 bifurcations. Le problème qui se pose naturellement est celui de la réduction du nombre des bifurcations d'un arbre donné. Il faut remarquer à ce propos que si deux sommets libres de l'arbre limitent la même arête du réseau, en adjoignant cette arête à l'arbre on forme un contour bouclé, lequel renferme un contour fermé. Ce dernier est relié à l'ensemble en un sommet qui est une bifurcation. Mais si l'on supprime une des arêtes qui passent par cette bifurcation et qui fait partie du contour fermé, la bifurcation disparaît et l'on retrouve un arbre. Par ce moyen le nombre des bifurcations de l'arbre considéré a diminué d'une unité (parfois de deux).

Le cas limite est celui dans lequel l'arbre est devenu un contour ouvert. Les bifurcations ont alors disparu. A ce propos, il y a lieu de distinguer deux cas.

a) Les deux sommets libres du contour ouvert limitent la même arête du réseau. Nous disons que nous sommes en présence d'un *contour V*.

b) Dans tous les autres cas, nous disons qu'il s'agit d'un *contour Z*.

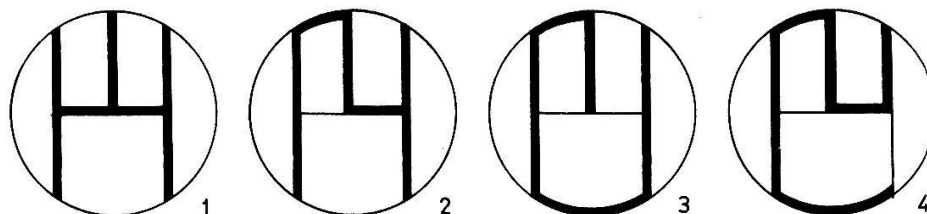


FIG. 8.

Nous donnons (fig. 8) des types d'arbres contenus dans le réseau de la fig. 1. La fig. 8.1 fait apparaître 3 bifurcations, la fig. 8.2 n'en a plus qu'une, les deux autres n'en ont point. La fig. 8.3 est un contour Z et la fig. 8.4 un contour V.

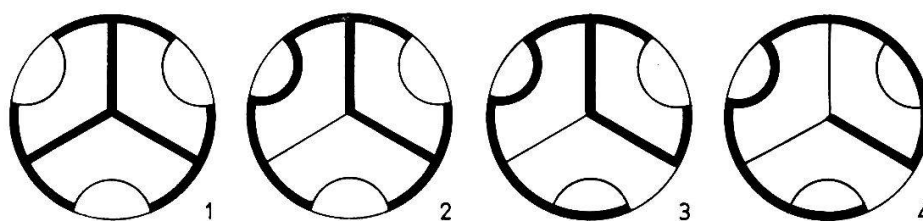


FIG. 9.

La fig. 9 fait de même avec l'exemple 2).

Si l'on revient au cas général, on doit constater que le problème de la réduction du nombre des bifurcations d'un arbre donné est de même nature que celui qui consiste à passer d'un contour  $Z$  à un contour  $V$ . Si en effet un tel passage est réalisé, ainsi que nous venons de le voir, la diminution du nombre des bifurcations d'un arbre est certaine. Et comme un arbre a toujours un nombre de sommets libres égal à celui des bifurcations plus 2, les possibilités de faire en sorte que deux sommets libres limitent la même arête du réseau sont plus grandes que pour un contour  $Z$ .

Nous partons donc d'un contour  $Z$  qui rencontre tous les sommets d'un réseau cubique donné et nous désignons par  $P$  et  $Q$  chacune de ses extrémités. Ce sont des sommets libres par lesquels passent 2 arêtes du réseau qui n'appartiennent pas au contour  $Z$ . Nous allons exposer ce que nous entendons par une *opération double*. Pour cela nous admettons que l'un de ces sommets,  $P$  par exemple, demeure immobile. Nous utilisons une des arêtes du réseau qui rencontrent  $Q$ , n'importe laquelle des deux, qui n'appartient pas au contour  $Z$  et l'associons à celui-ci. Nous créons de cette manière à la fois une bifurcation et un contour bouclé. Ce dernier renferme un contour fermé, puisqu'il s'agit d'un réseau tracé sur une sphère, limite une certaine aire de cette surface. Pour faire disparaître à la fois le contour fermé et la bifurcation, on ne dispose que d'une arête (sinon on revient en arrière). La suppression de cette arête conduit à un sommet du réseau que nous désignerons par  $Q_1$ . Le contour  $PQ_1$  est un nouveau contour  $Z$  que nous caractériserons par  $Z_1$ .

Si nous qualifions cette opération d'*opération double*, cela provient de ce que d'une part elle a exigé l'association d'une arête du réseau au contour  $Z$  et d'autre part la suppression d'une autre arête de ce contour. Entre les sommets  $Q$  et  $Q_1$  se trouve un autre sommet du réseau qui ne reçoit pas de nom. De plus le passage de  $Q$  à  $Q_1$  s'effectue en contournant une face du polyèdre, donnant à celle-ci pour ainsi dire une certaine orientation.

On n'aura qu'à répéter, à partir de  $Q_1$ , une nouvelle opération double qui nous conduira à un autre sommet  $Q_2$ , et ainsi de suite.

Il faut remarquer que si au départ de  $Q$  on avait le choix entre deux arêtes du réseau, ce choix n'existe plus à partir de  $Q_1$  ou de  $Q_2 \dots$  car alors une seule arête est à disposition.

Pour illustrer cette méthode nous ne pouvons mieux faire que de reprendre le contour  $Z$  de la fig. 8.2 dans la fig. 10. Deux opérations doubles suffisent pour passer du contour  $Z$  donné à un contour  $V$ .

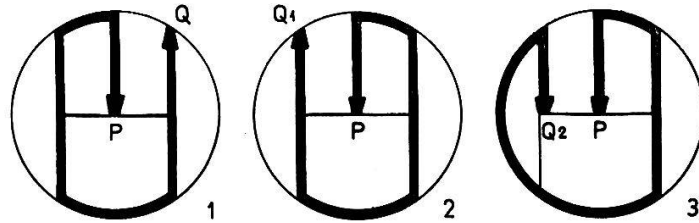


FIG. 10.

Les arêtes utilisées pour passer de  $Q$  à  $Q_1$  puis à  $Q_2 \dots$  forment un parcours spécial auquel nous avons réservé le nom de *Tracé T*. Il se peut, ce qui est très fréquent, que le tracé  $T$  conduise à un contour  $V$ . Le problème posé est alors résolu. Il peut cependant arriver que, pour des raisons que nous devons mettre en évidence, après un certain nombre d'opérations doubles, on retrouve exactement le contour  $Z$  initial. Nous dirons alors que nous sommes en présence d'une *série irréductible* d'opérations doubles.

Si tel est le cas, on admet que le sommet  $Q$  demeure immobile et que la série d'opérations doubles part du sommet  $P$ . Là encore il arrive fréquemment que l'on aboutisse à un contour  $V$ . Mais il peut également se faire que l'on soit en présence d'une nouvelle série irréductible d'opérations doubles. Nous devons donc examiner quand et comment cela se produit. Pour cela nous pensons que le meilleur moyen consiste à reprendre l'examen d'un cas spécial pour passer ensuite à celui du cas général. A cet effet nous reprenons l'exemple 2) qui a été choisi précisément parce qu'il ne renferme aucun réseau quadratique du type I et par conséquent aucun contour  $V$ .

La fig. 11.1 représente un contour  $Z$  dont le sommet  $P$  coïncide avec le sommet  $a^0_3$  et le sommet  $Q$  avec le sommet  $a^0_9$  de la fig. 2. Durant toutes les transformations le sommet  $P$  est demeuré fixe. A partir du sommet  $Q$  on avait à disposition les arêtes  $a^1_8$  et  $a^1_{11}$ . Nous avons choisi l'arête  $a^1_8$ . De ce fait le sommet  $a^0_8$  est devenu une bifurcation. Pour la faire disparaître il a fallu supprimer l'arête  $a^1_{15}$ . Cela nous a conduit au sommet  $a^0_1$  qui est devenu  $Q_1$ . En passant de  $Q$  à  $Q_1$  nous avons contourné la face  $a^2_1$ , donnant à cette dernière une orientation qui est indiquée par une flèche. A partir de  $Q_1$  une seule possibilité s'offre à nous : l'association de

l'arête  $a^1_{14}$  puis la suppression de l'arête  $a^1_5$ , ce qui nous amène au sommet  $a^0_6$  soit  $Q_2$ . Ce faisant nous avons contourné la face  $a^2_3$  imprimant à celle-ci une orientation marquée par une nouvelle flèche. Maintenant nous tournons autour de la face  $a^2_6$  de telle façon que le sommet  $Q_3$  soit confondu avec  $Q_2$ . Poursuivant ainsi le tracé T, nous revenons en arrière, le sommet  $Q_4$  étant confondu avec  $Q_1$  en contournant à nouveau la face  $a^2_3$  mais cette fois en sens contraire du précédent, ce qui détruit l'effet de la première orientation.

Il ne reste qu'à poursuivre ces opérations. Aucune ambiguïté n'est possible. A chaque sommet  $Q_i$  il n'y a qu'une arête à disposition. Finalement après 12 opérations doubles, on retrouve non seulement le sommet de départ Q (auquel on a passé plusieurs fois) mais encore exactement le contour Z initial. Chemin faisant on a créé des orientations sur les faces du réseau que l'on a contournées, orientations qui ont régulièrement été annulées par les opérations suivantes. La fig. 11 donne les résultats des 12 opérations doubles et en plus le tracé T.

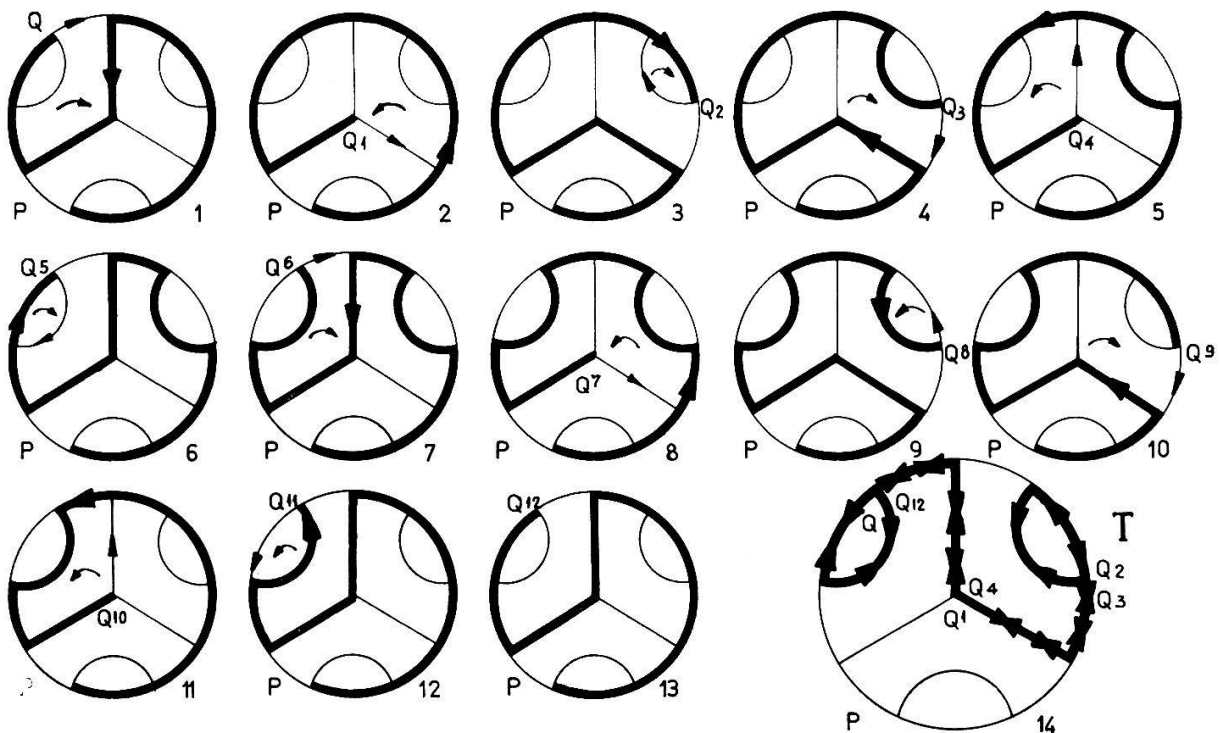


FIG. 11.

Il va de soi que l'on aurait pu inverser les rôles de P et Q, Q demeurant fixe, les opérations doubles partant de P. Même on aurait pu laisser fixe n'importe lequel des sommets Q et répéter de nouvelles opérations doubles. On aurait ainsi mis en évidence des tracés T distincts, mais qui auraient présenté le même caractère. En définitive cette situation résulte du fait que les faces  $a^2_1$ ,  $a^2_2$ ,

$a^2_3$  ont chacune avec la face  $a^2_7$  deux arêtes frontières communes. Nous pensons pouvoir ajouter que c'est là une obligation indispensable pour qu'un contour V n'existe pas.

En effet, du moment que deux faces,  $a^2_3$  et  $a^2_7$  par exemple, ont en commun deux arêtes frontières, les arêtes  $a^1_6$  et  $a^1_7$ , le tracé T qui arrive à l'un des sommets  $a^0_6$  ou  $a^0_7$  ne peut en repartir que par le même sommet, cela quel que soit le découpage de la face  $a^2_6$  si ce découpage existait (ce qui n'est pas le cas dans la fig. 11). Le tracé T se trouve donc dans l'obligation de suivre une voie parfaitement déterminée. Si cette obligation ne se produit qu'une ou deux fois, cela n'a pas d'importance. Si par contre elle se répète trois fois, ou davantage, la voie devient vicieuse en ce sens que l'on supprime l'orientation que l'on vient de créer, redonnant ainsi la situation initiale.

Nous ne pensons pas pouvoir mieux justifier cette affirmation qu'en reprenant l'exemple de la fig. 11 auquel on adjoint une seule arête, celle-ci étant choisie de façon qu'il n'y ait plus que deux faces possédant une double frontière avec la face de base. La fig. 12 montre qu'il est alors aisé d'obtenir un contour V.

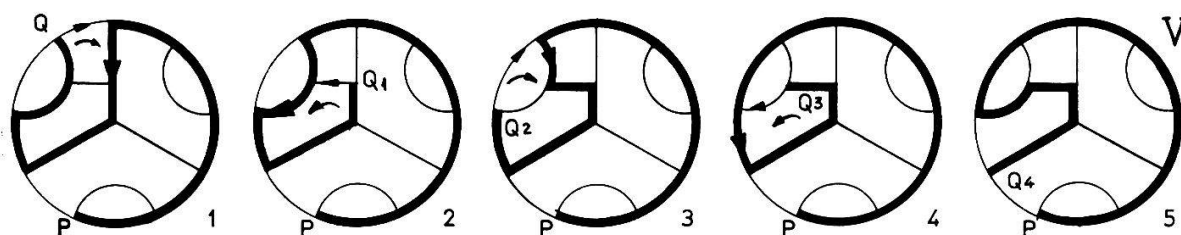


FIG. 12.

Constatons maintenant que ERRERA (1921, p. 36) dans ce qu'il appelle le « cas difficile » admet que « deux pays ont au plus une arête commune ». Ces pays sont pour nous les faces d'un polyèdre. Si donc nous formulons la même condition, nous ne diminuons en rien la généralité du problème. Nous supprimons simplement la cause qui empêche l'existence d'un contour V. C'est ce que nous allons faire dorénavant.

#### EXISTENCE D'UN CONTOUR V

Les polyèdres que nous envisagerons dorénavant résultent de réseaux cubiques tracés sur une sphère tels que deux faces contiguës de ces polyèdres n'ont en commun qu'une seule arête. Nous nous proposons de montrer que sur de tels réseaux il existe toujours au moins un contour V. Il va de soi que l'existence d'un tel contour assure celle d'un réseau quadratique du type I. Pour prouver ce

fait nous allons partir d'un contour  $Z$  pour aboutir à un contour  $V$  ce qui nous permettra du même coup de justifier la réduction du nombre des bifurcations de n'importe quel arbre contenu dans le réseau cubique donné. Rappelons à ce propos que si un tel arbre présente  $k$  bifurcations, il a également  $k + 2$  sommets libres. Si deux de ces sommets libres limitent la même arête du réseau, en associant cette arête à l'arbre on forme un contour bouclé qui redevient un arbre par la suppression de l'une des arêtes du contour fermé qui en résulte passant par une bifurcation. C'est donc bien le passage d'un contour  $Z$  à un contour  $V$  qui constitue la clé du problème.

Comme précédemment les extrémités du contour  $Z$  considéré sont les sommets  $P$  et  $Q$ . Laissant  $P$  fixe, nous partons du sommet  $Q$  à partir duquel nous effectuons une série d'opérations doubles. Nous passons ainsi par les sommets  $Q_1, Q_2, Q_3, \dots$  et caractérisons sur le réseau le tracé  $T$ . Si ce faisant on aboutit à un contour  $V$ , la question est résolue. Admettons que ce ne soit pas le cas. La série d'opérations est alors irréductible. On inverse dans ce cas les opérations. Laissant  $Q$  fixe, on effectue une série d'opérations doubles à partir de  $P$ . On passe ainsi par les sommets  $P_1, P_2, \dots$  qui font apparaître sur le réseau un nouveau tracé  $T$  que nous désignerons par  $T'$ . Là encore il se peut que l'on aboutisse à un contour  $V$ , auquel cas la question est de nouveau tranchée par l'affirmative. Pour que ce ne soit pas le cas, il faut admettre que le tracé  $T'$  caractérise une nouvelle série irréductible d'opérations doubles.

Nous ne sommes toutefois pas à la fin des essais possibles. En effet nous pouvons admettre que n'importe lequel des sommets  $Q_i$  ou  $P_k$  demeure fixe, les opérations doubles s'effectuant à partir de l'autre sommet. Or n'oublions pas que pour atteindre un contour  $V$  aucune condition n'est imposée. Le tracé  $T$  qui y conduit peut être court ou au contraire très long. Cela n'a aucune importance. Comme au départ des opérations doubles, on avait le choix entre deux arêtes, il arrive que l'on choisisse celle qui conduit rapidement au but, ou le contraire. Il ne faut pas oublier que le nombre des contours  $Z$  devient très grand dès que le nombre  $\mu$  prend quelque importance,

Si donc dans les conditions que nous avons admises on ne devait rencontrer aucun contour  $V$  cela signifierait que tous les tracés  $T$  caractérisés par des opérations doubles donneraient lieu à des séries irréductibles. Or le tracé  $T$  d'une telle série satisfait à des règles précises. Tout d'abord ses sommets se succèdent de deux en deux sur le réseau. Entre deux sommets consécutifs d'un tracé  $T$  il y a toujours un sommet du réseau qui n'a pas de nom. Le passage de l'un de ces sommets à l'autre se fait autour d'une face du polyèdre qui est ainsi orientée. Le tracé  $T$  doit être parcouru deux

fois, une fois dans un sens, une fois en sens contraire. S'il arrive qu'un sommet  $Q_i$  tombe précisément entre deux sommets précédemment rencontrés, sur un sommet qui n'a pas de nom, la cadence que nous signalons est rompue. On revient sur un parcours déjà suivi avec une orientation qui s'ajoute à la précédente au lieu de la détruire. C'est ce que nous avons montré dans un mémoire déjà cité (CHUARD, 1932, p. 89).

Voici donc comment nous envisageons la solution du problème proposé. Nous partons d'un contour  $Z$  dont les extrémités sont les sommets  $P$  et  $Q$ . Nous admettons que les deux séries d'opérations doubles effectuées soit à partir de  $Q$ , soit à partir de  $P$  soient irréductibles. Le tracé  $T$  est constitué par les sommets  $Q, Q_1, Q_2, \dots, Q_i, \dots$ . Le tracé  $T'$  comprend les sommets  $P, P_1, P_2, \dots, P_k, \dots$ . Nous considérons le contour  $Z_1$  soit  $PQ_1$  et admettons que le sommet  $Q_1$  demeure immobile. Les opérations doubles effectuées à partir de  $P$  donneront lieu à un nouveau tracé  $T$  que nous désignerons par  $T'_1$ . Les tracés  $T'$  et  $T'_1$  partent tous deux du sommet  $P$ . Ils auront donc une partie commune puis devront se détacher l'un de l'autre. Or les faces du polyèdre autour desquelles ces sommets se déplaceront ont tantôt des nombres pairs de côtés, tantôt des nombres impairs. Les dispositions qui justifiaient l'existence du tracé  $T'$  d'une série irréductible ne se retrouvent plus pour le tracé  $T'_1$ . La cadence est ainsi rompue et l'existence d'un contour  $V$  assurée.

Il faut encore prendre garde au fait que la cadence constatée dans la succession des sommets  $Q_i$  d'un tracé  $T$  ou des sommets  $P_k$  dans un tracé  $T'$  n'est pas la seule condition qui soit imposée à ces tracés. Dans chaque opération double on crée un contour fermé qui, puisque l'on est sur une sphère, limite une aire de celle-ci. De plus quand on contourne une face on l'oriente ainsi que le constatait déjà VEBLEN à propos d'autres questions. Lorsque la série de ces opérations est irréductible, le tracé  $T$  doit être parcouru une seconde fois, exactement en sens contraire de la première de telle façon que par ce second passage l'orientation première soit détruite. On ne concevrait pas qu'un cercle vicieux puisse exister sans cette obligation, ceci précisément parce que la sphère est une surface bilatère.

Dans nos recherches il nous est arrivé à diverses reprises de devoir procéder à un très grand nombre d'opérations doubles avant de parvenir à un contour  $V$ . Ce faisant le tracé  $T$  était parcouru plusieurs fois dans certaines de ses parties, ceci sans un ordre quelconque. Nous pouvions prévoir le résultat final, soit l'obtention d'un contour  $V$ , dès que l'un des sommets  $Q_i$  s'intercalait sur le tracé  $T$  entre deux sommets déjà marqués (autrement dit occupait la place d'un sommet sans nom), ainsi que nous l'avons remarqué plus haut. Les faces contournées étaient parcourues dans le même sens. C'est

comme si l'on avait obtenu une superposition de ces faces, soit une surface constituée par un nombre indéfini de couches. Or c'est précisément cela qui est inconcevable.

Nous avons vérifié ce fait en appliquant cette méthode à tous les exemples qui nous ont été communiqués. Nous en donnons pour preuve les exemples indiqués page 93 du mémoire (CHUARD, 1932) que nous avons déjà cité.

Il va de soi que si toutes les faces du polyèdre avaient un nombre pair de côtés la cadence relevée ci-dessus serait assurée. Mais alors dans ce cas aucun problème ne se poserait, l'existence d'un contour V étant certaine. Il en serait de même si toutes les faces avaient un nombre impair de côtés. Nous n'en donnons pour preuve que le jeu icosien d'HAMILTON qui fait intervenir un polyèdre de 12 faces, soit le dodécaèdre pentagonal.

Si nous avons donné l'exemple 2), c'est précisément parce que, sous une forme réduite, il met nettement en évidence la nature de la difficulté à vaincre. Les tracés T sont canalisés par le fait qu'ils se trouvent dans l'obligation de répondre à des exigences précises. Trois faces du polyèdre ont avec une quatrième face une frontière commune constituée chaque fois par deux arêtes. Tous les tracés T sont ainsi du même type, plus ou moins longs cela va sans dire, mais empruntant toujours les mêmes sommets  $Q_i$ . A ce propos l'exemple de la fig. 12 montre bien que dès que cette obligation cesse, les sommets  $Q_i$  ne sont plus canalisés. L'existence d'un contour V est par suite assurée.

#### LE COLORIAGE DES CARTES DE GÉOGRAPHIE

Les réseaux que nous venons d'étudier représentent, si on le désire, des cartes de géographie tracées sur une sphère. Il suffit d'appeler « pays » ce que nous avons désigné jusqu'ici sous le nom de « faces ». Les arêtes sont les frontières des faces et les sommets des bornes frontières. Il convient à ce propos de rappeler la proposition suivante due à ERRERA (1921, p. 34) :

*Le coloriage d'une carte se ramène à celui d'une autre carte dont tous les sommets sont de degré 3 et dont le nombre des pays n'a pas augmenté.*

En adoptant ce point de vue nous constatons que l'étude à laquelle nous venons de nous livrer est au centre de la question. ERRERA a d'ailleurs précisé qu'en formulant certaines restrictions on ne diminuait en rien la généralité du problème. C'est ainsi que, dans ce qu'il a appelé le « cas difficile » il a fait abstraction des pays qui n'ont que deux arêtes frontières, voire trois ou quatre. Nous n'irons pas si loin. Par contre nous admettrons que la fron-

tière d'un pays ne comprend qu'un seul contour fermé. Nous éliminons ainsi à la fois les isthmes et les îlots.

Si nous nous en tenons aux cartes qui rentrent dans le « cas difficile » nous pouvons affirmer, en vertu de ce qui précède, qu'il existe un réseau quadratique du type I, soit un contour fermé unique qui passe par l'ensemble des sommets du réseau.

Si ce contour fermé est considéré comme une coupure, il sépare tous les pays de la carte en deux chaînes fermées comprenant un nombre pair de pays. Il suffit de deux couleurs pour colorier les différents pays d'une chaîne et par suite de quatre pour l'ensemble.

Mais pour arriver à un tel résultat il n'est pas nécessaire que le réseau donné soit réductible en un réseau quadratique du type I. Il suffit qu'il soit du type II. En effet dans ce cas on peut encore regarder les différents contours fermés constituant le réseau quadratique comme des coupures. Celles-ci délimitent des chaînes qui

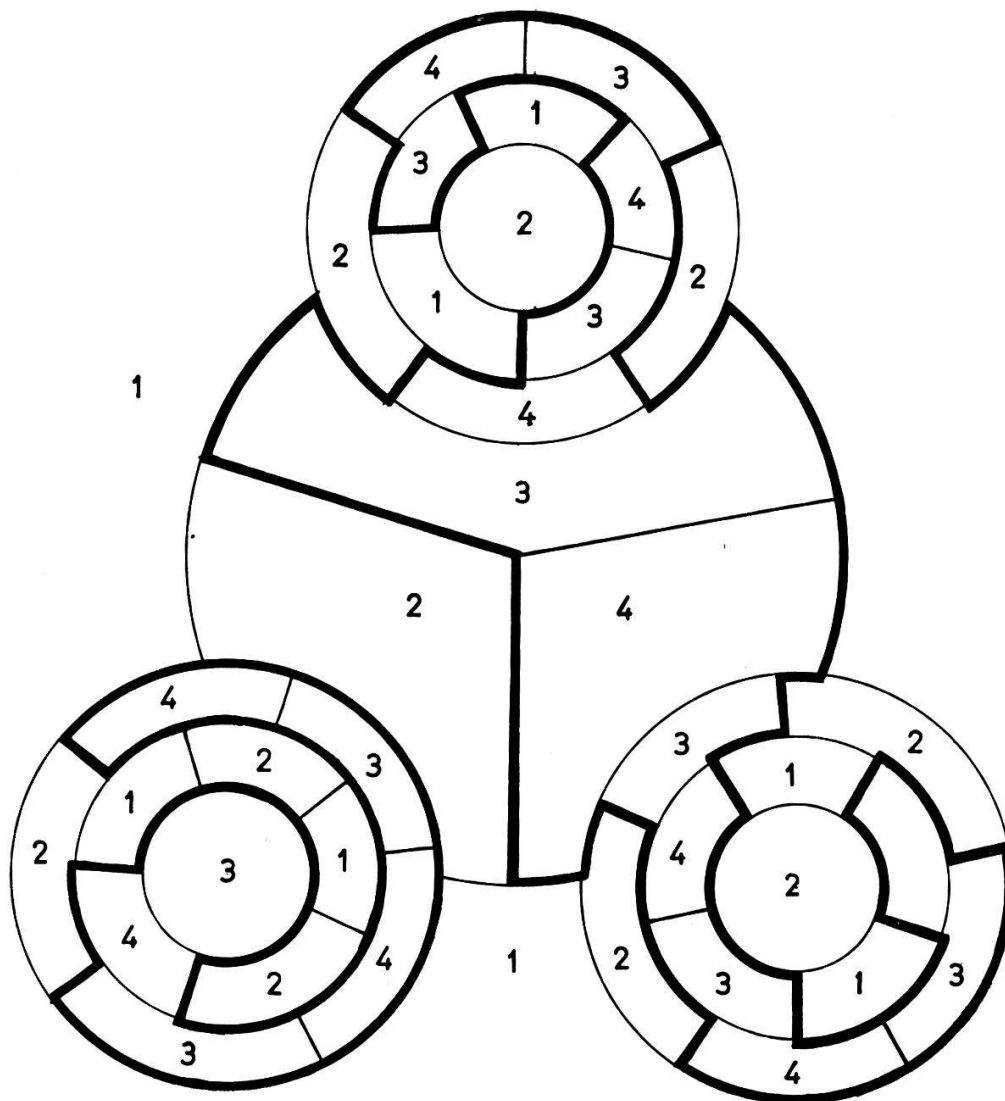


FIG. 13.

comprennent chacune un nombre pair de pays. Or ces chaînes sont nettement séparées les unes des autres, ce qui assure le coloriage de l'ensemble à l'aide de quatre couleurs seulement.

Nous en donnons pour preuve l'exemple de la fig. 13 dont on remarquera sans peine la parenté avec celui de la fig. 2. Le point capital de cet exemple réside dans le fait que les faces du centre marquées 2, 3, 4 ont avec la face extérieure marquée 1, chaque fois deux arêtes communes. S'il n'y a pas de réseau quadratique du type I, il y en a par contre du type II. Nous en avons marqué un en renforçant ses arêtes. C'est ce qui nous a permis de montrer que le coloriage de l'ensemble avec quatre couleurs est encore possible.

En définitive si l'on désirait prouver que le coloriage de la carte avec quatre couleurs est impossible, il faudrait montrer qu'il existe une carte dont les arêtes frontières constitueraient un réseau cubique réductible uniquement en réseaux quadratiques du type III. Or cela est manifestement impossible.

Nous avons vu au début de cette étude que le système d'équations (1) a un très grand nombre de solutions dès que  $\mu$  est quelque peu élevé, puisqu'il se chiffre par  $2^{\mu} - 1$ . De même le nombre  $n$  de solutions qui donnent lieu à des réseaux quadratiques est lui-même très élevé. On peut comme nous l'avons fait ne pas prendre en considération les réseaux comprenant des faces de deux côtés. La valeur de  $n$  diminue d'une façon très sensible. Il n'en demeure pas moins que le nombre des réseaux quadratiques est encore très élevé. Or il faudrait qu'ils soient tous du type III, ce que l'on ne saurait concevoir.

#### BIBLIOGRAPHIE

- CHUARD J. 1922. — Questions d'Analysis Situs. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*. Palermo.
- 1930. — Quelques propriétés des réseaux cubiques tracés sur une sphère, *C. R. Acad. Sc.*, Paris.
- 1932. — Une solution du problème des quatre couleurs. *Congrès international des mathématiciens*, Zurich.
- 1932. — Les réseaux cubiques et le problème des quatre couleurs. *Mém. Soc. vaud. Sc. nat.*, Lausanne, 4, 41.
- ERRERA A. 1921. — Du coloriage des cartes et de quelques questions d'Analysis Situs, Lib. Falk fils, Bruxelles.
- VEBLEN O. 1912. — An Application of modular Equations in Analysis Situs, *Annals of Mathematics*, Princeton.

*Manuscrit reçu le 31 octobre 1962.*

---

Rédaction : Mlle Suzanne Meylan, professeur, Treyblanc 6, Lausanne.

Publicité : M. R. Magliocco, En Martines, Le Mont, Lausanne.

Imprimerie Baud, place de la Riponne, Lausanne.