

# Sur la hauteur du chargement de sécurité implicite contenu dans l'hypothèse d'indépendance : l'assurance du solde restant dû sur la tête d'un couple marié

Autor(en): **Denuit, Michel / Cornet, Anne**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Schweizerische Aktuarvereinigung = Bulletin / Association Suisse des Actuaires = Bulletin / Swiss Association of Actuaries**

Band (Jahr): **- (1999)**

Heft 1

PDF erstellt am: **31.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967291>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

---

MICHEL DENUIT et ANNE CORNET, Bruxelles

## Sur la hauteur du chargement de sécurité implicite contenu dans l'hypothèse d'indépendance: l'assurance du solde restant dû sur la tête d'un couple marié

### 1 Introduction

En sciences actuarielles, lorsqu'il s'agit de calculer le montant de la prime relative à une opération d'assurance sur la vie impliquant plusieurs personnes (typiquement, des couples mariés), le praticien fait le plus souvent appel à l'hypothèse d'indépendance des durées de vie restante des têtes assurées. Il s'agit bien évidemment avant tout de simplifier les développements mathématiques et non de modéliser adéquatement la réalité. Carrière et Chan (1986) et Norberg (1989) furent parmi les premiers à étudier l'impact d'un écart par rapport à l'hypothèse d'indépendance sur le montant des primes. Toutefois, le point de vue adopté dans ces deux travaux est fondamentalement différent. L'approche de Carrière et Chan (1986) est purement quantitative: ces auteurs utilisent les bornes de Fréchet (voyez également Dhaene, Vanneste et Wolthuis (1997), Denuit et Lefèvre (1997), Denuit, Lefèvre et Mesfioui (1999a, b) ainsi que Denuit et Teghem (1998)) afin d'obtenir des fourchettes pour les primes lorsque l'hypothèse d'indépendance est violée. L'approche de Norberg (1989), par contre, est purement qualitative: il se base sur la notion de dépendance positive par quadrant pour déterminer les cas où l'hypothèse d'indépendance génère un chargement de sécurité implicite et ceux pour lesquels, au contraire, elle constitue un risque de sous-tarification. Récemment, plusieurs travaux ont été consacrés à l'étude d'une dépendance éventuelle entre les risques assurés; le lecteur intéressé est invité à consulter, en plus des articles mentionnés ci-dessus, Dhaene et Goovaerts (1996, 1997), Carrière (1994), Frees, Carrière, et Valdez (1997), Müller (1997), Bäuerle et Müller (1998) ainsi que Frees et Valdez (1998).

Notre approche de la question est également quantitative mais diffère de celle suivie par Carrière et Chan (1986). Il s'agit en quelque sorte d'un compromis entre les travaux de ces derniers et ceux de Norberg (1989). En effet, afin d'évaluer l'impact d'une dépendance éventuelle entre les durées de vie des époux sur le montant des primes, nous appliquons le modèle markovien proposé par Norberg (1989) et repris par Wolthuis (1994). Alors que Wolthuis (1994) ne détermine pas les paramètres du modèle (car, selon lui, on ne dispose pas des données statistiques adéquates), nous montrons dans le présent travail que, moyennant quelques hypothèses simplificatrices raisonnables, il est possible d'estimer ces

paramètres et, partant, de calculer le montant des primes sur base d'un modèle markovien.

Afin d'illustrer nos propos, nous nous intéressons plus particulièrement ici à une assurance du type "solde restant dû" conclue par un couple marié. Il s'agit donc de garantir le remboursement du solde d'une dette (un emprunt hypothécaire, par exemple) en cas de décès inopiné de l'un des deux époux. Il s'agit bien souvent avant tout d'une exigence des différents organismes prêteurs qui veulent être garantis de l'apurement de leur créance dans l'éventualité d'une disparition d'un emprunteur. Ceci fait de l'assurance du solde restant dû l'accessoire obligé de la plupart des prêts consentis par les organismes financiers.

Pour la simplicité de l'exposé, nous supposons que le couple a emprunté la somme de 100 000 euros, que cet emprunt est remboursé par  $n$  annuités constantes payables à terme échu et qu'en cas de décès d'un des deux époux, l'assureur rembourse à l'organisme prêteur en fin d'année le montant total de l'emprunt non encore amorti. L'annuité se monte donc à

$$A = 100\,000 / a_{\overline{n}|}, \quad \text{où} \quad a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^n v^k,$$

$v$  représentant le facteur d'actualisation correspondant au taux annuel du prêt, supposé ici non révisable et fixé à 7,5 %. Le solde restant dû à l'instant  $k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$ , noté  $SRD_k$ , est alors donné par

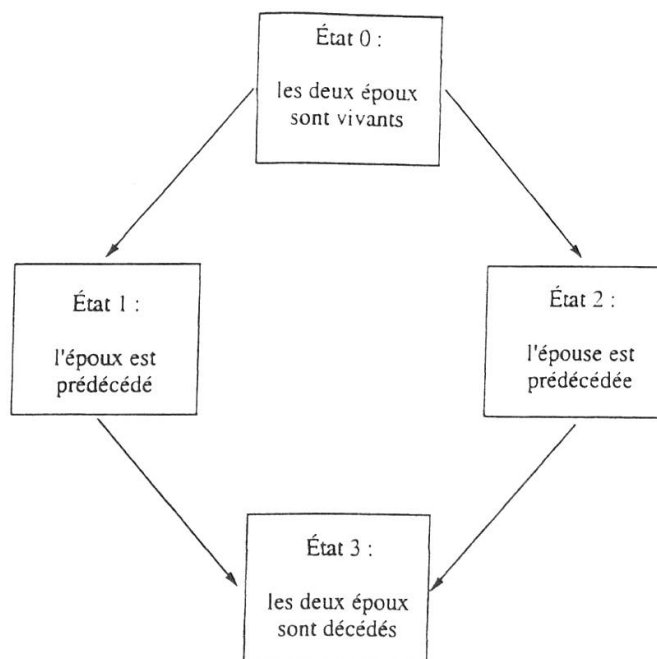
$$SRD_k = 100\,000 a_{\overline{n-k}|} / a_{\overline{n}|};$$

contre paiement de la prime, la compagnie s'engage, en cas de décès de l'un des deux époux durant  $]k-1, k]$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , à rembourser à l'organisme prêteur à l'instant  $k$  un montant  $SRD_{k-1}$ , de telle sorte que le conjoint survivant est libéré de toute obligation envers l'organisme prêteur. En outre, l'assureur travaillera avec un taux d'intérêt technique de 4,75 % (taux maximal contractuellement garanti en Belgique à l'heure actuelle). Enfin, lors de la conclusion de l'emprunt, l'homme est supposé être âgé de  $x$  années, et son épouse de  $y$  années.

L'exposé s'articule en trois parties: après avoir décrit le modèle markovien utilisé ici, nous en estimerons les paramètres sur base des données relatives à la population belge en 1991 (fournies par l'Institut National de Statistique) et, enfin, nous comparerons les primes obtenues grâce au modèle markovien avec celles calculées sur base de l'hypothèse traditionnelle d'indépendance. Nous verrons que le modèle markovien conduit, dans les cas étudiés, à une diminution du montant de la prime unique pure de l'ordre de 20 à 30 %. En d'autres termes, la compagnie d'assurance qui calcule la prime relative à un tel contrat sur base de l'hypothèse bien commode d'indépendance inclut de fait dans ses tarifs un chargement de sécurité de cette hauteur.

## 2 Le modèle markovien de Norberg

Il s'agit d'un processus de Markov à quatre états (tel que représenté à la Figure 1), correspondant respectivement au cas où les deux époux sont vivants (état 0), où l'époux est prédécédé (état 1), où l'épouse est prédécédée (état 2) et où les deux époux sont décédés (état 3). Les seules transitions admises sont  $0 \rightarrow 1$ ,  $0 \rightarrow 2$ ,  $1 \rightarrow 3$ , et  $2 \rightarrow 3$ . Ainsi, les taux instantanés de transition  $\mu_{01}(t)$ ,  $\mu_{02}(t)$ ,  $\mu_{13}(t)$  et  $\mu_{23}(t)$  correspondent respectivement aux taux instantanés de mortalité d'un homme marié âgé de  $x+t$ , d'une femme mariée âgée de  $y+t$ , d'une veuve âgée de  $y+t$  et d'un veuf âgé de  $x+t$ . Comme l'ont mis en évidence de nombreuses études médicales, le décès d'un conjoint modifie sensiblement la mortalité du survivant (référez-vous par exemple à Parkes, Benjamin et Fitzgerald (1969) et à Jagger et Sutton (1991), où est décrit en détails le "broken heart syndrom" entraînant une augmentation de la mortalité pouvant aller jusqu'à 30 % chez le survivant; des conclusions similaires ont été obtenues en Belgique par l'Institut National de Statistique). En sciences actuarielles, ce phénomène est décrit notamment par Hort (1977, page 53 et suivantes), de même que par Maeder (1995, Section 2.3) et Stein et Starr (1997, page 10). Pour cette raison, on adopte la modélisation



**Figure 1:** Modèle markovien de tarification d'une assurance-vie reposant sur la tête d'un couple marié (dépendant de l'état-civil des conjoints)

suivante, fortement inspirée de Wolthuis (1994):

$$\begin{aligned}
 \mu_{01}(t) &= (1 - \alpha_{01})\mu_{x+t}, \\
 \mu_{02}(s) &= (1 - \alpha_{02})\mu_{y+s}, \\
 \mu_{13}(s) &= (1 + \alpha_{13})\mu_{y+s}, \\
 \mu_{23}(t) &= (1 + \alpha_{23})\mu_{x+t},
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

où les  $\alpha_{ij}$  sont des constantes non-négatives,  $\alpha_{01}$  et  $\alpha_{02}$  étant de plus supposées inférieures ou égales à 1, et où  $\mu_{x+t}$  et  $\mu_{y+s}$  représentent les taux instantanés de mortalité d'un homme âgé de  $x+t$  et d'une femme âgée de  $y+s$ . Le modèle (2.1) consiste en fait à supposer que la mortalité d'une homme ou d'une femme mariée est plus faible que la mortalité de la population, tandis que celle d'une veuve ou d'un veuf est plus élevée que celle-ci, ce qui est en accord avec les études cliniques réalisées dans le passé.

Comme prévu par la législation belge (arrêté royal du 17 décembre 1992), nous supposons que ces taux instantanés de mortalité sont donnés par les tables de Makeham  $MK$  et  $FK$ ; plus précisément,

$$\begin{aligned}
 \mu_{x+t} &= A_{MK} + B_{MK}C_{MK}^{x+t}, \\
 A_{MK} &> 0, \quad B_{MK} > 0, \quad C_{MK} > 1,
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

et

$$\begin{aligned}
 \mu_{y+s} &= A_{FK} + B_{FK}C_{FK}^{y+s}, \\
 A_{FK} &> 0, \quad B_{FK} > 0, \quad C_{FK} > 1.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Les constantes intervenant dans (2.2)–(2.3) sont reprises au Tableau 1.

| Paramètre | Table $MK$        | Table $FK$        |
|-----------|-------------------|-------------------|
| $A$       | 0,000 893 523 29  | 0,000 743 228 07  |
| $B$       | 0,000 044 488 81  | 0,000 010 882 77  |
| $C$       | 1,103 798 111 448 | 1,118 239 062 025 |

**Tableau 1.** Valeurs des paramètres intervenant dans (2.2)–(2.3)

A présent, estimons les paramètres  $\alpha_{01}$ ,  $\alpha_{02}$ ,  $\alpha_{13}$  et  $\alpha_{23}$  du modèle. A cet effet, nous utilisons des données fournies par l'Institut National de Statistique (INS) de Belgique et nous suivons la méthodologie décrite par Wolthuis (1994,

Chapitre VI). Les estimations  $\hat{\alpha}_{ij}$  des  $\alpha_{ij}$  sont fournies par la méthode des moindres carrés: elles s'obtiennent en résolvant le problème d'optimisation

$$\hat{\alpha}_{ij} = \arg \min \sum_k \left( \Delta \hat{\Omega}_{ij}(k) - \int_{t=0}^1 \mu_{ij}(k+t) dt \right)^2, \quad (2.4)$$

où, sous l'hypothèse de linéarité,

$$\Delta \hat{\Omega}_{ij}(k) = \frac{L_{i:j}(k)}{L_i(k+1) - L_i(k)} \{ \ln L_i(k+1) - \ln L_i(k) \}, \quad (2.5)$$

$L_i(k)$  et  $L_{i:j}(k)$  représentant respectivement le nombre de couples dans l'état  $i$  à l'instant  $k$  et le nombre de transitions de l'état  $i$  vers l'état  $j$  observées pour des individus d'âge  $k$ . Bien entendu, les données fournies par l'INS consistent en une photographie de l'état de la population belge en 1991. Méthodologiquement, seuls les individus d'âge  $k$  en 1991 servent à calculer le  $\Delta \hat{\Omega}_{ij}(k)$  correspondant. Détaillons les estimations de  $\Delta \hat{\Omega}_{01}(k)$  et de  $\Delta \hat{\Omega}_{13}(k)$  (le lecteur intéressé pourra facilement en déduire les estimations de  $\Delta \hat{\Omega}_{02}(k)$  et de  $\Delta \hat{\Omega}_{23}(k)$  en permutant les rôles des deux époux). Commençons par  $\Delta \hat{\Omega}_{01}(k)$  et examinons les différents éléments composant (2.5):

1. Le numérateur  $L_{0:1}(k)$  reprend le nombre de couples mariés dont l'époux décède à l'âge  $k$  en 1991, c'est-à-dire le nombre d'hommes mariés décédant à l'âge  $k$  en 1991, données immédiatement disponibles auprès de l'INS.
2. Le dénominateur  $L_0(k+1) - L_0(k)$  vaut
  - nombre d'hommes mariés décédant à l'âge  $k$  en 1991
  - nombre d'hommes mariés âgés de  $k$  et dont l'épouse décède en 1991
  - + nombre d'hommes âgés de  $k$  se mariant en 1991
  - nombre d'hommes mariés âgés de  $k$  divorçant en 1991.

Le nombre de couples dont l'époux est âgé de  $k$  et dont l'épouse décède en 1991 n'est pas directement disponible auprès de l'INS (car non recensé). Nous l'estimons comme suit:

- nombre de veufs âgés de  $k+1$  au 1.1.1992
- (nombre de veufs âgés de  $k$  au 1.1.1991
    - nombre de veufs âgés de  $k$  et décédant en 1991
    - nombre de veufs âgés de  $k$  et se remariant en 1991).

3. Quant à la différence des logarithmes népériens dans (2.5),  $L_0(k)$  est le nombre de couples dont le mari est âgé de  $k$  au 1.1.1991 (i.e. le nombre d'hommes mariés âgés de  $k$  au 1.1.1991) et  $L_0(k+1)$  se déduit facilement du point 2.

Passons à présent à  $\Delta\hat{\Omega}_{13}(k)$ :

1. Le numérateur  $L_{1:3}(k)$  reprend le nombre de veuves décédant à l'âge  $k$  en 1991.
2. Le dénominateur  $L_1(k+1) - L_1(k)$  vaut
  - nombre de veuves décédant à l'âge  $k$  en 1991
  - + nombre de couples dont l'épouse est âgée de  $k$  et dont l'époux décède en 1991
  - nombre de veuves âgées de  $k$  se remariant en 1991.

Le nombre de couples dont l'épouse est âgée de  $k$  et dont l'époux décède en 1991 n'est pas disponible auprès de l'INS. Nous l'estimons à partir de

nombre de veuves âgées de  $k+1$  au 1.1.1992

- (nombre de veuves âgées de  $k$  au 1.1.1991
  - nombre de veuves âgées de  $k$  et décédant en 1991
  - nombre de veuves âgées de  $k$  et se remariant en 1991).

3. Quant à la différence des logarithmes népériens,  $L_1(k)$  reprend le nombre de veuves âgées de  $k$  au 1.1.1991 et  $L_1(k+1)$  se déduit facilement du point 2.

Notez que nous ne disposons que d'informations concernant la population habitant le Royaume de Belgique en 1991 (population totale du Royaume par âge, sexe et état-civil au 1.1.1991 et au 1.1.1992, ainsi que le nombre de décédés, le nombre de mariages et le nombre de divorces en 1991 par sexe, année de naissance, âge et état-civil). Nous négligeons donc les mouvements migratoires, car aucune information concernant l'état-civil des migrants n'est disponible auprès de l'INS. En tout état de cause, les effets migratoires sont très faibles (la plupart du temps, leur amplitude est inférieure à 1 % de l'effectif de la classe d'âge considérée, et n'est jamais supérieure à 2 %).

Pour le modèle (2.1), la forme explicite des  $\hat{\alpha}_{ij}$  est donnée par

$$\hat{\alpha}_{01} = 1 - \frac{\sum_k \left( A_{MK} + B_{MK} C_{MK}^k \frac{C_{MK} - 1}{\ln C_{MK}} \right) \Delta \hat{\Omega}_{01}(k)}{\sum_k \left( A_{MK} + B_{MK} C_{MK}^k \frac{C_{MK} - 1}{\ln C_{MK}} \right)^2}, \quad (2.6)$$

$$\hat{\alpha}_{02} = 1 - \frac{\sum_k \left( A_{FK} + B_{FK} C_{FK}^k \frac{C_{FK} - 1}{\ln C_{FK}} \right) \Delta \hat{\Omega}_{02}(k)}{\sum_k \left( A_{FK} + B_{FK} C_{FK}^k \frac{C_{FK} - 1}{\ln C_{FK}} \right)^2}, \quad (2.7)$$

$$\hat{\alpha}_{13} = \frac{\sum_k \left( A_{FK} + B_{FK} C_{FK}^k \frac{C_{FK} - 1}{\ln C_{FK}} \right) \Delta \hat{\Omega}_{13}(k)}{\sum_k \left( A_{FK} + B_{FK} C_{FK}^k \frac{C_{FK} - 1}{\ln C_{FK}} \right)^2} - 1, \quad (2.8)$$

$$\hat{\alpha}_{23} = \frac{\sum_k \left( A_{MK} + B_{MK} C_{MK}^k \frac{C_{MK} - 1}{\ln C_{MK}} \right) \Delta \hat{\Omega}_{23}(k)}{\sum_k \left( A_{MK} + B_{MK} C_{MK}^k \frac{C_{MK} - 1}{\ln C_{MK}} \right)^2} - 1. \quad (2.9)$$

Sur base de (2.6)–(2.9) et des données INS relatives aux individus âgés de 30 à 80 ans, nous obtenons ainsi

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}_{01} &= 0.2482451485, & \hat{\alpha}_{02} &= 0.3852623924, \\ \hat{\alpha}_{13} &= -0.2633662678 \text{ et } \hat{\alpha}_{23} &= 0.0284044702. \end{aligned} \quad (2.10)$$

En d'autres termes, il y aurait, sur base des données INS recueillies en 1991, une sous-mortalité de l'ordre de 25 % pour les hommes mariés, de 38 % pour les femmes mariées, de 26 % pour les veuves et une sur-mortalité de 3 % pour les veufs, par rapport aux tables officielles  $MK$  et  $FK$  dressées par l'Office de Contrôle des Assurances en Belgique. Ces résultats peuvent sembler étonnants à première vue. Afin de mieux les comprendre, il convient d'insister sur le fait que les tables de mortalité  $MK$  et  $FK$ , imposées aux compagnies d'assurance belges pour la tarification des opérations en cas de décès, contiennent d'importants chargements de sécurité (en d'autres termes, le nombre de décès est drastiquement majoré, afin de garantir la solvabilité des compagnies d'assurance; voyez à ce propos les critiques formulées à l'encontre de la législation belge par Denuit

1999), alors que les données utilisées pour estimer les paramètres proviennent directement des observations. Ceci explique la sous-mortalité des veuves (il s'agit d'une sous-mortalité par rapport à la table  $FK$ , pas par rapport aux données démographiques), en apparence contradiction avec les études cliniques réalisées par le passé. De même, la sur-mortalité des veufs peut sembler faible (de l'ordre de 3 %), mais il ne faut pas perdre de vue qu'il s'agit d'une sur-mortalité par rapport à des taux de mortalité déjà majorés.

### 3 Prime unique pure de la “solde restant dû”

Notons  $p_{ij}(s, t)$ ,  $s \leq t \in \mathbb{R}^+$ , les probabilités de transition associées au processus décrit à la Figure 1, i.e.  $p_{ij}(s, t)$  est la probabilité conditionnelle que le couple soit dans l'état  $j$  à l'instant  $t$ , sachant qu'il était dans l'état  $i$  à l'instant  $s$ . Pour calculer le montant de la prime relative à l'assurance du solde restant dû décrite dans l'introduction, nous avons seulement besoin des probabilités  $p_{00}(s, t)$  pour des  $s$  et  $t$  entiers. Ces probabilités s'obtiennent assez facilement. En effet, elles satisfont à la relation de récurrence

$$p_{00}(0, k+1) = p_{00}(0, k) p_{00}(k, k+1), \quad k \in \mathbb{N},$$

qui permet de les évaluer partant de  $p_{00}(0, 0) = 1$ . Nous supposons dans la suite que les taux de mortalité sont constants à chaque âge, et nous les majorons (afin de ne pas sous-estimer la prime d'assurance) i.e.

$$\mu_{ij}(k+s) = \mu_{ij}(k+1) \quad \text{pour } k = 0, 1, \dots \text{ et } 0 \leq s < 1,$$

ce qui se réduit à

$$\begin{aligned} \mu_{x+k+s} &= \mu_{x+k+1} \quad \text{et} \quad \mu_{y+k+s} = \mu_{y+k+1} \\ \text{pour } k &= 0, 1, \dots \text{ et } 0 \leq s < 1. \end{aligned}$$

Les probabilités “annuelles”  $p_{00}(k, k+1)$  sont alors données, en vertu des équations de Kolmogorov, par

$$\begin{aligned} p_{00}(k, k+1) &= \exp\left(-\int_{\tau=k}^{k+1} \{\mu_{01}(\tau) + \mu_{02}(\tau)\} d\tau\right) \\ &= \exp\{-\mu_{01}(k+1) - \mu_{02}(k+1)\}. \end{aligned}$$

Finalement, la prime unique pure de la “solde restant dû” s’écrit sous la forme

$$PUP = \sum_{k=0}^{n-1} p_{00}(0, k) \{1 - p_{00}(k, k+1)\} SRD_k(1, 0475)^{-(k+1)} . \quad (3.1)$$

#### 4 Illustrations numériques

Qualitativement, la prime (3.1) basée sur le modèle markovien décrit à la Figure 1 devrait être inférieure à la prime classique basée sur l’hypothèse d’indépendance. En effet, le modèle markovien prévoit des taux de mortalité réduits pour les hommes et les femmes mariés, de sorte que les couples souscrivant une assurance du solde restant dû auront tendance à rester plus longtemps dans l’état 0 dans le modèle markovien que sous l’hypothèse d’indépendance, retardant d’autant un éventuel paiement de la compagnie d’assurance. Si, de plus, les couples s’acquittent de primes annuelles, cet effet sera encore accentué puisque les couples auront tendance à payer plus longtemps leurs primes dans le modèle markovien que sur base de l’hypothèse d’indépendance.

Examinons à présent quelques valeurs numériques. Nous avons porté en graphique les primes (3.1) de la “solde restant dû” pour un couple dont  $x = y = 25$ , et ensuite pour un couple dont  $x = 30$  et  $y = 25$ , et ce pour  $n = 10, 11, \dots, 65 - \max\{x, y\}$ , ainsi que ces mêmes primes calculées sur base de l’hypothèse d’indépendance entre les durées de vie des deux époux. Pour rappel, la prime unique pure  $PU P^{\text{ind}}$  basée sur l’hypothèse d’indépendance vaut

$$\begin{aligned} PU P^{\text{ind}} = & \sum_{k=0}^{n-1} S_{MK}^k G_{MK}^{C_{MK}^{x+k} - C_{MK}^x} S_{FK}^k G_{FK}^{C_{FK}^{y+k} - C_{FK}^x} \\ & \left( 1 - S_{MK} G_{MK}^{C_{MK}^{x+k} (C_{MK}-1)} S_{FK} G_{FK}^{C_{FK}^{y+k} (C_{FK}-1)} \right) \\ & SRD_k(1, 0475)^{-(k+1)} , \end{aligned} \quad (4.1)$$

où l’on a posé

$$\begin{aligned} S_{MK} &= \exp(-A_{MK}), & G_{MK} &= \exp(-B_{MK}/\ln(C_{MK})), \\ S_{FK} &= \exp(-A_{FK}), & \text{et} & \quad G_{FK} = \exp(-B_{FK}/\ln(C_{FK})). \end{aligned}$$

Le détail des valeurs numériques est repris aux Tableaux 2 et 3 de l’annexe, où l’on peut également trouver l’écart relatif (en %) entre les primes, à savoir

$$\frac{PUP - PU P^{\text{ind}}}{PU P^{\text{ind}}} .$$

On peut voir aux Figures 2 et 3 de l'annexe que l'écart entre les courbes représentant les primes d'assurance (3.1) et (4.1) a tendance à s'accroître au fur et à mesure que la durée  $n$  du contrat de prêt augmente. Les écarts relatifs sont de l'ordre de 20 à 30 % et apparaissent décroissants avec  $n$ , partant de -28 % pour arriver à -24 %, environ.

## 5 Conclusions

Dans ce travail, nous avons voulu montrer qu'il était possible de calculer des primes d'assurance-vie sur base d'un modèle markovien. Ce type de modèle est particulièrement intéressant pour les opérations impliquant plusieurs personnes lorsqu'il s'agit de prendre en compte une dépendance éventuelle entre les durées de vie des têtes assurées. De plus, l'impact de la dépendance sur la prime relative au contrat d'assurance du solde restant dû étudié dans l'article s'avère substantiel et à l'avantage de l'assureur. L'hypothèse d'indépendance génère donc un chargement de sécurité implicite. Ce type de résultats s'avère prometteur pour la gestion des compagnies d'assurance, notamment en vue de mieux évaluer les bénéfices de mortalité dans le cadre du *profit testing*.

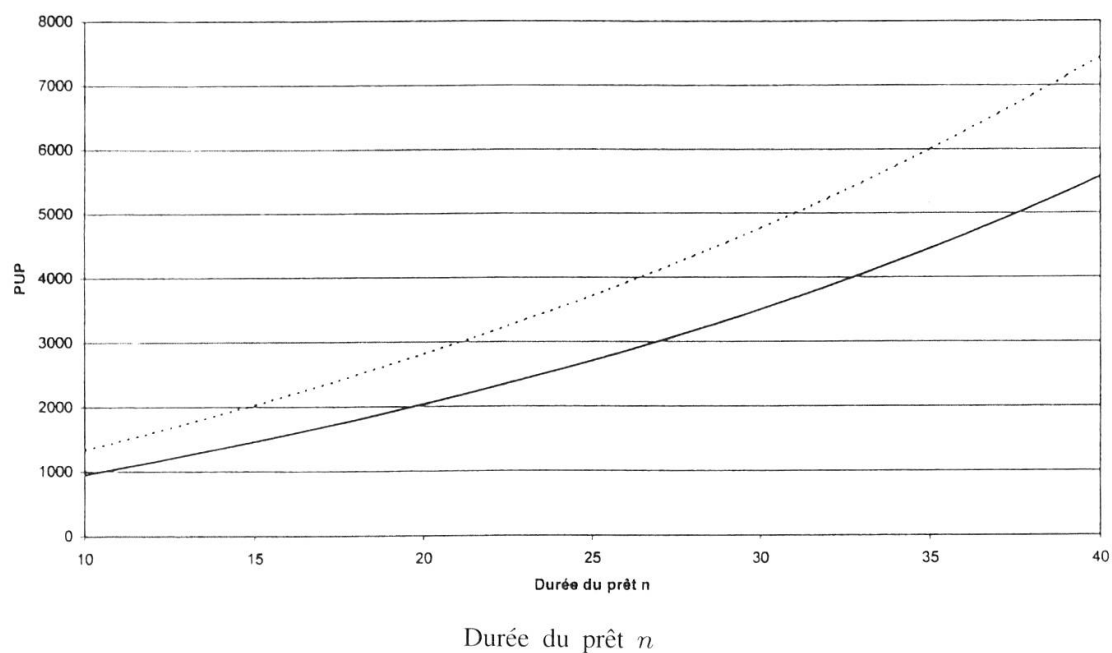
## Annexe

| $n$ | $PUP$ (3.1) | $PUP$ ind   | Ecart relatif |
|-----|-------------|-------------|---------------|
| 10  | 954,4584313 | 1332,964675 | -28,396 %     |
| 11  | 1051,406541 | 1466,844111 | -28,322 %     |
| 12  | 1150,522802 | 1603,436113 | -28,246 %     |
| 13  | 1251,943588 | 1742,912909 | -28,169 %     |
| 14  | 1355,813868 | 1885,457293 | -28,091 %     |
| 15  | 1462,287392 | 2031,262711 | -28,011 %     |
| 16  | 1571,526843 | 2180,533273 | -27,929 %     |
| 17  | 1683,703942 | 2333,48369  | -27,846 %     |
| 18  | 1798,999508 | 2490,339093 | -27,761 %     |
| 19  | 1917,603444 | 2651,334742 | -27,674 %     |
| 20  | 2039,714663 | 2816,715598 | -27,585 %     |
| 21  | 2165,540911 | 2986,735715 | -27,495 %     |
| 22  | 2295,298493 | 3161,65745  | -27,402 %     |
| 23  | 2429,211874 | 3341,750449 | -27,307 %     |
| 24  | 2567,513127 | 3527,290363 | -27,210 %     |
| 25  | 2710,441217 | 3718,557281 | -27,110 %     |
| 26  | 2858,241084 | 3915,833808 | -27,008 %     |
| 27  | 3011,162499 | 4119,402763 | -26,903 %     |
| 28  | 3169,458646 | 4329,544439 | -26,795 %     |
| 29  | 3333,384417 | 4546,533365 | -26,683 %     |
| 30  | 3503,19435  | 4770,634528 | -26,568 %     |
| 31  | 3679,14018  | 5002,098988 | -26,448 %     |
| 32  | 3861,467963 | 5241,158837 | -26,324 %     |
| 33  | 4050,414704 | 5488,021455 | -26,195 %     |
| 34  | 4246,204459 | 5742,863012 | -26,061 %     |
| 35  | 4449,043847 | 6005,821204 | -25,921 %     |
| 36  | 4659,116952 | 6276,987202 | -25,775 %     |
| 37  | 4876,579549 | 6556,396842 | -25,621 %     |
| 38  | 5101,552659 | 6844,021114 | -25,460 %     |
| 39  | 5334,115413 | 7139,756049 | -25,290 %     |
| 40  | 5574,297249 | 7443,412181 | -25,111 %     |

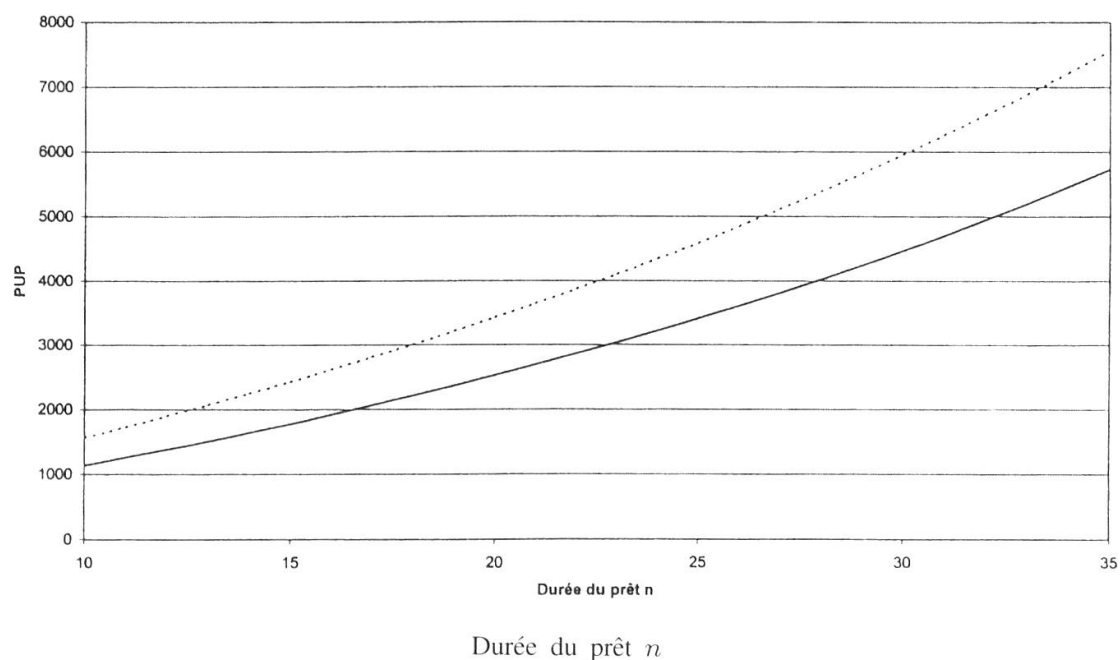
**Table 3.** Valeurs numériques des  $PUP$  (3.1) et  $PUP^{\text{ind}}$  (4.1) pour  $x = y = 25$ .

| $n$ | $PUP$ (3.1) | $PUP$ ind   | Ecart relatif |
|-----|-------------|-------------|---------------|
| 10  | 1144,639427 | 1572,425843 | -27,206 %     |
| 11  | 1265,207001 | 1735,855599 | -27,113 %     |
| 12  | 1389,227037 | 1903,561103 | -27,020 %     |
| 13  | 1516,894484 | 2075,780557 | -26,924 %     |
| 14  | 1648,414185 | 2252,763296 | -26,827 %     |
| 15  | 1784,000866 | 2434,769471 | -26,728 %     |
| 16  | 1923,879031 | 2622,069589 | -26,627 %     |
| 17  | 2068,282767 | 2814,943871 | -26,525 %     |
| 18  | 2217,455422 | 3013,6814   | -26,420 %     |
| 19  | 2371,649148 | 3218,579032 | -26,314 %     |
| 20  | 2531,12428  | 3429,940028 | -26,205 %     |
| 21  | 2696,148527 | 3648,07237  | -26,094 %     |
| 22  | 2866,995938 | 3873,286714 | -25,980 %     |
| 23  | 3043,945625 | 4105,893934 | -25,864 %     |
| 24  | 3227,280186 | 4346,202198 | -25,745 %     |
| 25  | 3417,283804 | 4594,513533 | -25,623 %     |
| 26  | 3614,23997  | 4851,119806 | -25,497 %     |
| 27  | 3818,42878  | 5116,298074 | -25,367 %     |
| 28  | 4030,123765 | 5390,305245 | -25,234 %     |
| 29  | 4249,588195 | 5673,371987 | -25,096 %     |
| 30  | 4477,070804 | 5965,695857 | -24,953 %     |
| 31  | 4712,800895 | 6267,433599 | -24,805 %     |
| 32  | 4956,982767 | 6578,692619 | -24,651 %     |
| 33  | 5209,789436 | 6899,521629 | -24,491 %     |
| 34  | 5471,355622 | 7229,900525 | -24,323 %     |
| 35  | 5741,769989 | 7569,729585 | -24,148 %     |

**Table 4.** Valeurs numériques des  $PUP$  (3.1) et  $PUP^{\text{ind}}$  (4.1) pour  $x = 30$  et  $y = 25$ .



**Figure 2:**  $PUP$  (3.1) (en trait continu) et  $PUP^{\text{ind}}$  (4.1) (en trait interrompu) pour  $x = y = 25$ , en fonction de la durée du prêt  $n = 10, 11, \dots, 40$ .



**Figure 3:**  $PUP$  (3.1) (en trait continu) et  $PUP^{\text{ind}}$  (4.1) (en trait interrompu) pour  $x = 30$  et  $y = 25$ , en fonction de la durée du prêt  $n = 10, 11, \dots, 35$ .

## Références

- Bäuerle, N., et Müller, A. (1998). Modeling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios. *ASTIN Bulletin* **28**, 59–76.
- Carrière, J.F. (1994). Dependent decrement theory. *Transactions of the Society of Actuaries* **46**, 45–74.
- Carrière, J.F., et Chan, L.K. (1986). The bounds of bivariate distributions that limit the value of last-survivor annuities. *Transactions of the Society of Actuaries* **38**, 51–74.
- Denuit, M., Lefèvre, Cl. (1997). Stochastic product orderings, with applications in actuarial sciences. *Bulletin Français d'Actuariat* **1**, 61–82.
- Denuit, M., Lefèvre, Cl., et Mesfioui, M. (1999a). Stochastic orderings of convex-type for discrete bivariate risks. *Scandinavian Actuarial Journal*, 32–51.
- Denuit, M., Lefèvre, Cl., et Mesfioui, M. (1999b). A class of bivariate stochastic orderings with applications in actuarial sciences. *Insurance: Mathematics and Economics*, 24, 31–50.
- Denuit, M. (1999). Bases techniques de l'assurance-vie individuelle en Belgique. *Revue Générale des Assurances et des Responsabilités*, à paraître.
- Denuit, M., et Teghem, S. (1998). Measuring the impact of a dependence among insured lifelengths. *Technical Report ISRO # 103*. Université Libre de Bruxelles, Bruxelles.
- Dhaene, J. et Goovaerts, M.J. (1996). Dependency of risks and stop-loss order. *ASTIN Bulletin* **26**, 201–212.
- Dhaene, J. et Goovaerts, M.J. (1997). On the dependency of risks in the individual life model. *Insurance: Mathematics and Economics* **19**, 243–253.
- Dhaene, J. Vanneste, M., et Wolthuis, H. (1997). A note on dependencies in multiple life statuses. Technical Report, *DTEW, Katholieke Universiteit Leuven*.
- Frees, E.W., Carrière, J.F., et Valdez, E. (1996). Annuity valuation with dependent mortality. *The Journal of Risk and Insurance* **63**, 229–261.
- Frees, E.W., et Valdez, E.A. (1998). Understanding relationships using copulas. *North American Actuarial Journal* **2**, 1–25.
- Hort, M. (1977). *Initiation aux Mathématiques de l'Assurance sur la Vie*. Ecole des Hautes Etudes Commerciales de l'Université de Lausanne, Lausanne, Suisse.
- Jagger, C., et Sutton, C.J. (1991). Death after marital bereavement – is the risk increased? *Statistics in Medicine* **10**, 395–404.
- Maeder, Ph. (1995). La construction des tables de mortalité du tarif collectif 1995 de l'UPAV. *Mitteilungen der Schweiz. Vereinigung der Versicherungsmathematiker*, 131–175.
- Müller, A. (1997). Stop-loss order for portfolios of dependent risks. *Insurance: Mathematics and Economics* **21**, 219–224.
- Norberg, R. (1989). Actuarial analysis of dependent lives. *Mitteilungen der Schweiz. Vereinigung der Versicherungsmathematiker*, 243–234.
- Parkes, C.M., Benjamin, B., et Fitzgerald, R.G. (1969). Broken heart: a statistical study of increased mortality among widowers. *British Medical Journal*, 740–743.

Stein, M.S., and Starr, J. (1997). Introduction to life reinsurance 201. *Record of the Society of Actuaries* **23** – available on <http://www.soa.org>.

Wolthuis, H. (1994). *Life Insurance Mathematics – The Markovian Model*. CAIRE Education Series 2. CAIRE, Bruxelles.

Michel Denuit et Anne Cornet  
Institut de Statistique et de Recherche Opérationnelle  
Université Libre de Bruxelles, CP 210  
Boulevard du Triomphe  
B-1050 Bruxelles, Belgium.  
E-mail addresses: [mdenuit@ulb.ac.be](mailto:mdenuit@ulb.ac.be) et [acornet@ulb.ac.be](mailto:acornet@ulb.ac.be)

## Résumé

Cet article a pour but de mettre en évidence l'importance du chargement de sécurité implicitement contenu dans l'hypothèse d'indépendance lorsqu'il s'agit de tarifier une assurance du solde restant dû conclue par un couple marié. Pour ce faire, nous utilisons le modèle markovien de tarification proposé par Norberg (1989) et Wolthuis (1994) et nous illustrons nos propos sur base de données provenant de l'Institut National belge de Statistique.

## Zusammenfassung

Dieses Papier hat zum Ziel die Wichtigkeit des Sicherheitszuschlages zu zeigen, der implizit in der Annahme der Unabhängigkeit enthalten ist, falls eine Restschuldversicherung für ein Ehepaar zu tarifieren ist. Dazu verwenden wir das von Norberg (1989) und Wolthuis (1994) vorgeschlagene Markov Modell und veranschaulichen unsere Ergebnisse mit Daten des belgischen Institutes für Statistik.

## Summary

The purpose of this paper is to highlight the height of the implicit safety loading contained in the independence assumption when a credit insurance contract issued on a married couple has to be tariffied. Therefore, we use the Markov model proposed by Norberg (1989) and Wolthuis (1994), and we illustrate the results on data from the Belgian National Institute of Statistics.