Optimum trimming of data in the credibility model

Autor(en): **Gisler, Alois**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **- (1980)**

Heft 3

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-571121

ALOIS GISLER, Winterthur

Optimum Trimming of Data in the Credibility Model

Abstract

The practical application of credibility models and credibility estimators in the field of actuarial activities (see [1], [2]) shows that big claims have distorting effects. On the one hand, such large claims exert a strong influence upon the variance, given the risk parameter, and cause a reduction of the credibility factor. Thus the experience rating factor for a contract which has had no big claims during the observation period is too small. On the other hand the occurrence of a heavy claim can be the cause of a precipitous rise of the estimated risk premium regardless of the small credibility factor.
In this investigation we show how the credibility estimation can be improved by trimming the data. The usual credibility model and a model in which a volume measure P_{ij} is assigned to each risk j and to each year i are dealt with. The claim amounts are trimmed at the point M, i.e. subject to the transformation $g_M(x) = \min(M, x)$. Then the best estimator $\hat{\mu}(M)$ of the pure risk premium is determined, which is linear in the transformed data. If we choose a trimming point M which is too small, we lose too much information and the differences between the contract's risk behaviour and that of other risks are possibly lost. If $M = \infty$ we get the usual credibility estimator with the above mentioned distorting effects caused by the occurrence of heavy claims. The trimming point M_0 is said to be optimal, if $\hat{\mu}(M_0)$ is the best estimator within the class $\{\hat{\mu}(M) | M \in \mathbb{R}\}$.
This article is a summary of [4]. The stress in this article is laid on the basic ideas and the main result. The reader who is interested in the proofs and in the details is referred to [4]. A copy of [4] can be obtained from the author.

Chapter 1: Introduction

1.1 *Models*

Model I (usual credibility model)

- X_{ij} may be interpreted as the total claim amount caused by risk j ($j = 1, 2, \ldots, N$) in the year i ($i = 1, 2, \ldots, n$).
- The distribution of X_{ij} depends on a risk parameter θ_j.

We make the following assumptions:

(i) Given θ_j ($j=1,2,\ldots,N$) the RV (random variables) X_{ij} are independent.
(ii) Given $\theta_j=\theta$ the RV X_{ij} ($i=1,2,\ldots,n$) have the same distribution $F_\theta(x)=$ $=\text{Prob}\,(X_{ij}\leqslant x|\theta)$.
(iii) $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N$ are i.i.d. (independent and identically distributed) with distribution $U(\theta)$ which is called the structure function.

Model II (a model with volume measure)

- A volume measure P_{ij} is given to each risk j ($j=1,2,\ldots,N$) and to each year i ($i=1,2,\ldots,n$).
- N_{ij} is the number of claims of the risk j in the year i and $Y_{ij}^{(\nu)}$ ($\nu=1,2,\ldots,N_{ij}$) are the different claim amounts.
- The distribution of N_{ij} depends on the volume measure P_{ij} and on a risk parameter θ_j.
- The distribution of the claim amounts also depends on the risk parameter θ_j but not on the volume measure.

We make the following assumptions:

(0) Given P_{ij} and given $\theta_j=\theta$ the RV N_{ij} is Poisson with parameter $\lambda(\theta,P_{ij})=$ $=a(\theta)\cdot P_{ij}$.
(i) Given θ_j ($j=1,2,\ldots,N$) all *RV* N_{ij}, $Y_{ij}^{(\nu)}$ ($\nu=1,2,\ldots$; $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,N$) are independent.
(ii) Given $\theta_j=\theta$ the RV $Y_{ij}^{(\nu)}$ ($i=1,2,\ldots,n$; $\nu=1,2,\ldots$) have the same distribution $F_\theta(y)=\text{Prob}\,(Y_{ij}^{(\nu)}\leqslant y|\theta)$.
(iii) $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_N$ are i.i.d. with distribution $U(\theta)$ which is called the structure function.

Note: It is not required that claim amount and claim number be independent. They have only to be conditionally independent.

1.2 *Derived quantities and notations*

Let g be any real function of one real variable.

Model I

Let be $G_{ij}=g(X_{ij})$.

Notation

$$\mu_X(\theta_j) = E[X_{ij}|\theta_j] \qquad \mu_G(\theta_j) = E[G_{ij}|\theta_j]$$

$$\mu_X = E[X_{ij}] \qquad \mu_G = E[G_{ij}]$$

$$u_X = E[\text{Var}\,[X_{ij}|\theta_j]] \qquad u_G = E[\text{Var}\,[G_{ij}|\theta_j]]$$

$$v_X = \text{Var}\,[\mu_X(\theta_j)] \qquad v_G = \text{Var}\,[\mu_G(\theta_j)]$$

$$w_G = \text{Cov}\,[\mu_G(\theta_j),\, \mu_X(\theta_j)].$$

Model II

Let be $G_{ij}^{(v)} = g(Y_{ij}^{(v)})$.

$$S_{ij} = \sum_{v=1}^{N_{ij}} Y_{ij}^{(v)}$$ total claim amount of risk j in the year i

$$X_{ij} = \frac{S_{ij}}{P_{ij}}$$ claim rate

$$T_{ij} = \sum_{v=1}^{N_{ij}} G_{ij}^{(v)}$$

$$Z_{ij} = \frac{T_{ij}}{P_{ij}}$$

Notation

$$\mu_X(\theta_j) = E[X_{ij}|\theta_j,\, P_{ij}] \qquad \mu_Z(\theta_j) = E[Z_{ij}|\theta_j,\, P_{ij}]$$

$$\mu_X = E[X_{ij}] \qquad \mu_Z = E[Z_{ij}]$$

$$u_X = E[\text{Var}\,[X_{ij}|\theta_j,\, P_{ij}=1]] \qquad u_Z = E[\text{Var}\,[Z_{ij}|\theta_j,\, P_{ij}=1]]$$

$$v_X = \text{Var}\,[\mu_X(\theta_j)] \qquad v_Z = \text{Var}\,[\mu_Z(\theta_j)]$$

$$w_Z = \text{Cov}\,[\mu_X(\theta_j),\, \mu_Z(\theta_j)].$$

Note: $E[\text{Var}\,[X_{ij}|\theta_j,\, P_{ij}]] = \dfrac{u_X}{P_{ij}}$

$$E[\text{Var}\,[Z_{ij}|\theta_j,\, P_{ij}]] = \frac{u_Z}{P_{ij}}$$

1.3 *Semilinear credibility estimator*

Problem: To find the estimator $\hat{\mu}_j$ of $\mu_X(\theta_j)$ which is linear in the RV G_{ij} (model I) respectively linear in the RV Z_{ij} (model II) and which has minimum quadratic loss among all these linear estimates. (Quadratic loss $=E[(\hat{\mu}_j-\mu_X(\theta_j))^2]$).

Model I

Theorem

$$\hat{\mu}_j=\mu_X+\alpha_G\cdot(\bar{G}_{\cdot j}-\mu_G) \tag{1}$$

where

$$\alpha_G=\frac{n\cdot w_G}{n\cdot v_G+u_G} \qquad \bar{G}_{\cdot j}=\frac{1}{n}\sum_i G_{ij}$$

$$E[(\hat{\mu}_j-\mu_X(\theta_j))^2]=v_X-\alpha_G\cdot w_G. \tag{2}$$

This theorem is well known (see [3]).

Model II

Theorem

$$\hat{\mu}_j=\mu_X+\alpha_Z^{(j)}\cdot(\bar{Z}_{\cdot j}-\mu_Z) \tag{3}$$

where

$$\alpha_Z^{(j)}=\frac{P_{\cdot j}w_Z}{P_{\cdot j}v_Z+u_Z} \qquad \bar{Z}_{\cdot j}=\sum_i\frac{P_{ij}}{P_{\cdot j}}Z_{ij} \qquad P_{\cdot j}=\sum_i P_{ij}$$

$$E[(\hat{\mu}_j-\mu_X(\theta_j))^2]=v_X-\alpha_Z^{(j)}w_Z. \tag{4}$$

Chapter 2: Optimal trimming, if the structure function $U(\theta)$ and the distribution of the claim data are known

2.1 *Problem*

In 1.2 and 1.3 g was any determinate function. Here we admit a certain class of functions, the class C_t of the trimming functions:

$$C_t=\{g_M|g_M(x)=\min(M,x),\ M\in\mathbb{R}\}.$$

According to (1) resp. to (3) we get for each trimming point M a semilinear credibility estimator. In order to indicate that the data are transformed by the trimming function g_M, we use the same notation as before and add M in brackets; e.g. $\hat{\mu}_j(M)$, $\alpha_{G(M)}$, $v_{G(M)}$ etc. in model I, $\alpha^{(j)}_{Z(M)}$, $v_{Z(M)}$ etc. in model II. Here the question arises as to which estimator within this class is optimal with respect to quadratic loss, in other words, which is the optimal trimming point M_0. According to (2) resp. to (4) we get:

model I: M_0 is an optimal trimming point, if

$$\max_M R(M) = \max_M \alpha_{G(M)} w_{G(M)} = R(M_0);$$

model II: $M_0^{(j)}$ is an optimal trimming point for contract j, if

$$\max_M R_j(M) = \max_M \alpha^{(j)}_{Z(M)} w_{Z(M)} = R_j(M_0^{(j)}).$$

Note: – it is possible, that $M_0 = \infty$ resp. $M_0^{(j)} = \infty$; that means one ought not to trim.

– if $P._j \neq P._k$ in model II, then the optimal trimming points for contract j and contract k are in general different.

2.2 *The calculation of the optimal trimming point, if the claim-data X_{ij} (model I) resp. the claim amounts $Y_{ij}^{(v)}$ (model II) only assume a finite number of* values

Model I

The RV X_{ij} are supposed to assume only the values $\{x_1, x_2, \ldots, x_t\}$ with $x_1 < x_2 < \ldots < x_t$. After some derivation we obtain:

$$R(M) = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad M \leqslant x_1 \\ R(x_2) & \text{for} \quad x_1 < M \leqslant x_2 \\ f_r(M) & \text{for} \quad x_r \leqslant M \leqslant x_{r+1} \qquad r = 2, 3, \ldots, t-1 \\ R(x_t) & \text{for} \quad x_t \leqslant M. \end{cases} \tag{5}$$

Thereby

$$f_r(M) = \frac{g_r(M)}{h_r(M)} = \frac{n \cdot (a_r + b_r M)^2}{c_r + d_r M + e_r M^2}$$

with $h_r(M) > 0$ for $M \in \mathbb{R}$ and thereby are $a_r, b_r, \ldots, e_r$ constants, which can be calculated from the values $x_1, x_2, \ldots, x_t$ and from the probabilities $p_r =$

$=\text{Prob}\,(X_{ij}=x_r)$ and $p_{rs}=\text{Prob}\,(X_{11}=x_r, X_{21}=x_s)$ $r,s=1,2,\ldots,t$. From the above we obtain:

Theorem

The optimal trimming point can be calculated as follows:

$$M_0=M_{0k} \qquad \text{where} \qquad R(M_{0k})=\max_{r=2,3,\ldots,t-1} R(M_{0r})$$

$$M_{0r}=\begin{cases} M_r=\dfrac{a_r d_r-2b_r c_r}{b_r d_r-2a_r e_r} & \text{if} \quad M_r\in[x_r,x_{r+1}] \\ x_r & \text{if} \quad M_r\notin[x_r,x_{r+1}] \quad \text{and} \quad R(x_r)>R(x_{r+1}) \\ x_{r+1} & \text{if} \quad M_r\notin[x_r,x_{r+1}] \quad \text{and} \quad R(x_r)\leqslant R(x_{r+1}) \end{cases}$$

$$E[(\hat{\mu}_j(M_0)-\mu_X(\theta_j))^2]=v_X-R(M_0).$$

Model II

The claim amounts $Y_{ij}^{(v)}$ are supposed to assume only the discrete values $\{y_1,y_2,\ldots,y_t\}$ with $y_1<y_2<\ldots<y_t$. Through calculation we get:

$$R_j(M)=\begin{cases} R_j(y_1) & \text{for} \quad M\leqslant y_1 \\ \dfrac{P_{\cdot j}(a_r+b_r M)^2}{c_r^{(j)}+d_r^{(j)}M+e_r^{(j)}M^2} & \text{for} \quad y_r\leqslant M\leqslant y_{r+1} \quad r=1,2,\ldots,t-1 \\ R_j(y_t) & \text{for} \quad y_t\leqslant M. \end{cases} \tag{6}$$

Thereby the constants $a_r, b_r, \ldots, e_r^{(j)}$ are functions of the following quantities: $P_{\cdot j}$, y_r, $p_r=\int a(\theta)p_\theta(y_r)dU(\theta)$, $q_{rs}=\int a^2(\theta)p_\theta(y_r)p_\theta(y_s)dU(\theta)$ with $p_\theta(y_r)=$ $=\text{Prob}\,(Y_{ij}^{(v)}=y_r|\theta_j=\theta)$ $r,s=1,2,\ldots,t$. Thus we obtain:

Theorem

The optimal trimming point $M_0^{(j)}$ for contract j can be calculated as follows:

$$M_0^{(j)}=M_{0k}^{(j)} \qquad \text{whereby} \qquad R_j(M_{0k}^{(j)})=\max_{r=1,\ldots,t-1} R_j(M_{0r}^{(j)})$$

$$M_{0r}^{(j)}=\begin{cases} M_r=\dfrac{a_r d_r^{(j)}-2b_r c_r^{(j)}}{b_r d_r^{(j)}-2a_r e_r^{(j)}} & \text{if} \quad M_r\in[y_r,y_{r+1}] \\ y_r & \text{if} \quad R_j(y_r)>R_j(y_{r+1}) \quad \text{and} \quad M_r\notin[y_r,y_{r+1}] \\ y_{r+1} & \text{if} \quad R_j(y_r)\leqslant R_j(y_{r+1}) \quad \text{and} \quad M_r\notin[y_r,y_{r+1}] \end{cases}$$

$$E[(\hat{\mu}_j(M_0^{(j)})-\mu_X(\theta_j))^2]=v_X-R_j(M_0^{(j)}).$$

2.3 *Numerical examples*

For reasons of simplicity examples in this article are confined to model I (in [4] the reader can also find examples to model II). We use the following abbreviations and notations:

$$\mu_X(\theta)=E[X_{ij}|\theta_j=\theta] \qquad \sigma_X^2(\theta)=\text{Var}\,[X_{ij}|\theta_j=\theta]$$

n = number of observed years $\qquad M_0$ = optimal trimming point

$\alpha_{G(M_0)}$ = factor in estimation (1) with optimal trimming

$\alpha_{G(\infty)}$ = factor in estimation (1) without trimming = usual credibility-factor

$$QM=E[(\hat{\mu}_j(M_0)-\mu_X(\theta_j))^2]=\text{quadratic loss with optimal trimming}$$

$$QO=E[(\hat{\mu}_j(\infty)-\mu_X(\theta_j))^2]=\text{quadratic loss without trimming.}$$

Example 1

θ	Prob $(\theta_j=\theta)$	Prob $(X_{ij}=x\|\theta_j=\theta)$				$\mu_X(\theta)$	$\sigma_X^2(\theta)$
		$x=0$	$x=2$	$x=4$	$x=6$		
1	0.25	0.55	0.25	0.10	0.10	1.5	3.95
2	0.25	0.30	0.30	0.25	0.15	2.5	4.35
3	0.25	0.10	0.30	0.35	0.25	3.5	3.55
4	0.25	0.05	0.15	0.30	0.50	4.5	3.15

Using the theorem in 2.2 we get:

n	M_0	$\mu_{G(M_0)}$	μ_X	$\alpha_{G(M_0)}$	$\alpha_{G(\infty)}$	QM	QO	QM/QO
1	4.89	2.722	3.0	0.300	0.250	0.9292	0.9375	0.99
3	4.95	2.737	3.0	0.589	0.500	0.6147	0.6250	0.98
5	5.00	2.751	3.0	0.726	0.625	0.4579	0.4687	0.98

A comparison of QM with QO shows, that the reduction of the quadratic loss by the optimal trimming is rather slight. In this case trimming is not worthwhile.

Example 2 derives from example 1 as follows: The RV X_{ij} can assume the values 0, 2, 4, 6, 40. Given $\theta_j=\theta$, the value 40, representing a big claim, occurs with the probability q_θ whereas with probability $(1-q_\theta)$ the RV X_{ij} have the same conditional distribution as in example 1.

Example 2

θ	Prob $(\theta_j=\theta)$	Prob $(X_{ij}=x\mid\theta_j=\theta)$ $x=0$	$x=2$	$x=4$	$x=6$	q_θ $x=40$	$\mu_X(\theta)$	$\sigma_X^2(\theta)$
1	0.25	0.5445	0.2475	0.0990	0.0990	0.0100	1.885	18.58
2	0.25	0.2940	0.2940	0.2450	0.1470	0.0200	3.250	31.82
3	0.25	0.0970	0.2910	0.3395	0.2425	0.0300	4.595	42.21
4	0.25	0.0480	0.1440	0.2880	0.4800	0.0400	5.920	51.42

Using the theorem in 2.2 we get:

n	M_0	$\mu_{G(M_0)}$	μ_X	$\alpha_{G(M_0)}$	$\alpha_{G(\infty)}$	QM	QO	QM/QO
1	4.83	2.750	3.912	0.404	0.059	1.6848	2.1278	0.79
3	4.89	2.767	3.912	0.794	0.158	1.1173	1.9029	0.59
5	4.95	2.782	3.912	0.980	0.239	0.8367	1.7210	0.49

The quotient QM/QO shows clearly that the estimator with optimal trimming has a much smaller quadratic loss than the usual credibility estimator without trimming. Furthermore we see that the factor $\alpha_{G(\infty)}$ is much smaller in example 2 than in example 1. This is a direct consequence of the big claim of 40, that can occur in example 2, although the probability of such an occurrence is small. As a result of this, the credibility estimator without trimming does not take observed experience sufficiently into account, which of course increases quadratic loss. In order to examine the effect of the trimming on the estimated values we look at some concrete data taken from a simulation (400 contracts) of the example 2 with $n=3$ observed years. Thereby

estimation 1 = credibility estimation without trimming
$=3.912+0.158\cdot(\bar{X}_{\cdot j}-3.912)$

estimation 2 = credibility estimation with optimal trimming
$=3.912+0.794\cdot(\bar{G}_{\cdot j}(4.89)-2.767)$

estimation 3 $=E[\mu_X(\theta_j)\mid X_{1j},X_{2j},X_{3j}]=$ best estimator with respect to quadratic loss (it can also be calculated in this example and is added for comparison).

Risk 6 has a good claim experience, risk 288 a bad one. But because the claim experience is not taken sufficiently into consideration by estimator 1, the estimated values are too close to μ_X (expectation in the collective). On the other hand

contract Nr.	claims' data in the observed years			estimations 1	2	3
6	0	2	2	3.504	2.775	2.782
28	0	40	2	5.512	3.540	3.259
30	4	6	40	5.934	5.364	5.286
288	6	6	4	4.138	5.364	5.439

contract 28 had a big claim in the second year but otherwise a good claim experience. In spite of the small credibility factor $\alpha_{G(\infty)}$ the value resulting from estimator 1 is much too high. By the optimal trimming the big claim is given less weight and the estimated value is correspondingly smaller. Moreover note the same values given by estimator 2 for contract 30 and contract 288.

2.4 *Approximate calculation of the optimal trimming point*

According to 2.1 M_0 (resp. $M_0^{(j)}$) is an optimal trimming point, if the function $R(M)$ (resp. $R_j(M)$) takes its maximum at M_0 (resp. at $M_0^{(j)}$). In 2.2 we have derived an explicit method for calculating the optimal trimming point in the case the RV X_{ij} (resp. $Y_{ij}^{(v)}$) can assume only a finite number of values. If this condition is no longer valid, then we cannot come to a general solution.
An obvious suggestion is to take the RV X_{ij} (resp. $Y_{ij}^{(v)}$) as discrete values. Then we can apply the method described in 2.2 to the discrete random variables. It can be shown that in this way we can get a trimming point which is nearly optimal. The reader who is interested in the exact results and in the details is referred to [4]. Moreover some properties of $u_{G(M)}$, $v_{G(M)}$, $w_{G(M)}$ (model I) (resp. of $u_{Z(M)}$, $v_{Z(M)}$, $w_{Z(M)}$ (model II)) as functions of the trimming point M are also proved in [4].

Chapter 3: Optimal distribution-free trimming

In practice the structure function $U(\theta)$ and the distribution of the claim data are very often unknown. The parameters occurring in the estimators have to be estimated themselves from the data.

3.1 *A distribution-free method for optimal trimming in model I*

Let us assume that $U(\theta)$ and the distributions $F_\theta(x)$ are unknown. If we replace μ_X and $\mu_{G(M)}$ in (1) by their unbiased linear estimators with smallest variance, then we get:

$$\tilde{\mu}_j(M) = \bar{X}.. + \alpha_{G(M)}(\bar{G}._j(M) - \bar{G}..(M)) \tag{7}$$

where

$$\bar{X}.. = \frac{1}{nN} \cdot \sum_{i,j} X_{ij} \qquad \bar{G}..(M) = \frac{1}{nN} \cdot \sum_{i,j} G_{ij}(M).$$

After further development we obtain:

$$E[(\tilde{\mu}_j(M) - \mu_X(\theta_j))^2] = E[(\bar{X}.. - \mu_X(\theta_j))^2] - \frac{N-1}{N} \alpha_{G(M)} w_{G(M)}. \tag{8}$$

It follows: M_0 is an optimal trimming point with regard to (1)
$\Leftrightarrow$ M_0 is an optimal trimming point with regard to (7).
But now the parameters occurring in $\alpha_{G(M)}$ are unknown. We will proceed as follows:
we estimate (for all $M \in \mathbb{R}$) the parameters $u_{G(M)}, v_{G(M)}, w_{G(M)}$ from the data. By replacing these parameters in $\alpha_{G(M)}$ and $R(M)$ by their estimators we get the estimators $\hat{\alpha}_{G(M)}$ and $\hat{R}(M)$. We estimate the optimal trimming point by the point $\hat{M}_0$, at which $\hat{R}(M)$ takes its maximum. Finally we use (7) as estimator for $\mu_X(\theta_j)$ by replacing M with $\hat{M}_0$ and $\alpha_{G(M)}$ with $\hat{\alpha}_{G(\hat{M}_0)}$.
In order to simplify the notation we write in the following only G_{ij} instead of $G_{ij}(M)$ etc. The following estimators for the parameters u_G, v_G and w_G are used:

$$\hat{u}_G = \frac{1}{N} \sum_j \frac{1}{n-1} \sum_i (G_{ij} - \bar{G}._j)^2$$

$$\hat{\hat{v}}_G = \max(\hat{v}_G, 0)$$

where

$$\hat{v}_G = \frac{1}{N-1} \sum_j (\bar{G}._j - \bar{G}..)^2 - \frac{1}{n} \frac{1}{N} \cdot \sum_j \frac{1}{n-1} \sum_i (G_{ij} - \bar{G}._j)^2$$

$$\hat{\hat{v}}_X = \max(\hat{v}_X, 0)$$

where

$$\hat{v}_X = \frac{1}{N-1} \sum_j (\bar{X}._j - \bar{X}..)^2 - \frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_j \frac{1}{n-1} \sum_i (X_{ij} - \bar{X}._j)^2$$

$$\hat{\hat{w}}_G = \text{sign}(\hat{w}_G) \cdot \sqrt{\min(\hat{w}_G^2, \hat{\hat{v}}_X \hat{\hat{v}}_G)}$$

where

$$\hat{w}_G = \frac{1}{N-1} \sum_j (\bar{X}_{\cdot j} - \bar{X}_{\cdot\cdot})(\bar{G}_{\cdot j} - \bar{G}_{\cdot\cdot})$$

$$-\frac{1}{n} \frac{1}{N} \sum_j \frac{1}{n-1} \sum_i (X_{ij} - \bar{X}_{\cdot j})(G_{ij} - \bar{G}_{\cdot j}).$$

Note:

- it is easy to see that $\hat{v}_X$, $\hat{v}_G$ and $\hat{w}_G$ are unbiased.
- given any realisation of the RV X_{ij}, the point, at which $\hat{R}(M)$ takes its maximum, can be exactly calculated in a similar way as that in the theorem in 2.2. In practice however one would calculate $\hat{R}(M)$ at sufficiently many points and then one would estimate M_0 from the behaviour of $\hat{R}(M)$ at these points. This is justified by the fact that usually the true function $R(M)$ is rather flat in the environment of M_0 and $\hat{R}(M)$ is only an estimation of $R(M)$ anyway.

3.2 *A distribution-free method for optimal trimming in model II*

Let the structure function $U(\theta)$ and the distributions $F_\theta(y)$ be unknown. In order to simplify the notation we write in the following only Z_{ij} instead of $Z_{ij}(M)$ etc. The linear unbiased estimators of μ_X and μ_Z with smallest variance are:

$$\tilde{\mu}_X = \tilde{X}_{\cdot\cdot} = \sum_j \frac{\alpha_X^{(j)}}{\alpha_X} \bar{X}_{\cdot j} \qquad \tilde{\mu}_Z = \tilde{Z}_{\cdot\cdot} = \sum_j \frac{\alpha_Z^{(j)}}{\alpha_Z} \bar{Z}_{\cdot j}$$

where

$$\alpha_X = \sum_j \alpha_X^{(j)} \qquad \alpha_Z = \sum_j \alpha_Z^{(j)}$$

($\alpha_X^{(j)}$, $\alpha_Z^{(j)}$, $\bar{X}_{\cdot j}$, $\bar{Z}_{\cdot j}$ had been defined in 1.3).

If we replace in (3) μ_X and μ_Z by the above estimators then we get:

$$\tilde{\mu}_j(M) = \tilde{X}_{\cdot\cdot} + \alpha_{Z(M)}^{(j)} (\bar{Z}_{\cdot j}(M) - \tilde{Z}_{\cdot\cdot}(M)). \tag{9}$$

The optimal trimming point with regard to (9) is in general not identical with the optimal trimming point with regard to (3). If however $\dfrac{\max_j P_{\cdot j}}{P_{\cdot\cdot}} \ll 1$ (i.e. no

contract in the portfolio is dominating), then an optimal trimming point for (3) is also approximately optimal with regard to (9). Therefore we will proceed as follows:
we estimate (for all $M \in \mathbb{R}$) the parameters $u_{Z(M)}$, $v_{Z(M)}$, $w_{Z(M)}$ from the data. By replacing these parameters in $\alpha^{(j)}_{Z(M)}$ and $R_j(M)$ by their estimators, we get the estimators $\hat{\alpha}^{(j)}_{Z(M)}$ and $\hat{R}_j(M)$. We estimate the optimal trimming point for contract j by the point $\hat{M}_0^{(j)}$, at which $\hat{R}_j(M)$ takes its maximum. Finally we use (9) as estimator for $\mu_X(\theta_j)$ by replacing M with $\hat{M}_0^{(j)}$ and $\alpha^{(j)}_{Z(M)}$ with $\hat{\alpha}^{(j)}_{Z(\hat{M}_0^{(j)})}$.
We introduce the following quantities:

$$V_{XX}=\sum_j \frac{P_{\cdot j}}{P_{\cdot\cdot}}(\bar{X}_{\cdot j}-\bar{X}_{\cdot\cdot})^2 \qquad U_{XX}=\frac{1}{P_{\cdot\cdot}}\sum_j\sum_i\sum_{v=1}^{N_{ij}}(Y_{ij}^{(v)})^2$$

$$V_{ZX}=\sum_j \frac{P_{\cdot j}}{P_{\cdot\cdot}}(\bar{X}_{\cdot j}-\bar{X}_{\cdot\cdot})(\bar{Z}_{\cdot j}-\bar{Z}_{\cdot\cdot}) \qquad U_{ZX}=\frac{1}{P_{\cdot\cdot}}\sum_j\sum_i\sum_{v=1}^{N_{ij}}G_{ij}^{(v)}Y_{ij}^{(v)}$$

$$V_{ZZ}=\sum_j \frac{P_{\cdot j}}{P_{\cdot\cdot}}(\bar{Z}_{\cdot j}-\bar{Z}_{\cdot\cdot})^2 \qquad U_{ZZ}=\frac{1}{P_{\cdot\cdot}}\sum_j\sum_i\sum_{v=1}^{N_{ij}}(G_{ij}^{(v)})^2$$

where

$$\bar{X}_{\cdot\cdot}=\sum_j\frac{P_{\cdot j}}{P_{\cdot\cdot}}\bar{X}_{\cdot j} \qquad \bar{Z}_{\cdot\cdot}=\sum_j\frac{P_{\cdot j}}{P_{\cdot\cdot}}\bar{Z}_{\cdot j} \qquad P_{\cdot\cdot}=\sum_j P_{\cdot j}$$

($\bar{X}_{\cdot j}$, $\bar{Z}_{\cdot j}$, $P_{\cdot j}$ had been defined in 1.3)

$$a=\sum_j\frac{P_{\cdot j}}{P_{\cdot\cdot}}\left(1-\frac{P_{\cdot j}}{P_{\cdot\cdot}}\right)$$

The following estimators for the parameters u_Z, v_Z, w_Z are used:

$\hat{u}_Z=U_{ZZ}$

$\hat{\hat{v}}_Z=\max(\hat{v}_Z, 0)$ where $\hat{v}_Z=\frac{1}{a}\left(V_{ZZ}-(N-1)\frac{U_{ZZ}}{P_{\cdot\cdot}}\right)$

$\hat{\hat{v}}_X=\max(\hat{v}_X, 0)$ where $\hat{v}_X=\frac{1}{a}\left(V_{XX}-(N-1)\frac{U_{XX}}{P_{\cdot\cdot}}\right)$.

$\hat{\hat{w}}_Z=\operatorname{sign}(\hat{w}_Z)\cdot\sqrt{\min(\hat{w}_Z^2, \hat{\hat{v}}_X\hat{\hat{v}}_Z)}$ where $\hat{w}_Z=\frac{1}{a}\left(V_{ZX}-(N-1)\frac{U_{ZX}}{P_{\cdot\cdot}}\right)$

Note:
– It is easy to see that $\hat{u}_Z$, $\hat{v}_Z$, $\hat{w}_Z$ are unbiased.

- Given any realisation of the claim data, the point at which $\hat{R}_j(M)$ takes its maximum can be calculated in a similar way as that in the theorem in 2.2. In practice however one would calculate $\hat{R}_j(M)$ at sufficiently many points and then one would estimate the optimal trimming point from the behaviour of $\hat{R}_j(M)$ at these points.
- It may happen that for some reason one wants to trim only above a fixed value M_f. The optimal trimming point in the set $A=\{M \mid M \geqslant M_f\}$ can be estimated with the same method. In this case it is not necessary to know the amount of each claim separately. It is then sufficient to know:

i) $S_{ij} = \sum_{v=1}^{N_{ij}} Y_{ij}^{(v)}$

ii) $Q_{ij} = \sum_{v=1}^{N_{ij}} (Y_{ij}^{(v)})^2$

iii) the exact values of such claim amounts, which are greater than M_f.

Dr. Alois Gisler
Winterthur-Versicherungen
General Guisan-Strasse 40
8401 Winterthur

Bibliography

[1] Bühlmann, H.: Mathematical Methods in Risk Theory, Springer-Verlag, Berlin (1970).
[2] Bühlmann, H. und Straub, E.: Glaubwürdigkeit für Schadensätze, BASA, vol. 70/1 (1970).
[3] De Vylder, F.: Optimal Semilinear Credibility, BASA, vol. 76/1 (1976).
[4] Gisler, Alois: Optimales Stutzen von Beobachtungen im Credibility-Modell, Dissertation ETH Nr. 6556 (1980).
BASA = Bulletin of the Association of Swiss Actuaries.

Zusammenfassung

In diesem Artikel wird gezeigt, wie die Credibility-Schätzung durch optimales Stutzen von Beobachtungen verbessert werden kann. Dadurch werden insbesondere verzerrende Einflüsse beseitigt, die durch seltenes Auftreten von Grossschäden verursacht werden.

Summary

It is shown in this article how the credibility-estimator can be improved by optimal trimming of data. In particular distorting effects caused by seldom occurrence of big claims are eliminated through this process.

Résumé

L'article montre comment l'estimateur de la crédibilité peut être amélioré par une troncature optimale des observations. Ce procédé permet en particulier d'éliminer certains effects perturbateurs dus à la rareté de l'apparition des gros sinistres.

Hans A. Ammeter, Bern

Potenzmittel-Credibility

64	26	33	23	30	70	36	67	20	
35	69	19	66	25	32	22	29	72	
24	28	71	34	68	21	65	27	31	
8	42	73	39	79	5	76	2	45	
78	1	44	7	41	75	38	81	4	
37	80	6	77	3	43	9	40	74	
51	55	17	61	14	48	11	54	58	
10	53	60	50	57	16	63	13	47	*4-dimensionales*
62	15	46	12	52	59	49	56	18	*magisches Quadrat*

Der folgende Artikel enthält wesentliche Resultate meiner Dissertation, welche ich in den Jahren 1978/80 unter der Leitung von Herrn Dr. Straub ausgearbeitet habe.

1 Modell

Wir betrachten ein Versicherungsportefeuille, welches in Tarife und innerhalb der Tarife in Tarifklassen unterteilt ist. Diese Strukturierung werde durch die Parameter der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer $\sum_{j=1}^{N} n_j$-dimensionalen Zufallsvariablen T induziert. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sehen wir dabei die (i,j)-te Variable T_{ij}, $i \in \{1, \ldots, n_j\}$ $j \in \{1, \ldots, N\}$, etwa als

Schadenfrequenz = Anzahl Schadenfälle pro Bestandeseinheit
Schadenquote = Schadensumme pro Prämie
Schadensatz = Schadensumme pro Versicherungssumme

einer wohldefinierten Risikogesamtheit j in einer bestimmten Zeiteinheit i.
Eine Tarifklasse j sei einerseits durch einen Parameter ϑ_j der Verteilungsfunktion von ${}^jT = (T_{1j}, \ldots, T_{n_j j})$ charakterisiert, welcher als Realisation einer Strukturvariablen θ_j interpretiert wird, und andererseits durch die nicht aleatorischen, fixen Parameter dieser Verteilungsfunktion, die sogenannten Tarifparameter erster Ordnung.

Ein Tarif werde sowohl durch die Tarifparameter erster Ordnung als auch durch die Parameter der Strukturverteilung determiniert, wobei wir letztere als Tarifparameter zweiter Ordnung bezeichnen wollen.
Während also verschiedene Tarifklassen im allgemeinen durch differierende ϑ_j spezifiziert sind, werden alle Klassen desselben Tarifes durch identische Tarifparameter erster Ordnung markiert.
Beispielsweise wäre etwa in der Feuerversicherung die Zufallsvariable «Schadensatz 1980 der Hausratversicherungen im Kanton Bern» durch die Fixkomponente «Hausratversicherungen» sowie durch das Strukturmerkmal «Kanton Bern» geprägt.

2 Die inhomogene Potenzmittel-Credibilityformel

Wir nennen das Paar $(P_{\omega_p}^{T|\vartheta}, \Lambda_{\omega_\lambda}^{\theta})_{\omega_p \in \Omega_p, \omega_\lambda \in \Omega_\lambda}$ einen Tarif, wobei

$(P_{\omega_p}^{T\|\vartheta})_{\omega_p \in \Omega_p}$	eine Familie von Wahrscheinlichkeitsverteilungen
$(\Lambda_{\omega_\lambda}^{\theta})_{\omega_\lambda \in \Omega_\lambda}$	eine Familie von Strukturverteilungen und
$\Omega_p \times \Omega_\lambda$	einen Tarifparameterraum bezeichnet.

Weiter sei

$T\|\vartheta$	Zufallsvektor in $\mathbb{R}^{\sum_1^N n_j}$
$T_{ij}\|\vartheta_j$	unabhängig $P_{\omega_p}^{T_{ij}\|\vartheta_j}$-verteilt, $i=1,\ldots,n_j$, $j=1,\ldots,N$
θ	Zufallsvektor in $\mathbb{R}^N$
θ_j	unabhängig, identisch $\Lambda_{\omega_\lambda}^{\theta_j}$-verteilt
$h_f(\vartheta_k)$	$E[f(T_{ik})\|\vartheta_k]$, speziell $\mu(\vartheta_k)=E[T_{ik}\|\vartheta_k]$
N	Anzahl Tarifklassen
n_j	Anzahl Zufallsvariablen in der j-ten Tarifklasse, $j=1,\ldots,N$.

Jewell zeigte in seiner Arbeit [4], dass die einparametrische Exponentialfamilie, zusammen mit der natürlich konjugierten Strukturverteilung [3] und unter gewissen Regularitätsbedingungen [5], die verteilungstheoretische Grundlage der exakt linearen Credibilityformeln darstellt. Von diesem Tarif wollen wir ausgehen und zwei Tarifparameter erster Ordnung $(\alpha, \delta) \in \mathbb{R}^2$ einführen.

Definition

Ein Tarif $(P_{\omega_p}^{T|\vartheta}, \Lambda_{\omega_\lambda}^{\theta})$ mit $P_{\omega_p}^{jT|\vartheta_j}$ gegeben durch

$$p_{\omega_p}({}^j t|\vartheta_j) = \prod_{i=1}^{n_j} \frac{a(t_{ij}|\delta)\, e^{-\vartheta_j g(t_{ij}|\alpha)}}{c(\vartheta_j|\omega_p)}$$

wobei $c(\vartheta_j|\omega_p)=\int a(t_{ij}|\delta)\, e^{-\vartheta_j g(t_{ij}|\alpha)} dt_{ij}$, $\vartheta_j \in A_j \subset \mathbb{R}$, sowie $\omega_p=(\alpha, \delta)$ und $\Lambda_{\omega\lambda}^{\vartheta_j}$ gegeben durch

$$\lambda_{\omega\lambda}(\vartheta_j)=\frac{c(\vartheta_j|\omega_p)^{-\gamma}e^{-\beta\vartheta_j}}{d(\omega_\lambda)}$$

wobei $d(\omega_\lambda)=\int c(\vartheta_j|\omega_p)^{-\gamma}e^{-\beta\vartheta_j}d\vartheta_j$ sowie $\omega_\lambda=(\omega_p, \gamma, \beta)$ mit $\gamma, \beta>0$,

in welchem $a(\cdot)$, $g(\cdot)$ die Jewellschen Regularitätsbedingungen erfüllen, insbesondere

$$\lambda_{\omega\lambda}^{(r)}(\vartheta_j)|_{A_j} := \int_{A_j} \lambda_{\omega\lambda}^{(r+1)}(\vartheta_j)\, d\vartheta_j=0 \qquad r=0,1$$

heisst natürlicher Exponentialtarif.

Zwei Bemerkungen mögen diese Definition ergänzen:

i) Die Abhängigkeit der Funktionen $a(\cdot)$ und $g(\cdot)$ von den Tarifparametern δ beziehungsweise α kann als echte Parametrisierung, etwa

$$a(t_{ij}|\delta):=t_{ij}^{\delta}$$

oder als Indexierung, zum Beispiel

$$a(t_{ij}|\delta):=a_\delta(t_{ij}):=\ln t_{ij}$$

verstanden werden.

ii) Die natürlich konjugierte Strukturverteilung hat die Eigenschaft, dass die a posteriori Verteilung $p(\vartheta_j|{}^jt)$ von der gleichen Form ist wie die Strukturverteilung $\lambda(\vartheta_j)$, jedoch mit den Parametern $\bar{\gamma}=\gamma+n_j$, $\bar{\beta}=\beta+\sum_{i=1}^{n_j} g(t_{ij}|\alpha)$. Damit wird $E[h_f(\vartheta_k)|{}^kt]$ mit den Parametern γ, β zu $E[f(T_{ik})]$ mit den Parametern $\gamma+n_k$, $\beta+\sum_{i=1}^{n_k} g(t_{ik}|\alpha)$.

Die exakte Credibilityformel der natürlichen Exponentialtarife, $E[h_f(\vartheta_k)|{}^kt]$, als Schätzung von $E[f(T_{ik})|\vartheta_k]$ $i\in\{1,\ldots,n_k\}$, interpretieren wir nun als Funktion $r(\omega_p, \omega_\lambda, {}^kt)$.

Definition

$r(\cdot)$ heisst credible-suffizient, falls aus $r(\omega_p, \omega_\lambda, {}^kt)=r(\omega_p', \omega_\lambda', {}^kt)$, mit $\omega_p'\in\Omega_p$ und $\omega_\lambda'\in\Omega_\lambda$, für alle ${}^kt$, folgt: $(\omega_p, \omega_\lambda)=(\omega_p', \omega_\lambda')$.

Eine credible-suffiziente, exakte Credibilityformel enthält also die volle Strukturinformation eines in unserem Sinne strukturierten Portefeuilles und ist damit als Schätzwert für Tarifklassenprämien geeignet.

Aussage

In natürlichen Exponentialtarifen ist $E[h_g(\vartheta_k)|^k t]$ nicht credible-suffizient.

Beweis

Der Beweisidee von Jewell [4] folgend ist

$$E[g(T_{ik}|\alpha)|\vartheta_k] = -\frac{\dfrac{d}{d\vartheta_k}\, c(\vartheta_k|\omega_p)}{c(\vartheta_k|\omega_p)}$$

$$\frac{d}{d\vartheta_k}\, \lambda_{\omega\,\lambda}(\vartheta_k) = -\left(\gamma\,\frac{\dfrac{d}{d\vartheta_k}\, c(\vartheta_k|\omega_p)}{c(\vartheta_k|\omega_p)} + \beta\right)\lambda_{\omega\,\lambda}(\vartheta_k)$$

damit

$$\int_{A_k} \lambda'_{\omega\,\lambda}\;(\vartheta_k)\, d\vartheta_k = \gamma E\,[g(T_{ik}|\alpha)] - \beta = 0$$

und aus der Bemerkung ii)

$$E[h_g(\vartheta_k)|^k t] = \frac{\beta + \sum\limits_{i=1}^{n_k} g(t_{ik}|\alpha)}{\gamma + n_k}, \text{ unabhängig von } \delta.$$

Korollar

$$\gamma = \frac{E[\mathrm{Var}\;[g(T_{ik}|\alpha)|\vartheta_k]}{\mathrm{Var}\;[E[g(T_{ik}|\alpha)|\vartheta_k]} > 0, \text{ denn es ist analog}$$

$$\int_{A_k} \lambda''_{\omega\,\lambda}\;(\vartheta_k)\, d\vartheta_k = E[\mathrm{Var}\;[g(T_{ik}|\alpha)|\vartheta_k]] -$$

$$-\gamma \cdot E[E^2\,[g(T_{ik}|\alpha)|\vartheta_k]] + \gamma \cdot E^2\,[g(T_{ik}|\alpha)] = 0$$

Wir finden, dass mit g als identischer Funktion alle exakt linearen Credibilityformeln nicht credible-suffizient sind. Die mathematisch wohl handlichste Menge von natürlichen Exponentialtarifen mit im allgemeinen credible-suffizienten a posteriori Erwartungswerten stellt die Familie der Potenzexponentialtarife dar. In der Folge wollen wir uns auf sie beschränken.

Definition

Ein natürlicher Exponentialtarif mit

$$a(t_{ik}|\delta):=t_{ik}^{\delta}, \qquad g(t_{ik}|\alpha):=t_{ik}^{\alpha},$$

wobei

$$\delta>-1,\ \alpha>0,\ \gamma\left(\frac{\delta+1}{\alpha}\right)+1-\frac{1}{\alpha}>0, \qquad \text{sowie} \qquad t_{ik}>0,\ \vartheta_k>0$$

heisst Potenzexponentialtarif.

In Potenzexponentialtarifen gilt:

$$E[\mu(\vartheta_k)|^k t]=\left(a_0 E^{\alpha}[T_{ik}]+a_k\sum_{i=1}^{n_k} t_{ik}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

mit

$$a_0^{\frac{1}{\alpha}}:=\frac{\Gamma\left(\frac{(\gamma+n_k)(\delta+1)}{\alpha}+1-\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma(\delta+1)}{\alpha}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{(\gamma+n_k)(\delta+1)}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\frac{\gamma(\delta+1)}{\alpha}+1-\frac{1}{\alpha}\right)}$$

und

$$a_k^{\frac{1}{\alpha}}:=\frac{\Gamma\left(\frac{(\gamma+n_k)(\delta+1)}{\alpha}+1-\frac{1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\delta+2}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{(\gamma+n_k)(\delta+1)}{\alpha}+1\right)\Gamma\left(\frac{\delta+1}{\alpha}\right)}.$$

Für $\alpha=1$ wird $E[\mu(\vartheta_k)|^k t]$ zur klassischen, inhomogen-linearen jedoch nicht credible-suffizienten Credibilityformel, was wir durch einsetzen direkt bestätigen können.
Innerhalb der Tarifparameter gleicher Ordnung, wie auch zwischen Tarifparametern verschiedener Ordnung, können funktionale Abhängigkeiten bestehen. Wir führen zwei Beispiele derartiger Beziehungen in Potenzexponentialtarifen auf:

i) $\delta=\alpha-1$, $\gamma=\frac{1}{\alpha}$ also mit der Landau-Symbolik, nach dem vorangegangenen Korollar, $E[\mathrm{Var}\,[T_{ik}^{\alpha}|\vartheta_k]]=o[\mathrm{Var}\,[E[T_{ik}^{\alpha}|\vartheta_k]]]$ $(\alpha\to\infty)$. Damit folgt unmittelbar

$$E[\mu(\vartheta_k)|^k t]=\frac{n_k!}{\prod_{i=1}^{n_k}\left(\frac{1}{\alpha}+i\right)}\left(E^{\alpha}[T_{ik}]+\sum_{i=1}^{n_k} t_{ik}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

sowie

$$\lim_{\alpha\to\infty} E[\mu(\vartheta_k)|^k t] = \begin{cases} 1 & \max\limits_i t_{ik} \leq 1 \\ \max\limits_i t_{ik} & \text{sonst} \end{cases}$$

Denn wegen $E^\alpha[T_{ik}] = \beta$ ist etwa für $\max\limits_i t_{ik} = m_k > 1$ nach der Regel von de l'Hospital

$$\lim_{\alpha\to\infty} \left(\beta + \sum_{i=1}^{n_k} t_{ik}^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \exp\left[\lim_{\alpha\to\infty} \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n_k} \left(\frac{t_{ik}}{m_k}\right)^\alpha \ln t_{ik}}{\frac{\beta}{m_k} + \sum\limits_{i=1}^{n_k} \left(\frac{t_{ik}}{m_k}\right)^\alpha}\right)\right] = m_k$$

und

$$\lim_{\alpha\to 0^+} E[\mu(\vartheta_k)|^k t] = \infty.$$

ii) $\delta = \alpha$.

Sind die zwei Tarifparameter erster Ordnung in einem Potenzexponentialtarif identisch, wollen wir von «einfachen Potenzexponentialtarifen» sprechen.

In unserem Beispiel würden damit die Parameter (β, γ) das Merkmal «Feuerversicherung», α_H das Charakteristikum «Hausratversicherungen» also $(\alpha_H, \beta, \gamma)$ den «Hausratfeuerversicherungstarif» determinieren, während ϑ_B die Eigenheit «Kanton Bern» und mithin (ϑ_B, α_H) die Tarifklasse «Hausratversicherungen im Kanton Bern» beschreiben würde.

Es ist darauf hinzuweisen, dass durch die spezifische Form der natürlich konjugierten Strukturverteilung alle Tarifparameter erster Ordnung in natürlichen Exponentialtarifen eine Teilmenge der Tarifparameter zweiter Ordnung darstellen.

3 Die homogene Potenzmittel-Credibilityformel

Werden in der Credibility-Aufgabe: «Approximiere $h_f(\vartheta_k) = E[f(T_{ik})|\vartheta_k]$ durch $s(t)$ derart, dass $E[(h_f(\vartheta_k) - s(t))^2]$ minimal wird», für $s(t)$ nicht Linearität und nicht Semilinearität als Nebenbedingung vorausgesetzt, verliert sich im allgemeinen der praxisorientierte Hauptvorteil der Credibility-Theorie, die einfache statistische Schätzbarkeit der Credibility-Prämie. Diese Schwierigkeit kann in einem Spezialfall über das Erwartungswertprinzip als Prämienberechnungsregel von Gerber [2] umgangen werden. Er definiert für eine stetige, streng wachsende Funktion g auf $0 < t < \infty$ die Prämie P für ein Risiko T durch $P := g^{-1}E[g(T)]$ und damit implizite ihre Schätzung $\hat{P}$ etwa durch

$$\hat{P} := g^{-1}\hat{E}[g(T)] \text{ mit } \hat{E}[g(T)] \text{ als Schätzung für } E[g(T)].$$

Wir setzen:

Definition

Ist unter einer stetigen, streng wachsenden Abbildung g, $s(t)$ die Credibility-Schätzung für $g(h_f(\vartheta_k))$, heisst $g^{-1}(s(t))$ g-inverse Credibility-Schätzung für $h_f(\vartheta_k)$.

Inverse Credibility-Schätzungen verallgemeinern die Credibility-Aufgabe wie folgt: «Approximiere $g(h_f(\vartheta_k))$ durch $s(t)$ derart, dass $E[(g(h_f(\vartheta_k)) - s(t))^2]$ minimal wird und setze als Schätzung für $h_f(\vartheta_k)$:$\hat{h}_f(\vartheta_k) = g^{-1}(s(t))$. Wird insbesondere für $s(t)$ homogene Linearität: $s(t) = \sum_{ij} a_{ij}t_{ij}$ oder homogene Semilinearität: $s(t) = \sum_{ij} b_{ij}y(t_{ij})$ mit fester Funktion y vorausgesetzt, bleibt $h_f(\vartheta_k)$ einfach statistisch schätzbar.
Ausgehend von der Eigenschaft der Potenzexponentialtarife, dass die exakte Credibility-Prämie die Form eines Potenzmittels aufweist, stellen wir uns nach den obigen Überlegungen die Aufgabe: «Approximiere $\mu^\alpha(\vartheta_k) = E^\alpha[T_{ik}|\vartheta_k]$ durch $\sum_{ij} a_{ij}t_{ij}^\alpha$ derart, dass $E\left[\left(\mu^\alpha(\theta_k) - \sum_{ij} a_{ij}T_{ij}^\alpha\right)^2\right]$ unter der Nebenbedingung $E\left[\sum_{ij} a_{ij}T_{ij}^\alpha\right] = E[\mu^\alpha(\theta_k)]$ minimal wird und setze $\hat{\mu}(\vartheta_k) = \left(\sum_{ij} a_{ij}t_{ij}^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$».
Es bedeute ohne Einschränkung der Allgemeinheit T_{ij} die Zufallsvariable «Schadensatz der Tarifklasse j aus einem Tarif α im Jahre i. Weiter wollen wir eine Volumenabhängigkeit von T_{ij}^α durch

$$T_{ij}^\alpha := V_{ij}^{-\alpha} \sum_{m=1}^{V_{ij}} \zeta_{ij,m}^\alpha \qquad \alpha > 0$$

definieren, wobei V_{ij} die massgebende Versicherungssumme des Risikos T_{ij} bezeichnet. Daraus ergibt sich

$$E[T_{ij}^\alpha|\vartheta_j] = \frac{1}{V_{ij}^\alpha} \sum_{r=1}^{V_{ij}} E[\zeta_{ij,r}^\alpha|\vartheta_j] := \frac{m_\alpha(\vartheta_j)}{V_{ij}^{\alpha-1}}$$

und
$$\operatorname{Var}\,[T_{ij}^{\alpha}|\vartheta_j]=\frac{1}{V_{ij}^{2\alpha}}\sum_{r=1}^{V_{ij}}\operatorname{Var}\,[\zeta_{ij,r}^{\alpha}|\vartheta_j]:=\frac{\sigma_{\alpha}^2(\vartheta_j)}{V_{ij}^{2\alpha-1}}.$$

Für $\alpha=1$ sind die obigen Formeln, sowie die nachfolgenden Resultate mit den Ergebnissen von Bühlmann und Straub [1] identisch. Wir verzichten daher an dieser Stelle auf eine vollständige Darstellung des zu der erwähnten Arbeit im wesentlichen analogen Lösungsweges unserer Aufgabe und beschränken uns auf das Aufführen der homogenen Potenzmittel-Credibilityformel mit den Schätzern für die darin auftretenden, in der Praxis unbekannten Parameter. Der Schätzung von α sei erst das nächste Kapitel gewidmet, vorerst setzen wir α als bekannt voraus.

Es wird also
$$\hat{\mu}(\vartheta_k)=((\gamma_0-\gamma_k)\tilde{t}_{..}^{(\alpha)}+\gamma_k t_{.k}^{(\alpha)})^{\frac{1}{\alpha}}$$
wobei
$$\gamma_0=\frac{M}{m},\qquad \gamma_k=\frac{c}{w+\dfrac{v}{V_{.k}}},\qquad t_{.k}^{(\alpha)}=\sum_i\frac{V_{ik}^{\alpha}}{V_{.k}}t_{ik}^{\alpha},\qquad \tilde{t}_{..}^{(\alpha)}=\sum_{i,j}\frac{\gamma_j V_{ij}^{\alpha}}{\gamma V_{.k}}t_{ij}^{\alpha}$$
$$M=E[\mu^{\alpha}(\theta_k)],\qquad m=E[m_{\alpha}(\theta_k)],\qquad V_{.k}=\sum_i V_{ik},\qquad V_{..}=\sum_k V_{.k},\qquad \gamma=\sum_j\gamma_j$$
$$v=E[\sigma_{\alpha}^2(\theta_k)],\qquad w=\operatorname{Var}\,[m_{\alpha}(\theta_k)],\qquad c=\operatorname{Cov}\,[\mu^{\alpha}(\theta_k),m_{\alpha}(\theta_k)]$$
mit den Schätzern
$$\hat{M}=\sum_j\frac{V_{.j}}{V_{..}}\left(\sum_i\frac{V_{ij}}{V_{.j}}t_{ij}\right)^{\alpha},\qquad \hat{m}=\sum_{i,j}\frac{V_{ij}^{\alpha}}{V_{..}}t_{ij}^{\alpha}:=t_{..}^{(\alpha)}$$
$$\hat{v}=\frac{1}{V_{..}}\sum_j\frac{V_{.j}}{n_j-1}\left(\sum_i V_{ij}^{2\alpha-1}t_{ij}^{2\alpha}-V_{.j}t_{.j}^{(\alpha)^2}\right)$$
$$\hat{w}=\max\left\{\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{V_{..}^2}\sum_j\frac{V_{.j}^2}{n_j-1}t_{.j}^{(\alpha)^2}-\frac{1}{\sum\limits_j n_j-1}t_{..}^{(\alpha)^2}\right)+K(\alpha),\ 0\right\}$$
$$\hat{c}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{V_{..}^2}\sum_j\frac{V_{.j}^2}{n_j-1}(t_{.j}^{(1)})^{\alpha}t_{.j}^{(\alpha)}-\frac{1}{\sum\limits_j n_j-1}t_{..}^{(\alpha)}\sum_j\frac{V_{.j}}{V_{..}}(t_{.j}^{(1)})^{\alpha}\right)+K(\alpha)$$
$$K(\alpha)=\frac{1}{\pi V_{..}}\sum_j\left(\frac{1}{\sum\limits_j n_j-1}-\frac{V_{.j}}{V_{..}(n_j-1)}\right)\sum_i V_{ij}^{2\alpha-1}t_{ij}^{2\alpha}$$
$$\pi=\frac{1}{\sum\limits_j n_j-1}\sum_j\frac{V_{.j}}{V_{..}}\left(1-\frac{V_{.j}}{V_{..}}\right)$$

4 Die Tarifparameter in Potenzexponentialtarifen

4.1 *Eine strukturabsorbierende Statistik*

Die Einführung eines Tarifierungsmodelles, in welchem Tarifklassen durch einen Strukturparameter und durch Tarifparameter charakterisiert sind, ist für praktische Belange nur dann von Bedeutung, falls es gelingt, Statistiken innerhalb der Tarifklassen zu finden, welche einerseits Auskunft über die ihnen zugrunde liegenden Tarifparameter geben andererseits aber jegliche Wechselwirkungen mit dem Strukturparameter eliminieren.
Potenzexponentialtarife stellen sich als richtungweisend heraus.

Aussage

Es seien $T_{1k}|\vartheta_k, \ldots, T_{n_k k}|\vartheta_k$ unabhängig, identisch verteilte Zufallsvariablen aus einem Potenzexponentialtarif.

Dann gilt für $Z_{rs,k} := \dfrac{T_{rk}|\vartheta_k}{T_{sk}|\vartheta_k} \qquad r \neq s$

$$\frac{dF^{Z_{rs,k}}(z)}{dz} := p(z) = \alpha \frac{\Gamma\left(\dfrac{2(\delta+1)}{\alpha}\right)}{\Gamma^2\left(\dfrac{\delta+1}{\alpha}\right)} \frac{z^\delta}{(1+z^\alpha)^{\frac{2(\delta+1)}{\alpha}}} \qquad z>0$$

unabhängig von ϑ_k.

Beweis

Wenn wir der Übersichtlichkeit halber auf eine Indexierung verzichten, wird

$$p(z) = \frac{d}{dz} \frac{1}{c^2(\vartheta|\omega_p)} \int_{y=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\frac{z}{y}} \left(\frac{t}{y}\right)^\delta \frac{e^{-\vartheta(t^\alpha + y^{-\alpha})}}{y^2} dt dy.$$

Durch die Substitution $t = \dfrac{u}{y}$ und unter Vertauschung der Integrale ergibt sich

$$p(z) = \frac{d}{dz} \frac{1}{c^2(\vartheta|\omega_p)} \int_{u=0}^{z} \int_{y=0}^{\infty} \frac{u^\delta}{y^{2\delta+3}} e^{-\frac{\vartheta}{y^\alpha}(u^\alpha+1)} dy du$$

also mit

$$y^{\alpha}=\frac{\vartheta(u^{\alpha}+1)}{s}$$

$$p(z)=\alpha\,\frac{\Gamma\left(\frac{2(\delta+1)}{\alpha}\right)}{\Gamma^{2}\left(\frac{\delta+1}{\alpha}\right)}\;\frac{z^{\delta}}{(1+z^{\alpha})^{\frac{2(\delta+1)}{\alpha}}}\qquad z>0$$

zudem

$$E[Z^{\nu}]=\frac{\Gamma\left(\frac{\delta+\nu+1}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{\delta-\nu+1}{\alpha}\right)}{\Gamma^{2}\left(\frac{\delta+1}{\alpha}\right)}\qquad \delta+\nu+1>0,\qquad \delta-\nu+1>0.$$

Die Quotienten T_{rj}/T_{sj} $r\neq s$ $r,s\in\{1,\ldots n_j\}$ $j\in\{1,\ldots,N\}$ innerhalb der Tarifklassen eines Potenzexponentialtarifes sind also über den ganzen Tarif identisch verteilt. Die strukturabsorbierende Eigenschaft dieser Quotientenbildung ist insofern bemerkenswert, als damit das Gemeinsame einer inhomogenen Menge von Tarifklassen isoliert werden kann. Für unsere Hausratfeuerversicherung würde dies bedeuten, dass die Zufallsvariable «Quotient der Schadensätze Hausratversicherungen im Kanton j der Jahre r und s $r,s\in\{1,\ldots,n_j\}$» identisch der Variablen «Quotient der Schadensätze Hausratversicherungen im Kanton k der Jahre p und q $p,q\in\{1,\ldots,n_k\}$» verteilt wäre, wobei wir von einer allfälligen Volumenabhängigkeit absehen.
An dieser Stelle scheint sich die praxisadäquate Einschränkung unserer Betrachtungen auf Potenzexponentialtarife zu rechtfertigen, denn fordert man allgemein in natürlichen Exponentialtarifen $E[g(T_{rk})|\vartheta_k]E[g^{-1}(T_{sk})|\vartheta_k]=c_0$, $c_0=\text{konstant}\neq 1$, impliziert dies, dass

$$\frac{c'(\vartheta_k|\omega_p)\int c(\vartheta_k|\omega_p)\,d\vartheta_k}{c^{2}(\vartheta_k|\omega_p)}=c_0,$$

beziehungsweise die Differentialgleichung $y''y-c_0(y')^2=0$ gelten muss.
Wir finden sofort $c(\vartheta_k|\omega_p)=c_4(c_1\vartheta_k+c_2)^{c_3}$ $c_i=\text{konstant}$, womit wir, ohne auf die analytischen Eigenschaften von $c(\vartheta_k|\omega_p)$ hier näher eintreten zu wollen, feststellen können, dass die Potenzexponentialtarife mit

$$c(\vartheta_k|\omega_p)=\alpha^{-1}\Gamma\left(\frac{\delta+1}{\alpha}\right)\vartheta_k^{-\left(\frac{\delta+1}{\alpha}\right)}$$

im wesentlichen die einzigen natürlichen Exponentialtarife mit der oben verifizierten Eigenschaft sind.

4.2 *Schätzung des Tarifparameters α in einfachen Potenzexponentialtarifen*

Aussage

Mit $T_{rj}^{\alpha} := V_{rj}^{-\alpha} \sum_{m=1}^{V_{rj}} \zeta_{rj,m}^{\alpha}$, wobei $\zeta_{rj,m}$ aus einem einfachen Potenzexponentialtarif stammend, gilt für

$$Z_\alpha(T) := \frac{1}{N} \sum_j \frac{1}{n_j(n_j-1)} \left(\sum_i \frac{(V_{ij}T_{ij})^\alpha}{V_{ij}} \sum_i \frac{(V_{ij}T_{ij})^{-\alpha}}{V_{ij}} - \sum_i \frac{1}{V_{ij}^2} \right) - 1$$

$$E[Z_\alpha(T)] = \alpha.$$

Den einfachen Beweis übergehen wir.

Diese Beziehung gibt uns eine Möglichkeit, α aus den Beobachtungen t_{ij} $i \in \{1, \ldots, n_j\}$ $j \in \{1, \ldots, N\}$ schätzen zu können. Wir setzen voraus, dass $t_{ij} > 0 \ \forall i,j$.

Da

$$Z_\alpha(t) = \frac{1}{N} \sum_j \frac{1}{n_j(n_j-1)} \sum_{r>s} \frac{h_{rs,j}(\alpha)}{V_{rj}V_{sj}} - 1$$

mit

$$h_{rs,j}(\alpha) = \left(\frac{V_{rj}t_{rj}}{V_{sj}t_{sj}} \right)^\alpha + \left(\frac{V_{rj}t_{rj}}{V_{sj}t_{sj}} \right)^{-\alpha}$$

wobei

$$\frac{d}{d\alpha} h_{rs,j}(\alpha) \geq 0, \qquad \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{d}{d\alpha} h_{rs,j}(\alpha) = 0,$$

sowie

$$\lim_{\alpha \to \infty} \frac{d}{d\alpha} h_{rs,j}(\alpha) = \infty$$

ist $Z_\alpha(t)$ in α streng monoton steigend. Also existiert wegen $Z_0(t) \leq 0$ $(V_{ij} \geq 1)$, falls $\left(\frac{V_{rj}t_{rj}}{V_{sj}t_{sj}} \right) \neq 1$ für mindestens ein (r, s, j), für die Gleichung $f(\alpha) = Z_\alpha(t) - \alpha = 0$ genau eine Lösung $\hat{\alpha}$, welche sich nicht explizite angeben lässt, die jedoch mit der Newtonschen Rekursion

$$\hat{\alpha}_{m+1} = \hat{\alpha}_m - \frac{f(\hat{\alpha}_m)}{\frac{d}{d\hat{\alpha}_m} f(\hat{\alpha}_m)}$$

also

$$\hat{\alpha}_{m+1} = \hat{\alpha}_m - \frac{S_1 - N(\hat{\alpha}_m + 1)}{S_2 - N}$$

$$S_1 = \sum_j \frac{1}{n_j(n_j-1)} \left(\sum_i \frac{(V_{ij}t_{ij})^{\hat{\alpha}_m}}{V_{ij}} \sum_i \frac{(V_{ij}t_{ij})^{-\hat{\alpha}_m}}{V_{ij}} - \sum_i \frac{1}{V_{ij}^2} \right)$$

$$S_2 = \sum_j \frac{1}{n_j(n_j-1)} (S_{j1} - S_{j2})$$

$$S_{j1} = \sum_i \frac{(V_{ij}t_{ij})^{\hat{\alpha}_m}}{V_{ij}} \ln (V_{ij}t_{ij}) \sum_i \frac{(V_{ij}t_{ij})^{-\hat{\alpha}_m}}{V_{ij}}$$

$$S_{j2} = \sum_i \frac{(V_{ij}t_{ij})^{\hat{\alpha}_m}}{V_{ij}} \sum_i \frac{(V_{ij}t_{ij})^{-\hat{\alpha}_m}}{V_{ij}} \ln (V_{ij}t_{ij})$$

schnell gefunden werden kann, wie uns etwa Stiefel [6] lehrt. Zur Bestimmung eines geeigneten Anfangswertes α_0 setzen wir nach Taylor

$$Z_{\alpha_0}(t) \sim Z_0(t) + \alpha_0 \frac{d}{d\alpha} Z_\alpha(t)\Big|_{\alpha=0} + \frac{\alpha_0^2}{2} \frac{d^2}{d\alpha^2} Z_\alpha(t)\Big|_{\alpha=0}$$

womit unter den Annahmen $Z_0(t) \sim 0$ und $Z_{\alpha_0}(t) \sim \alpha_0$

$$\alpha_0 = N \left(\sum_j \frac{1}{n_j(n_j-1)} \left(\sum_i \frac{(\ln (V_{ij}t_{ij}))^2}{V_{ij}} \sum_i \frac{1}{V_{ij}} - \left(\sum_i \frac{\ln (V_{ij}t_{ij})}{V_{ij}} \right)^2 \right) \right)^{-1} > 0.$$

Der nach dem beschriebenen Verfahren gefundene Wert $\hat{\alpha}$ ist ein konsistenter Schätzwert für α, was wir hier nicht beweisen wollen.

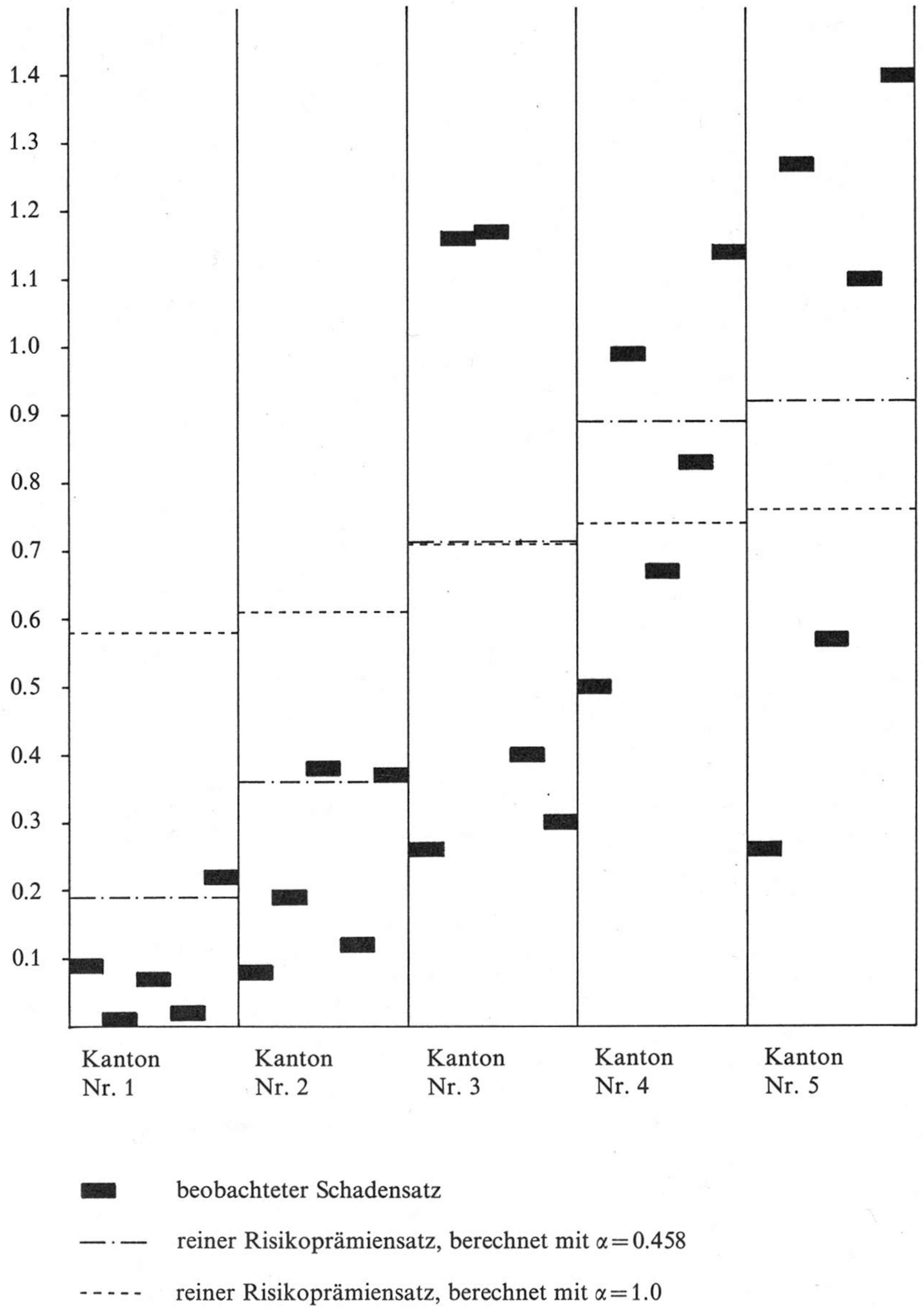
5 Numerisches Beispiel

Wir betrachteten drei Risikogruppen aus der Feuerversicherung: Hausrat, Landwirtschaft und Gewerbe. Aus jeder Gruppe lagen uns von der Statistik des Schweizerischen Sachversicherungsverbandes für die Jahre zwischen 1974 und 1978 pro Kanton je eine Feuerschadensatzbeobachtung vor. Unter der Annahme, dass diese Daten aus einfachen Potenzexponentialtarifen stammen, stellten wir uns die Aufgabe, reine Risikoprämiensätze pro Risikogruppe und Kanton zu bestimmen.

Als erstes interessierte uns die Frage, ob die drei Risikogruppen möglicherweise einen einzigen Tarif darstellen. Durch die Erkenntnis, dass eine geeignete Quotientenbildung die Tarifklassenstruktur absorbiert, war der Weg für die

Grafik 1

Schaden- und Prämiensätze in ‰ der massgebenden Versicherungssummen



Anwendung eines adäquaten Homogenitätstestes frei. Aufgrund des Ergebnisses eines solchen Testes mussten wir die Hypothese, dass die Risikogruppen Hausrat, Landwirtschaft und Gewerbe als zum gleichen Tarif gehörend betrachtet werden können, mit einer Fehlerwahrscheinlichkeit erster Art von 5% ablehnen. Ohne uns um eine allfällige Homogenität von Teilmengen dieser Risikogruppen zu kümmern, interpretierten wir also jede Gruppe als separaten Tarif und schätzten die Tarifparameter α. Wir fanden für Hausrat $\alpha_H = 0.910$, für Landwirtschaft $\alpha_L = 0.585$ sowie für Gewerbe $\alpha_G = 0.458$.
Schliesslich berechneten wir mit den geschätzten Tarifparametern nach der homogenen Potenzmittel-Credibilityformel die reinen Risikoprämiensätze pro Tarif und Kanton.
Grafik 1 vergleicht innerhalb des Gewerbetarifes Potenzmittel-Credibility ($\alpha = 0.458$) mit der linearen Credibility nach Bühlmann und Straub ($\alpha = 1$) am Beispiel der Resultate von fünf ausgewählten Kantonen.

Hans A. Ammeter
Schweizerische Mobiliar
Versicherungsgesellschaft
Schwanengasse 14
3001 Bern

Literatur

[1] Bühlmann, H. und Straub, E.: Glaubwürdigkeit für Schadensätze; MVSVM Band 70, Heft 1.
[2] Gerber, H. U.: On iterative premium calculations principles; MVSVM Band 74, Heft 2.
[3] De Groot, M. H.: Optimal statistical decisions; Mc Graw-Hill, New York 1970.
[4] Jewell, W. S.: Credible means are exact Bayesian for simple exponential families; ASTIN Bulletin Vol. VIII, part 1.
[5] Jewell, W. S.: Regularity conditions for exact credibility; ASTIN Bulletin Vol. VIII, part 3.
[6] Stiefel, E.: Einführung in die numerische Mathematik; Teubner, Stuttgart 1963.

Zusammenfassung

Die klassische Credibility-Formel lautet

$$\hat{\mu}(\vartheta_k) = (1 - \gamma_k)\tilde{T} + \gamma_k T_k,$$

wobei T_k = individuelle Schadenerfahrung der Risikoklasse k, $\tilde{T}$ = Schadenerfahrung des Kollektivs (Portefeuille oder Tarif) und γ_k = Credibility. Diese Formel ist bekanntlich sogar exakt (das heisst identisch mit dem a posteriori Erwartungswert $E[\mu(\vartheta)|T]$) für gewisse Paare von Verteilungen für T (Schadenvariable) und ϑ (Risikoparameter). Das bestbekannte solche Paar ist die Poisson-Gamma-Kombination.

In der vorliegenden Arbeit wird das klassische Resultat wie folgt verallgemeinert:

Falls die Verteilungen von T und ϑ bestimmten Exponentialfamilien angehören, so wird obige Formel – wobei sie exakt bleibt – zu

$$\hat{\mu}(\vartheta_k) = [(\gamma_0 - \gamma_k)\tilde{T}^\alpha + \gamma_k T_k^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}$$

mit $\alpha > 0$ ($\alpha = 1$ entspricht also der klassischen Formel).

Verschiedene α-Werte charakterisieren verschiedene Tarife; verschiedene ϑ-Werte mit demselben α charakterisieren verschiedene Risikoklassen innerhalb desselben Tarifs.

Résumé

La formule de crédibilité classique est

$$\hat{\mu}(\vartheta_k) = (1 - \gamma_k)\tilde{T} + \gamma_k T_k,$$

T_k = sinistralité individuelle de la classe de risque k, $\tilde{T}$ = sinistralité collective (portefeuille ou tarif) et γ_k = crédibilité. Cette formule est, on le sait, également exacte (c'est-à-dire identique à l'espérance mathématique a posteriori $E[\mu(\vartheta)|T]$) pour certaines paires de distributions de T (variable des sinistres) et ϑ (paramètre de risque). La plus connue de ces paires est la combinaison Poisson-Gamma.

Le présent article généralise le résultat classique de la manière suivante:

Si les distributions de T et ϑ appartiennent à certaines familles exponentielles, la formule précédente – tout en demeurant exacte – deviendra

$$\hat{\mu}(\vartheta_k) = [(\gamma_0 - \gamma_k)\tilde{T}^\alpha + \gamma_k T_k^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}$$

avec $\alpha > 0$ ($\alpha = 1$ correspondant à la formule classique).

Des valeurs différentes de α caractérisent des tarifs différents; des valeurs différentes de ϑ avec le même α caractérisent des classes de risques différentes à l'intérieur d'un même tarif.

Summary

The classical credibility formula is

$$\hat{\mu}(\vartheta_k) = (1-\gamma_k)\tilde{T} + \gamma_k T_k,$$

where T_k = individual claims experience of risk class number k, $\tilde{T}$ = overall claims experience of the entire portfolio (or tariff) and γ_k = credibility. This formula is, as we know, even exact (i.e. identical with the posterior mean $E[\mu(\vartheta)|T]$) for certain combinations of distributions of T (claims variable) and ϑ (risk parameter), the best known such combination being the Poisson-Gamma. In the present paper the classical theory is generalized as follows:

If T and ϑ are distributed according to certain representative members of exponential families, the above formula – while remaining exact – extends to

$$\hat{\mu}(\vartheta_k) = [(\gamma_0 - \gamma_k)\tilde{T}^\alpha + \gamma_k T_k^\alpha]^{\frac{1}{\alpha}}$$

for some $\alpha > 0$ ($\alpha = 1$ being the classical case).

Different values of α characterize different tariffs; different values of ϑ with the same α characterize risk categories within the same tariff.