Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: - (1980)

Heft: 1

Artikel: Ruine et fusion de portefeuilles d'assurances

Autor: Amsler, Marc-Henri

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-571101

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

MARC-HENRI AMSLER, Lausanne

Ruine et fusion de portefeuilles d'assurance

Introduction

L'un des moyens les plus couramment utilisés pour stabiliser les résultats financiers annuels d'une institution d'assurance est de procéder à des groupements, à des fusions même au niveau des portefeuilles, voire à des échanges avec d'autres institutions. De telles opérations de stabilisation trouvent leur justification dans l'intuition et dans la connaissance que l'on peut acquérir au contact de la réalité. Qu'en est-il de leurs fondements mathématiques?

La présente communication fait suite à une étude consacrée aux provisions de fluctuation [2]. La dite étude a montré que les montants des provisions de fluctuation peuvent être très importants, même sous des conditions de solvabilité assez libérales, notamment lorsque l'on tente de déterminer des provisions portefeuilles ou branches d'assurance séparés. La loi des grands nombres nous incite à penser que, par un groupement des portefeuilles, il devrait être possible d'améliorer la situation. Que peut-on espérer à ce sujet?

Les lignes qui suivent s'appliquent à donner quelques éclaircissements sur les questions soulevées ci-dessus. Notre propos est le suivant: disposant de l'équation générale d'équilibre du risque collectif, reliant risques courus et moyens financiers affectés à leur couverture, quelles modifications peut-on déceler dans les termes de l'équilibre au moment où de deux portefeuilles on n'en constitue plus qu'un seul, par fusion notamment? Provisions de fluctuation et degré de solvabilité se modifient: nous proposons des formules susceptibles de quantifier les dites modifications.

Nous exposerons au § 1 l'outil mathématique dont nous ferons usage, puis au § 2 les conditions d'équilibre des portefeuilles de type gamma, conditions auxquelles nous aurons très largement recours. Les § 3 et § 4 décriront deux types de dépendance que l'on peut rencontrer entre portefeuilles candidats à une éventuelle fusion. Un exemple numérique fera l'objet du § 5. Les § 6, 7 et 8 seront consacrés à la recherche de situations optimales. Sur ce dernier point, qui pourrait être laborieux sans un outil adéquat, la théorie de l'équation d'équilibre propose un cheminement sans difficultés mathématiques majeures, susceptible d'être prolongé jusqu'à obtenir des valeurs numériques.

§ 1 L'outil mathématique

L'outil mathématique dont nous ferons usage est celui qui nous a permis de développer la théorie de l'équation générale d'équilibre d'un risque collectif. A cette théorie, nous emprunterons les définitions et résultats suivants[1] :

Soient

$X_P = P + \Lambda$ la prime pure d'un portefeuille quelconque avec sa marge de sécurité Λ.

X_c = le montant annuel des sinistres provenant du dit portefeuille

X_B = le montant du bénéfice annuel.

Nous avons

$$X_B = X_P - X_c$$

Soit maintenant

$$\psi(s) = \ln \int e^{sx} \cdot f(x) \cdot dx$$

la fonction caractéristique réelle (notée f.c.r) d'une variable X de densité de probabilité $f(x)$. On a en particulier, vu que X_P est une constante:

$$\psi_P(s) = (P + \Lambda) \cdot s. \tag{1}$$

En passant des variables X_P, X_c et X_B à leurs f.c.r., nous obtenons

$$\psi_B(s) = \psi_P(s) + \psi_c(-s).$$

La f.c.r. du bénéfice s'écrit ainsi, en utilisant (1)

$$\psi_B(s) = (P + \Lambda) \cdot s + \psi_c(-s). \tag{2}$$

En utilisant les définitions ci-dessus, l'inégalité de Cramèr

$$\text{probabilité de ruine} < \varepsilon = e^{s \cdot U},$$

expression dans laquelle U représente la provision de fluctuation, s'écrit

$$\psi_B\left(\frac{\ln \varepsilon}{U}\right) = 0,$$

c.à d., en utilisant (2)

$$(P + \Lambda) \cdot \frac{\ln \varepsilon}{U} + \psi_c\left(\frac{-\ln \varepsilon}{U}\right) = 0. \tag{3}$$

[1] Pour les détails, voir [1], § 2 et [2], § 2.

Cette dernière équation est dite «équation générale d'équilibre du risque collectif». Elle lie les grandeurs P, Λ, ε et U aux paramètres du risque, compris dans la fonction $\psi_c(s)$.
Pour un portefeuille donné, on établira donc tout d'abord la f.c.r. $\psi_c(s)$ que l'on introduira dans (3). On obtiendra ainsi une équation dont on pourra extraire – théoriquement du moins – l'un des paramètres, notamment ε, en fonction des autres.
Si X_c est de type gamma, d'espérance mathématique $E=P$ et de variance V, la f.c.r. correspondante est

$$\psi_c(s)=\frac{-P^2}{V}\cdot\ln\left(1-\frac{V}{P}\cdot s\right). \tag{4}$$

L'équation d'équilibre (3) peut alors se simplifier. On trouve, entre les taux des paramètres rapportés à la prime pure P

$$\lambda=\frac{\Lambda}{P};\qquad u=\frac{U}{P};\qquad \sigma^2=\frac{V}{P^2} \tag{5}$$

la relation simple

$$2\cdot\lambda'\cdot u+\sigma^2\cdot\ln\varepsilon=0 \tag{6}$$

dans laquelle λ' est le taux réduit de la marge de sécurité, relié au taux complet par l'équation implicite

$$2(1+\lambda)\cdot\lambda'+\ln(1-2\cdot\lambda')=0. \tag{7}$$

A titre d'illustration, un portefeuille (de type gamma) est «en équilibre» si l'on a par exemple:

$$\lambda=10\%\ (\lambda'=8{,}81\%),\quad u=30\%,\quad \sigma=12{,}25\%,\quad \varepsilon=2{,}95\%,$$

car selon (6), on a

$$2\cdot 0{,}0881\cdot 0{,}3+0{,}1225^2\cdot\ln 0{,}0295=0.$$

Le niveau $\varepsilon=2{,}95\%$ de notre exemple, soit une borne supérieure pour la probabilité de ruine de près de 3% n'est évidemment pas satisfaisant.
Dans (6), la variance relative σ^2 des charges annuelles est liée à
σ_w^2 = variance relative de la variable de structure W telle que l'a définie Ammeter dans sa théorie des fluctuations des probabilités de base,
σ_H^2 = variance relative de la variable de Poisson H d'espérance mathématique $E(H)=t$:

$$\sigma_H^2=\frac{1}{t}$$

σ_1^2 = variance relative du montant X_1 d'un sinistre
par la relation

$$\sigma^2 = \sigma_w^2 + \frac{1}{t}(1+\sigma_1^2) \tag{8}$$

Dans la pratique, l'observation statistique permet généralement d'estimer les paramètres λ (donc également λ'), u, σ_H, σ_1, éventuellement directement σ. L'équation d'équilibre (6) permet alors de trouver l'ordre de grandeur de ε.

§ 2 La condition d'équilibre de type gamma

Notre intention est d'étudier l'effet de fusions de portefeuilles sur l'équilibre financier et les conditions de solvabilité des institutions d'assurance. Désireux de conserver à nos développements un degré de généralité suffisant, nous éviterons dans toute la mesure du possible de faire intervenir explicitement les caractéristiques internes particulières des portefeuilles étudiés. De plus, nous ne nous limiterons pas a priori à la fusion de portefeuilles statistiquement indépendants, l'indépendance statistique totale n'étant pas du domaine de la réalité.

La fusion créera des portefeuilles de structure évidemment assez complexes. Nous nous attacherons à déterminer de façon exacte l'espérance mathématique et la variance des dits portefeuilles. Lorsqu'il s'agira de déterminer les conditions d'équilibre, notamment la probabilité de ruine, la structure toute générale des portefeuilles créés nous empêchera de mener les développements jusqu'à obtenir par exemple des valeurs numériques, à moins qu'on ne fasse une hypothèse simplificatrice du dernier moment.

Parmi les hypothèses simplificatrices, nous ne pouvons nous arrêter à celle qui suppose les risques gaussiens. Cette hypothèse, on le sait, est irréaliste.

Comme indiqué dans [1], nous avons été amenés à reconnaître à la variable aléatoire de type gamma des mérites particuliers. L'hypothèse que le total annuel X_c des montants des sinistres est de type gamma permet premièrement de simplifier grandement les développements théoriques. De plus, il est apparu dans un exemple pour lequel la borne supérieure ε de la probabilité de ruine avait pu être calculée exactement, que la substitution du risque original par un risque de même espérance mathématique et de même variance mais de type gamma livrait une borne supérieure très voisine de la valeur exacte. Vu les dispositions favorables, semble-t-il, des variables de type gamma à notre endroit, nous déterminerons donc les conditions d'équilibre d'un portefeuille quelconque en supposant que ce portefeuille est un risque de type gamma de

même espérance mathématique et de même variance. Le résultat numérique ne sera pas exact. Nous laissons pour le moment à un lecteur plus curieux que nous le soin de justifier l'emploi de cette hypothèse simplificatrice.

Définition: La condition d'équilibre de type gamma d'un portefeuille quelconque est la condition d'équilibre qui régit le portefeuille de type gamma de même espérance mathématique et de même variance que le portefeuille original.

Illustrons cette définition par un exemple: la fusion de deux portefeuilles statistiquement indépendants et de plus, pris chacun pour lui-même, de type gamma. On sait que la somme de deux variables aléatoires de type gamma statistiquement indépendantes n'est ordinairement pas de type gamma. En effet, la somme de deux f.c.r. de structure (4) n'est en général pas de même structure. Après fusion, la f.c.r. du bénéfice est donnée par la définition générale (2), dans laquelle ψ_c est la f.c.r. du risque, fusion réalisée. Vu que les portefeuilles sont supposés statistiquement indépendants, leurs ψ_c respectifs donnent par addition le ψ_c du portefeuille après fusion. Ainsi, si les indices 1 et 2 se rapportent aux deux portefeuilles considérés, nous avons pour le portefeuille après fusion

$$\begin{aligned} P &= P_1 + P_2 \\ \Lambda &= \Lambda_1 + \Lambda_2 \\ V &= V_1 + V_2 \\ \psi_c(s) &= \psi_{c1}(s) + \psi_{c2}(s) \end{aligned}$$

et selon (2)

$$\psi_B(s) = (P + \Lambda) \cdot s + [\psi_{c1}(-s) + \psi_{c2}(-s)].$$

En introduisant dans cette dernière relation la forme de la f.c.r. d'un risque gamma, selon (4), ainsi que

$$s = \frac{\ln \varepsilon}{U}$$

nous obtenons pour l'équation d'équilibre

$$\psi_B\left(\frac{\ln \varepsilon}{U}\right) = (P + \Lambda)\frac{\ln \varepsilon}{U} + \left[\frac{-P_1^2}{V_1} \ln\left(1 + \frac{V_1}{P_1} \cdot \frac{\ln \varepsilon}{U}\right) - \frac{P_2^2}{V_2} \ln\left(1 + \frac{V_2}{P_2} \cdot \frac{\ln \varepsilon}{U}\right)\right] = 0 \quad (9)$$

Le risque après fusion est d'un type inconnu. Notre théorie nous permet néanmoins de trouver sa f.c.r.: la fonction entre crochets de (9). La valeur de ε tirée de cette équation donne la valeur exacte de la borne supérieure de la probabilité de ruine.

Introduisons maintenant la «conditions d'équilibre de type gamma» telle que définie ci-dessus. L'équation d'équilibre d'un risque de type gamma de paramètres P, Λ, V, U et ε est, selon (3) et (4)

$$\psi_B\left(\frac{\ln \varepsilon}{U}\right)=(P+\Lambda)\frac{\ln \varepsilon}{U}-\frac{P^2}{V}\ln\left(1+\frac{V}{P}\cdot\frac{\ln \varepsilon}{U}\right)=0. \tag{10}$$

La valeur de ε tirée de cette seconde équation donne une valeur approchée de la borne supérieure ε.
Si l'on donne maintenant aux divers paramètres des portefeuilles les valeurs numériques suivantes

	Porte-feuille 1	Porte-feuille 2
Prime pure annuelle	$P_k=1$	1,5
Marge de sécurité	$\Lambda_k=0{,}1$	0,3
Variance	$V_k=0{,}04$	0,135
Provision de fluctuation	$U_k=0{,}25$	0,9

on obtient pour la borne supérieure de la probabilité de ruine:

selon (9), valeur exacte $\varepsilon=1{,}34\%$
selon (10), valeur approchée $\varepsilon=1{,}50\%$.

L'ordre de grandeur de la borne supérieure de la probabilité de ruine est bien conservé: la condition d'équilibre de type gamma n'est pas très différente de la condition d'équilibre exacte!
Dans la suite du présent travail – sauf indication contraire – nous établirons les conditions d'équilibre des portefeuilles considérés par le biais de la condition d'équilibre de type gamma.

§ 3 Fusion de portefeuilles statistiquement entièrement indépendants

Considérons en un premier temps une institution d'assurance gérant plusieurs portefeuilles statistiquement indépendants les uns des autres, p.ex. des portefeuilles vie, incendie, transport. Introduisons les symboles suivants pour les caractéristiques techniques du portefeuille numéro k:

t_k = nombre moyen des sinistres par an $(=E(H_k))$
e_{1k} = coût moyen d'un sinistre $(=E(X_{1k}))$
$P_k = t_k \cdot e_{1k}$ = prime pure pour un an.

Nous avons alors, selon (5) et (8), toujours pour le portefeuille k

$$\Lambda_k = \lambda_k \cdot P_k \text{ pour la marge de sécurité}$$

$$U_k = u_k \cdot P_k \text{ pour la provision de fluctuation}$$

$$\sigma_k^2 = \sigma_{wk}^2 + \frac{1}{t_k}(1+\sigma_{1k}^2) \text{ pour la variance relative.} \tag{11}$$

La condition d'équilibre de type gamma pour le portefeuille k est selon (6):

$$2 \cdot \lambda_k' \cdot u_k + \sigma_k^2 \cdot \ln \varepsilon_k = 0 \tag{12}$$

λ_k' étant lié à λ_k par (7).

Opérons maintenant la fusion des divers portefeuilles de notre institution d'assurance. L'indépendance statistique nous permet d'écrire

$$\begin{aligned}
X_c &= \sum X_{ck} && = \text{montant annuel des sinistres} \\
E(X_c) &= \sum E(X_{ck}) \\
\operatorname{Var}(X_c) &= \sum \operatorname{Var}(X_{ck}) \\
\Lambda &= \sum \Lambda_k \\
U &= \sum U_k .
\end{aligned}$$

Dans ces expressions, le signe somme indique la totalisation sur l'ensemble des portefeuilles.

Désignons par P la prime pure du portefeuille global et par r_k la part constituée par le portefeuille partiel numéro k à ce portefeuille global

$$r_k = \frac{P_k}{P} \tag{13}$$

On a évidemment

$$\sum r_k = 1.$$

Pour le portefeuille global, nous avons selon (5), (11) et (13):

$$E(X_c) = \sum E(X_{ck}) = \sum P_k = P \cdot \sum r_k = P$$

$$\operatorname{Var}(X_c) = \sum \operatorname{Var}(X_{ck}) = \sum \sigma_k^2 \cdot P_k^2 = P^2 \cdot \sum \left[\sigma_{wk}^2 + \frac{1}{t_k}(1+\sigma_{1k}^2)\right] r_k^2$$

$$\Lambda = \sum \Lambda_k = \sum \lambda_k P_k = P \cdot \sum \lambda_k \cdot r_k$$

$$U = \sum U_k = \sum u_k \cdot P_k = P \cdot \sum u_k \cdot r_k$$

Nous obtenons donc pour le portefeuille global les taux suivants

$$\sigma^2 = \frac{\operatorname{Var}(X_c)}{P^2} = \sum \left[\sigma_{wk}^2 + \frac{1}{t_k}(1+\sigma_{1k}^2)\right] \cdot r_k^2 \tag{14}$$

$$\lambda = \frac{\Lambda}{P} = \sum \lambda_k \cdot r_k \tag{15}$$

$$u = \frac{U}{P} = \sum u_k \cdot r_k . \tag{16}$$

La condition d'équilibre de type gamma est, toujours la même,

$$2 \cdot \lambda' \cdot u + \sigma^2 \cdot \ln \varepsilon = 0 \tag{17}$$

λ' étant lié à λ par (7).

§ 4 Fusion de portefeuilles statistiquement partiellement indépendants

Si l'on considère des institutions d'assurance travaillant dans les mêmes branches, on ne peut supposer sans autre que leurs portefeuilles sont statistiquement pleinement indépendants. Tel sera par exemple le cas d'institutions actives dans le domaine des accidents de la circulation: s'il est normal de penser que les véhicules assurés ne le sont qu'auprès d'une seule institution (objets indépendants), il serait erroné de supposer que la succession des bonnes et des mauvaises années pour l'une des institutions soit foncièrement différente de celle des autres institutions.

En schématisant légèrement la situation, on est donc amené à imaginer le cas de portefeuilles pour lesquels les sinistres interviennent, dans chaque portefeuille selon des lois de Poisson statistiquement indépendantes, mais toutes greffées sur une et une seule variable de structure, concrétisant une sorte de «destinée» commune. Le mélange des portefeuilles devra se faire alors comme suit:

En un premier temps, on mélangera dans chaque portefeuille le montant des sinistres X_{1k} avec le nombre H_k des sinistres supposé être une variable de Poisson, et cela sans faire intervenir la variable de structure. Pour le résultat X_k, on aura, selon les règles de mélange usuelles et en utilisant (5):

$$\begin{aligned} E(X_k) &= E(H_k) \cdot E(X_{1k}) = t_k \cdot e_{1k} = P_k \\ \operatorname{Var}(X_k) &= \operatorname{Var}(H_k) \cdot E^2(X_{1k}) + E(H_k) \cdot \operatorname{Var}(X_{1k}) \\ &= t_k \cdot e_{1k}^2 + t_k \cdot (\sigma_{1k}^2 \cdot e_{1k}^2) \\ &= t_k \cdot (1 + \sigma_{1k}^2) \cdot e_{1k}^2 . \end{aligned}$$

En un second temps, on superposera les variables X_k des divers portefeuilles k selon les règles d'addition des variables statistiquement indépendantes

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sum X_k \\ E(\bar{X}) &= \sum E(X_k) \\ \operatorname{Var}(\bar{X}) &= \sum \operatorname{Var}(X_k) \end{aligned}$$

Enfin on greffera à $\bar{X}$ la variable de structure W commune. On obtient pour le montant annuel des sinistres du portefeuille après fusion (selon les règles usuelles)

$$E(X)=E(W)\cdot E(\bar{X})$$
$$\mathrm{Var}\,(X)=\mathrm{Var}\,(W)\cdot E^2(\bar{X})+E(W)\cdot \mathrm{Var}\,(\bar{X}).$$

En tenant compte des conventions et symboles

$$E(W)=1 \text{ et } \mathrm{Var}(W)=\sigma_w^2\cdot E^2(W)=\sigma_w^2,$$

on obtient pour le risque collectif après fusion

$$E(X)=E(\bar{X})=\sum E(X_k)=\sum t_k\cdot e_{1k}=\sum P_k=P$$

ce qui est l'évidence même. Pour la variance relative, après quelques calculs algébriques et en utilisant

$$t_k\cdot e_{1k}=P_k=r_k\cdot P$$

on trouve

$$\sigma^2=\sigma_w^2+\sum\frac{1}{t_k}(1+\sigma_{1k}^2)\cdot r_k^2. \tag{18}$$

Les formules pour les taux λ, λ', u et pour l'équation d'équilibre sont évidement les mêmes que dans le cas de portefeuilles statistiquement indépendants (formules (15) à (17)).

§ 5 **Exemple**

A titre d'illustration des situations décrites aux paragraphes 3 et 4, considérons une institution gérant deux portefeuilles, de caractéristiques techniques connues. L'institution se demande à quels montants fixer les provisions de fluctuation de façon à tenir une probabilité de ruine inférieure à une borne ε donnée, soit en gestion séparée, soit en gestion commune.
Considérons tout d'abord une gestion séparée des portefeuilles. Le taux u_k de la provision de fluctuation est donnée par l'équation d'équilibre (12):

$$u_k=\frac{|\ln\varepsilon|}{2}\cdot\frac{\sigma_k^2}{\lambda_k'}.$$

Dans cette expression, le σ_k^2 a la structure (11)

$$\sigma_k^2=\sigma_{wk}^2+\frac{1}{t_k}\cdot(1+\sigma_{1k}^2).$$

Le taux u_k peut ainsi être décomposé en deux parties

$$u_{1k} = \frac{|\ln \varepsilon|}{2} \cdot \frac{\sigma_{wk}^2}{\lambda_k'} \tag{19}$$

et

$$u_{2k} = \frac{|\ln \varepsilon|}{2} \cdot \frac{1}{\lambda_k'} \cdot \frac{1}{t_k} \cdot (1 + \sigma_{1k}^2). \tag{20}$$

La première partie est due à la fluctuation de la variable de structure, la seconde aux fluctuations du nombre des sinistres et du montant des sinistres.
En gestion commune par contre, la formule du taux de la provision de fluctuation, toujours la même, soit

$$u = \frac{|\ln \varepsilon|}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{\lambda'}$$

comporte la variance σ^2 suivante:
si les portefeuilles sont entièrement indépendants (§ 3), formule (14):

$$\sigma^2 = \sum \sigma_{wk}^2 \cdot r_k^2 + \sum \frac{1}{t_k} \cdot (1 + \sigma_{1k}^2) \cdot r_k^2, \tag{21}$$

si les portefeuilles sont partiellement dépendants (§ 4), formule (18):

$$\sigma^2 = \sigma_w^2 + \sum \frac{1}{t_k} \cdot (1 + \sigma_{1k}^2) \cdot r_k^2. \tag{22}$$

Dans les deux cas, le λ' intervenant dans l'équation d'équilibre est le même, puisqu'il est déterminé sur la base du même λ, formule (15)

$$\lambda = \sum \lambda_k \cdot r_k.$$

Le taux u de la provision de fluctuation présente ainsi également deux parties. Seule la partie u_1 diffère selon le type de dépendance des portefeuilles:

cas d'indépendance statistique $\quad u_1 = \dfrac{|\ln \varepsilon|}{2} \cdot \dfrac{\sum \sigma_{wk}^2 \cdot r_k^2}{\lambda'}$

cas de dépendance partielle $\quad u_1 = \dfrac{|\ln \varepsilon|}{2} \cdot \dfrac{\sigma_w^2}{\lambda'}.$

La seconde partie de la provision de fluctuation est la même dans les deux cas

$$u_2 = \frac{|\ln \varepsilon|}{2} \cdot \frac{\sum \frac{1}{t_k} (1 + \sigma_{1k}^2) r_k^2}{\lambda'}.$$

Si les portefeuilles partiels ont des variables de structure de même variance (de façon à pouvoir établir des comparaisons), la partie u_1 de la provision de fluctuation des portefeuilles après fusion sera nécessairement plus faible si les portefeuilles partiels sont statistiquement indépendants que s'ils sont partiellement dépendants (au sens donné à cette dépendance partielle, selon le paragraphe 4). Ce fait confirme l'intuition. En effet, dans (21) et (22)

$$\sum \sigma_{wk}^2 \cdot r_k^2 = \sum \sigma_w^2 \cdot r_k^2 = \sigma_w^2 \sum r_k^2 < \sigma_w^2 \text{ vu que } \sum r_k = 1.$$

Le lecteur remarquera que cette démonstration table sur les «conditions d'équilibre de type gamma» et non sur les conditions réelles des portefeuilles. Passons maintenant à un exemple numérique. Choisissons comme suit les caractéristiques techniques des portefeuilles prévus pour la fusion:

		Portefeuille $k=1$	Portefeuille $k=2$
Nombre moyen des sinistres	t_k =	800	300
Coût moyen d'un sinistre	e_{1k} =	1	4
Variance relative du montant d'un sinistre	σ_{1k}^2 =	3	15
Variance relative de structure	σ_w^2 =	0,01	0,01
Marge de sécurité	λ_k =	0,10	0,20
d'où	λ_k' =	0,0881	0,1568

Pour le portefeuille après fusion nous trouvons

Prime pure $\quad P = P_1 + P_2 = t_1 \cdot e_{11} + t_2 \cdot e_{12} = 800 + 1200 = 2000$

Marge de sécurité $\quad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 = \lambda_1 \cdot P_1 + \lambda_2 \cdot P_2 = 80 + 240 = 320$

au taux complet $\quad \lambda = \dfrac{\Lambda}{P} = 0{,}16$

d'où taux réduit $\quad \lambda' = 0{,}1313 \quad$ selon (7).

Le tableau ci-après indique les valeurs numériques qui conduisent aux montants des provisions de fluctuation, en supposant une borne supérieure pour la probabilité de ruine de $\varepsilon = 0{,}0067$, c.à.d $|\ln \varepsilon| = 5$:

	(1) *Après* fusion, portefeuilles entièrement indépendants (selon § 3)		(2) *Après* fusion, portefeuilles partiellement dépendants (selon § 4)		(3) *Avant* fusion, portefeuilles séparés	
					$k=1$	$k=2$
	P_k	r_k	P_k	r_k	P_k	r_k
Prime pure portefeuille 1	800	0,4	800	0,4	800	—
portefeuille 2	1200	0,6	1200	0,6	—	1200
total	2000	1,0	2000	1,0	—	—
Variance relative σ^2						
partie due aux fluctuations de base	0,0052		0,0100		0,0100	0,0100
partie due aux fluctuations des sinistres	0,0200		0,0200		0,0050	0,0533
au total $\sigma^2=$	0,0252		0,0300		0,0150	0,0633
Taux de la provision de fluctuation						
partie u_1	0,0990		0,1904		0,2838	0,1594
partie u_2	0,3808		0,3808		0,1419	0,8503
au total $u=$	0,4798		0,5712		0,4257	1,0097
Provision de fluctuation $U=u \cdot P$	960		1142		341	1212
					1553	

Cet exemple illustre les différences dans les ordres de grandeur des provisions de fluctuation, selon le type de gestion (séparée ou commune) et selon le degré de dépendance des portefeuilles : la provision est plus faible en gestion commune (col. 1 et 2) qu'en gestion séparée (col. 3); elle est plus faible également si les portefeuilles sont statistiquement indépendants (col. 1) que s'ils sont reliés entre eux (col. 2).

§ 6 Recherche d'optima

Le paragraphe précédent a confirmé le fait que le regroupement de plusieurs portefeuilles est susceptible de réduire les montants des provisions de fluctuation. A ce sujet, il n'est pas déraisonnable de penser que certains regroupements puissent être préférables à d'autres. On pourrait rechercher p.ex. le mélange qui minimise la provision de fluctuation, ou encore, la provision de fluctuation étant donnée d'avance, rechercher le mélange qui fournit la marge de sécurité la plus forte.

Nous voulons montrer qu'il est possible d'entreprendre avec profit des études de ce genre en partant de l'équation d'équilibre du risque collectif. Comme dans les paragraphes précédents, nous établirons les conditions d'équilibre des portefeuilles créés sur la base de la condition d'équilibre de type gamma, de façon à pouvoir utiliser l'équation d'équilibre sous sa forme simple:

$$2 \cdot \lambda' \cdot u + \sigma^2 \cdot \ln \varepsilon = 0.$$

Enfin, pour simplifier au maximum les formules qui, tout en restant élémentaires, peuvent devenir tout de même assez malcommodes à écrire, nous nous contenterons de développer les raisonnements sur des exemples numériques.

Imaginons une entreprise travaillant dans trois branches d'assurance et supposons entre ces trois branches une indépendance statistique complète, comme défini ci-dessus au paragraphe 3. Notre objectif est de constituer, avec des polices provenant des trois branches, un portefeuille de prime pure globale donnée d'avance, spécialement favorable, la notion de «favorable» devant encore être définie de manière plus précise par la suite.
Afin de retrouver la terminologie utilisée jusqu'à maintenant dans cet article, nous appelerons «portefeuille de base» ou «portefeuille partiel» ou encore «l'un des trois portefeuilles» l'ensemble des polices provenant d'une même branche. La prime globale P étant fixée d'avance, notre problème sera de déterminer les proportions r_k dans lesquelles les trois branches interviendront dans le mélange. La variance du mélange est donnée par la formule (14). Les paramètres t_k étant liés aux r_k par

$$P_k = t_k \cdot e_{1k} = r_k \cdot P$$

$$\text{c.à.d.} \quad t_k = \frac{r_k \cdot P}{e_{1k}},$$

on obtient pour σ^2 la formule

$$\sigma^2 = \sum \sigma_{wk}^2 \cdot r_k^2 + \sum \tau_k \cdot r_k, \tag{23}$$

formule dans laquelle on a posé, pour simplifier l'écriture:

$$\tau_k = \frac{e_{1k}}{P} (1 + \sigma_{1k}^2). \tag{24}$$

Pour le taux de la marge de sécurité nous avons

$$\lambda = \sum \lambda_k \cdot r_k \tag{25}$$

et pour le taux de la provision de fluctuation

$$u = \frac{|\ln \varepsilon|}{2} \cdot \frac{\sigma^2}{\lambda'}. \tag{26}$$

Les lignes 1 à 4 du tableau qui suit indiquent les valeurs choisies pour les paramètres des trois portefeuilles, et la ligne 5 les valeurs correspondantes des paramètres τ_k.

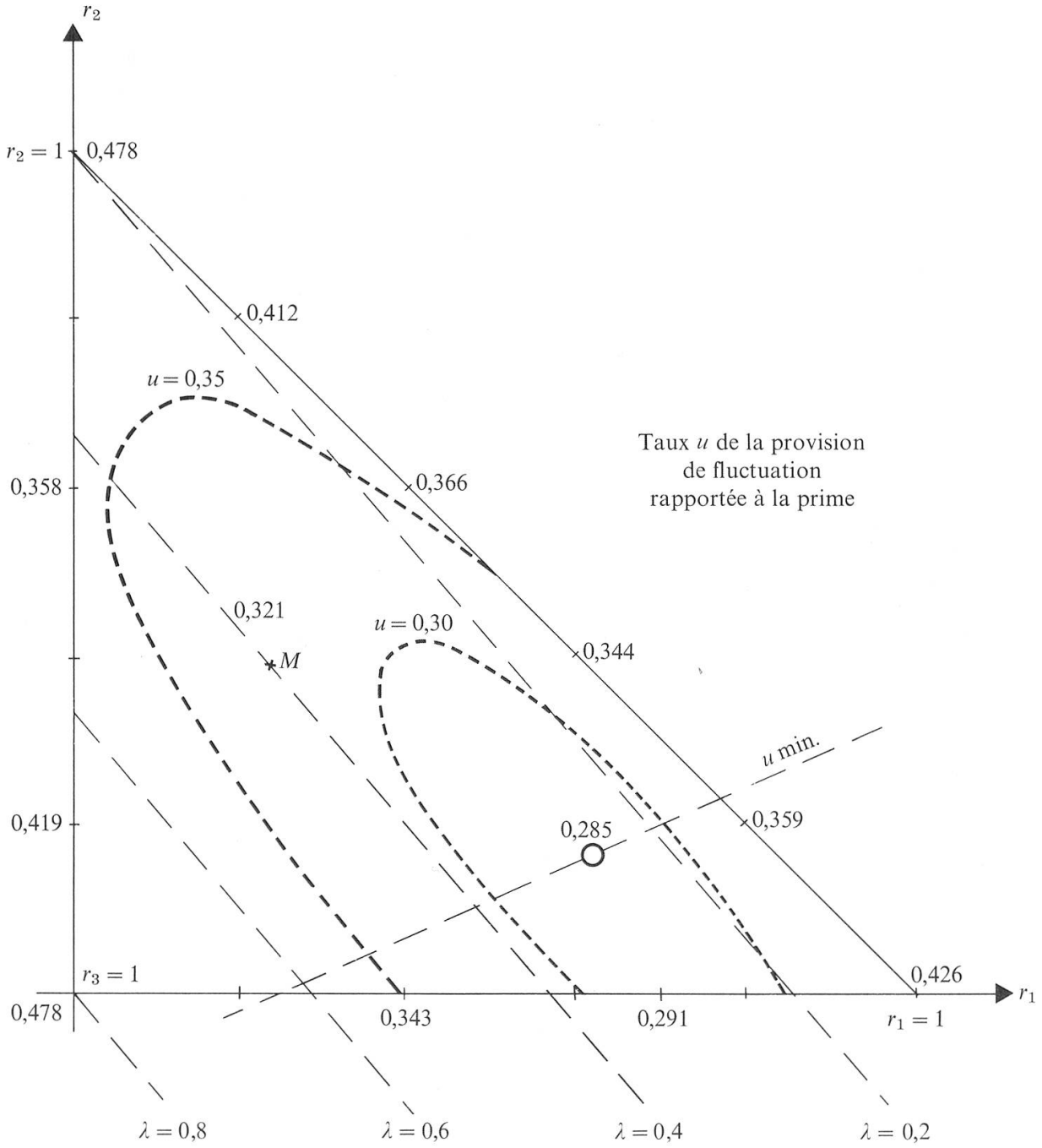
Fusion de portefeuilles. Caractéristiques techniques

Prime globale $P=1\,000$		Portefeuille n°			c. f. formule
		$k=1$	$k=2$	$k=3$	
1. Coût moyen d'un sinistre	e_{1k}	1	2	2	
2. Variance relative du montant d'un sinistre	σ^2_{1k}	4	9	24	
3. Variance relative de la variable de structure	σ^2_{wk}	0,01	0,01	0,02	
4. Taux de la marge de sécurité	λ_k	0,10	0,20	0,80	
5. Paramètre auxiliaire	τ_k	0,005	0,020	0,050	(24)
6. Variance relative	σ^2	0,015	0,030	0,070	(23)
7. Marge de sécurité	λ	0,10	0,20	0,80	(25)
8. Marge, au taux réduit	λ'	0,0881	0,1568	0,3662	(7)
9. Provision de fluctuation	u	0,426	0,478	0,478	(26)

Trois variantes simples: Trois premières variantes s'obtiennent en constituant le portefeuille final de contrats provenant d'une seule branche d'assurance (dans ce cas un seul r_k est égal à l'unité, les autres sont nuls). Les lignes 6 à 9 du même tableau donnent, pour les 3 variantes considérées, les valeurs numériques de la variance relative, des taux complets et réduits de la marge de sécurité et du taux de la provision de fluctuation, sur la base d'une borne supérieure pour la probabilité de ruine $\varepsilon = 0{,}67\,\%$, c.à.d $|\ln \varepsilon| = 5$.

§ 7 Provision de fluctuation minimale

Pour un mélange dans des proportions $r_1 : r_2 : r_3$, les formules (23) à (26) fournissent les taux de la variance relative, de la marge de sécurité et de la provision de fluctuation du portefeuille final. La figure ci-après donne une idée de la valeur numérique que peut prendre u dans le domaine triangulaire qui nous intéresse: $r_1 \geqq 0$, $r_2 \geqq 0$, $r_3 \geqq 0$, $r_1 + r_2 + r_3 = 1$. Les trois premières variantes considérées au paragraphe 6 correspondent aux trois sommets du dit triangle.


r_2
$r_2 = 1$
0,478
0,412
$u = 0,35$
Taux u de la provision
de fluctuation
rapportée à la prime
0,358
0,366
0,321
$u = 0,30$
M
0,344
u min.
0,419
0,285
0,359
$r_3 = 1$
0,426
r_1
0,478
0,343
0,291
$r_1 = 1$
$\lambda = 0,8$
$\lambda = 0,6$
$\lambda = 0,4$
$\lambda = 0,2$

En cherchant les extrema libres de la fonction $u(r_1, r_2)$ des deux variables indépendantes r_1 et r_2 ($r_3 = 1 - r_1 - r_2$), on trouve que u atteint un minimum pour

$$r_1 = 0{,}62 \qquad r_2 = 0{,}16 \qquad r_3 = 0{,}22.$$

En regroupant les branches d'assurance dans les proportions 62%, 16%, 22%, on obtient donc un portefeuille final nécessitant une provision de fluctuation minimale. Cette provision se monte à 28,5% de la prime totale $P = 1000$.
On pourrait se demander quelles provisions de fluctuation auraient été nécessaires si les 3 portefeuilles intervenant dans le mélange optimal étaient gérés séparément. Le tableau ci-après donne le détail du calcul

		Portefeuille n°			c. f. formule
		$k=1$	$k=2$	$k=3$	
Primes nettes (au total 1 000)	P_k	620	160	220	
Nombre moyen de sinistres	t_k	620	80	110	
Provision de fluctuation due					
aux fluctuations de base	u_{1k}	0,284	0,159	0,136	(19)
aux sinistres	u_{2k}	0,229	1,993	1,552	(20)
totale	u_k	0,513	2,152	1,688	
Provision, en valeur absolue		318	344	372	
au total			1 034		

En gestion séparée, le total des trois provisions attachées aux trois portefeuilles aurait donné un montant considérablement plus grand qu'en gestion commune!
Le taux minimum de 28,5% en gestion commune est inférieur aux taux correspondant aux trois premières variantes: 42,6%, 47,8% et 47,8%. On pouvait s'attendre à pareil résultat.
Il y a lieu néanmoins de se garder d'une généralisation hâtive. L'existence d'un minimum de cette nature n'est pas assurée dans le cas général. Par un choix différent des caractéristiques des branches d'assurance, on peut fort bien obtenir une provision de fluctuation sans minimum *à l'intérieur* du triangle considéré. Dans un tel cas, le minimum de u se situe sur le pourtour du triangle. Si le (ou un) minimum est atteint p.ex. en un point situé sur le côté $r_3 = 0$, à l'exclusion des extrémités (on obtient une telle situation en réduisant fortement la marge de sécurité de la troisième branche), le portefeuille final ne se compose que de polices provenant des deux premières branches d'assurance. Le calcul montre que les deux portefeuilles partiels doivent être mélangés

dans les proportions 65% : 35%. La provision de fluctuation minimale se monte dans ce cas à 34,4%. Si, de plus, on réduit suffisamment la marge de sécurité de la seconde branche d'assurance, le portefeuille final ne peut se composer que de polices de la première branche – toujours avec l'intention de rendre minimale la provision de fluctuation. Le minimum de u se situe au sommet $r_1=1, r_2=r_3=0$ du triangle; sa valeur est, comme on l'a vu plus haut, $u=42{,}6\%$. De ce résultat, on peut conclure qu'en cas de regroupements de portefeuilles provenant de branches d'assurance statistiquement indépendantes, le mélange qui rend minimale la provision de fluctuation ne fait pas intervenir nécessairement des polices de toutes les branches d'assurance considérées.

§ 8 Marge de sécurité maximale

Relevons tout de suite que le mélange conduisant à la provision de fluctuation minimale ne représente pas nécessairement la situation la plus «favorable» pour l'assureur. Nous allons montrer que, dans notre exemple et tout en gardant la même borne ε pour la probabilité de ruine, l'assureur a avantage à augmenter la part du troisième portefeuille de base dans le mélange: le «gain» en marge de sécurité compensera, et même plus, la «perte» sur la provision de fluctuation.

Considérons un point intérieur quelconque M du triangle (c.f. figure). A ce point correspond un mélange des portefeuilles dans les proportions $r_1:r_2:r_3$. En M, le taux λ de la marge de sécurité du portefeuille final (25) vaut – dans notre exemple numérique:

$$\lambda=0{,}1\cdot r_1+0{,}2\cdot r_2+0{,}8\cdot r_3.$$

Les points du triangle fournissant le même taux qu'en M se situent sur la droite

$$0{,}1\cdot r_1+0{,}2\cdot r_2+0{,}8\cdot r_3-\lambda=0$$

c.à.d. en tenant compte de

$$r_3=1-r_1-r_2$$

sur la droite

$$0{,}7\cdot r_1+0{,}6\cdot r_2-0{,}8+\lambda=0. \tag{27}$$

Sur cette droite, λ étant constant, le taux réduit λ' l'est également. Ainsi, sur la dite droite, la formule pour u

$$u=\frac{|\ln\varepsilon|}{2}\cdot\frac{\sigma^2}{\lambda'}$$

montre que le minimum de u sera situé à l'endroit où σ^2 sera minimum. Sur la dite droite, la variance σ^2 n'est plus fonction que de l'un des trois paramètres r, p.ex. de r_1 · σ^2 étant un polynome du second degré en r_k, c.f. formule (23), devient un polynome du second degré de la seule variable r_1. Il est alors aisé de trouver le point fournissant sur cette droite un σ^2 minimum. On trouve que le point «u minimum» sur la droite «λ=constante» est situé sur la droite

$$4 \cdot r_1 - 9 \cdot r_2 - 1 = 0. \tag{28}$$

Le point d'intersection des deux droites (27) et (28)

«λ=const.» et «u minimum»

a une signification actuarielle simple: c'est l'endroit pour lequel, λ étant donné, la provision de fluctuation est la plus faible. C'est également l'endroit pour lequel, u étant donné, la marge de sécurité λ est la plus forte. Géométriquement, ce point représente le point de contact de la tangente λ=const. à une courbe de niveau u=const.

Notons encore que la position de ces droites particulières ne dépend pas de la valeur choisie pour ε. En effet, ln ε n'intervient qu'à titre de facteur multiplicatif dans la formule de u.

A titre d'exemple, si l'on dispose d'une provision de fluctuation de 32% (u = 0,32), la marge optimale est de 46% de la prime P = 1000. Tout autre point de la ligne de niveau u = 0,32 fournit une marge inférieure à 46%.

La situation u=0,32 et λ=0,46 correspond au point de coordonnées

$$r_1 = 0{,}421 \qquad r_2 = 0{,}076 \qquad r_3 = 0{,}503.$$

Il y a donc lieu de mêler les 3 portefeuilles de base dans les proportions

$$42{,}1\% : 7{,}6\% : 50{,}3\%.$$

Ce mélange est, sous un certain rapport, préférable à celui que nous avons déterminé ci-dessus et pour lequel u atteignait un minimum absolu (u=28,5%). En effet, à la situation u=28,5% correspond un λ=27,0%. A notre nouvelle situation u=32% correspond un λ=46,0%. Rapportée à la prime P=1000, on obtient:

situation «u minimum»	u= 285	λ=270
situation «u=32%»	u= 320	=460
Les variations	Δu= + 35,	$\Delta\lambda$=190

montrent que la seconde situation est en fait préférable à la première: un renforcement de la provision u n'absorbe en intérêts (même à un taux d'usurier) qu'une infime partie de l'augmentation de recette en marges de sécurité.

Conclusions

Les questions posées en tête de notre introduction laissaient entrevoir les réponses que nous nous proposions d'apporter: l'équation générale d'équilibre

$$(P+\Lambda)\cdot\frac{\ln\varepsilon}{U}+\psi_c\left(\frac{-\ln\varepsilon}{U}\right)=0$$

forme de l'équation de Cramèr plus malléable que l'originale

$$\text{probabilité de ruine}<\varepsilon=e^{sU}$$

permet d'exprimer, sans difficultés mathématiques majeures, la relation liant les paramètres du risque aux marges de sécurité, aux provisions de fluctuation et à la probabilité de ruine. Par simple application de cette équation de base, une première fois avant, une seconde fois après la fusion, il est possible de déceler, lors de regroupements de portefeuilles, sur quels points les termes de l'équilibre subissent une altération et avec quelle amplitude.

Pour ne pas compliquer inutilement les développements théoriques et permettre des applications numériques, nous avons fait usage de la condition d'équilibre particulière des portefeuilles de type gamma. Sur cette base simplifiée, la recherche des solutions optimales dans un contexte donné peut être menée à chef sans peine. Il est évident que dans les exemples traités, seule la méthode nous importait: les résultats numériques découlent directement des hypothèses plus ou moins réalistes faites sur la structure technique des portefeuilles considérés.

Si la détermination des provisions de fluctuation, risques et portefeuilles séparés, nous a amené, dans [2] in fine, à exprimer notre déception devant l'importance des montants requis, la présente étude a montré, formules à l'appui, que les exigences financières peuvent être fortement réduites si l'on constitue les dites provisions non pas pour un seul mais conjointement pour plusieurs portefeuilles et types de risques.

Marc-Henri Amsler
Professeur à l'Université
Bâtiment B.F.S.H.
1015 Lausanne-Dorigny

Bibliographie

[1] Amsler, M.-H.: L'équation générale d'équilibre d'un risque collectif, Bull. Ass. Act. Suisses, 1978, 2
[2] Amsler, M.-H.: Ruine et provision de fluctuation, Bull. Ass. Act. Suisses, 1979,1

Résumé

Le présent article fait suite à la contribution du même auteur, parue dans le fascicule 1/1979 du «Bulletin», consacrée aux provisions de fluctuation de portefeuilles d'assurance. Il traite des améliorations que peut apporter, sur le plan de l'équilibre financier et de la solvabilité, la fusion de portefeuilles d'assurance. Dans la partie théorique comme dans les applications numériques, la méthode utilisée relève directement de la théorie de l'équation générale d'équilibre d'un risque collectif.

Zusammenfassung

Die vorliegende Arbeit stellt eine Fortsetzung des vom selben Autor in Heft 1/1979 der «Mitteilungen» erschienenen Artikels über die Schwankungsrückstellungen von Versicherungsportefeuilles dar. Es werden die Verbesserungen bezüglich des finanziellen Gleichgewichtes und der Solvabilität untersucht, welche durch Fusionen von Versicherungsportefeuilles erzielt werden können. Die verwendete Methode lehnt sich, beim theoretischen Teil wie auch bei den numerischen Beispielen, unmittelbar an die Theorie der Gleichgewichtsgleichung der kollektiven Risikotheorie an.

Summary

The present paper is a continuation of the contribution of the same author, published in issue 1/1979 of the "Bulletin", concerning the risk reserve of insurance portfolios. It concerns the improvements the aggregation of portfolios can involve with respect to the financial stability and the solvency. In the theoretical developments as well as in the numerical examples the method proceeds directly from the theory of the general equation of equilibrium of the collective risk theory.