

Schadenverteilung nach Grösse in der Nicht-Leben-Versicherung

Autor(en): **Benktander, Gunnar**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuairees Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **70 (1970)**

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-967033>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Schadenverteilung nach Grösse in der Nicht-Leben-Versicherung

Von Gunnar Benktander, Zürich

Die Art der Schadenverteilung nach der Grösse ist selbstverständlich von grossem Interesse für den Schadenexzess-Rückversicherer. Es ist daher wichtig, das zur Verfügung stehende statistische Material durch eine stetige Verteilungsfunktion mit möglichst wenig Parametern gut zu approximieren. Durch sie gewinnt der Rückversicherer eine erhöhte Stabilität und eine bessere Grundlage für eine richtige und gerechte Preisfestsetzung. Es bestehen auf Grund verschiedener Argumente Tendenzen nach einer als «distribution-free» zu bezeichnenden Behandlung. Bei sehr geringem Schadenmaterial entsteht aber eine grosse Unsicherheit in der Schätzung. Diese lässt sich vermindern, wenn man eine Verteilungsfunktion annehmen kann, welche sich hinsichtlich ihrer Form (nicht notwendigerweise ihres Niveaus) von Portefeuille zu Portefeuille des gleichen Marktes nicht ändert.

Riebesell schlägt in seiner klassischen Arbeit von 1936 vor, dass man die *Exponential-Verteilung* anwenden sollte. Er schreibt:

«Bei den meisten Versicherungszweigen genügt in erster Annäherung als Häufigkeitsfunktion für die Höhe der Schäden die Gleichung

$$y = ae^{-bx},$$

wo x die Summe ist und y die Wahrscheinlichkeit, mit der diese Schadenssumme auftritt. Diese Funktion ist auch für solche Versicherungszweige zu benutzen, wo es eine Versicherungssumme nicht gibt. Hier ersetzt der Höchstschaden oder die Haftungsgrenze die Versicherungssumme.»

Es zeigte sich inzwischen, dass diese Verteilung zu rasch konvergiert und die Beschreibung der Frequenz der grösseren Schäden daher unbefriedigend ausfiel. Almer versuchte dem abzuhelpen, indem er mit einem Exponentialtrinom arbeitete. Im Intervall, das eine Direktversicherungsgesellschaft interessiert, erhält man damit wohl eine befrie-

digende bis gute Beschreibung. Die Wahrscheinlichkeitsmenge für ein mit $x > x_M$ definiertes Gebiet wird jedoch unterschätzt.

Die Exponential-Verteilung ist also nicht hinreichend schief. Man erreicht eine Erhöhung der Schiefe von 0 zu einem positiven Wert durch den Übergang von einer normalen zu einer log-normalen Verteilung. Warum soll man also nicht analog von der Exponential- zu der Log-Exponential-Verteilung übergehen? In der Praxis wird öfters die log-exponentiale Verteilung angewandt, welche eher unter dem Namen *Pareto-Verteilung* bekannt ist. Aus dem oben Gesagten geht hervor, dass die log-normale Verteilung, auf die wir später zurückkommen werden, weniger schief als die Pareto-Verteilung ist, denn: die normale Verteilung hat die Schiefe 0, während die exponentiale eine positive Schiefe hat.

Meidell, Norwegen, hatte schon 1912 die Pareto-Verteilung in der Lebensversicherung angewandt. In Schweden interessierte sich K.G. Hagström frühzeitig (1925) für die Pareto-Verteilung oder das Pareto-Gesetz, wie es bisweilen etwas präventios genannt wird, indem eine Gesetzmässigkeit in der Einnahmenverteilung angedeutet oder suggeriert wird. Schon in den dreissiger Jahren wurde sie für statistisches Material aus dem österreichischen Autogeschäft verwendet (Myslivec, Prag 1939). In der Brandversicherung war auch Meidell etwas später in dieser Richtung aktiv, ebenso Cvetnic 1930 am Aktuar-Kongress in Stockholm. In Deutschland machte Lange ein paar Jahre später eine Studie über die Schäden der Hamburger Feuerkasse.

Es bedarf indessen keines tiefergehenden Vergleiches zwischen dieser Pareto-Funktion und einem praktischen statistischen Material, um zu sehen, dass sie nicht ausreicht, um das ganze Intervall zu beschreiben, das den Direktversicherer interessiert. Dagegen gibt sie eine Beschreibung des Schwanzes, welche besser ist als die der Exponential-Verteilung und, wenn man sich in der Schadengrösse aufwärts bewegt, auf der sicheren Seite liegt. Sie konvergiert also eher zu langsam. Wir werden darauf zurückkommen.

Sousseier und Ramel schlugen daher in einem Preisaufsatz anfangs der fünfziger Jahre vor, die mittelgrossen und grossen Autoschäden mittels dreier sukzessiver Pareto-Verteilungen zu beschreiben mit der Absicht, die Konvergenz zu beschleunigen. Hier liegt also eine gewisse Parallelität mit Almers Exponentialtrinom vor. Almer approximiert sozusagen von unten her, während die Franzosen von oben her approximieren, mit im Prinzip majorisierenden Funktionen.

Die Pareto-Verteilung wurde und wird in der Praxis von einigen Rückversicherern angewandt. Abgesehen vom Niveaufaktor, welcher selbstverständlich falsch geschätzt werden kann, kommt man strukturell auf die sichere Seite für das höher gelegene Intervall. Ein Vorteil besteht darin, dass das statistische Material von verschiedenen Zeitspannen mit ungleichem Geldwert ohne Anpassung zusammengelegt werden kann.

Als Zukunftsvision könnten wir uns denken, dass, statt über den Prämiensatz zu verhandeln, Zedent und Rückversicherer einen spitzfindigen Streit führen, welcher Typus der Schadenverteilung angewandt werden soll.

Die Pareto-Verteilung gibt unter gewissen Voraussetzungen bezüglich eines realistischen Niveaus (= Anzahl erwartete Exzessschäden über einer gewissen Grenze) eine Approximation auf der sicheren Seite. Wenn wir die Pareto-Verteilung als Rechnungsgrundlage erster Ordnung anwenden, so entsteht dadurch das Bedürfnis, die zweite Ordnung genauer herauszufinden. Wir werden auf diesen Umstand später zurückkommen.

Es wird zuweilen angeführt, dass die Pareto-Verteilung ungeeignet sein könnte, da nicht alle Momente existieren, während in der Praxis alle Momente konvergieren müssen.

Aber das Wesentliche ist wohl, eine gute Beschreibung mittels einer einfachen Formel zu finden. In der zweiten Ordnung werden wir indessen diejenigen Funktionen anwenden, für welche alle Momente konvergieren.

Im weiteren erwähnen wir einige Verteilungstypen, welche zur praktischen Anwendung kamen:

Die Pearson-Kurven: Es sei auf die Arbeit von Delaporte auf diesem Gebiet hingewiesen, welche am ASTIN-Kongress 1961 in Rättvik vorgelegt wurde. Delaporte hatte in dieser Hinsicht einen Vorgänger in Konau 1937. Er wendet Pearson Typ I und Typ IV für die Verteilung des totalen Schadenbetrages an. Daneben kam auch eine logarithmische Transformation des Typs III zur Anwendung [*Eckert*].

Ein Verteilungstyp, welcher viele Verfechter hat und der, um einen modernen Ausdruck zu verwenden, «in» ist, ist die log-normale Verteilung.

In der praktischen Anwendung innerhalb der Unfall- und Haftpflichtversicherung waren die Italiener die Pioniere. Schon Anfang der

dreissiger Jahre begannen Amoroso und d'Addario mit Publikationen. Der frühere ASTIN-Präsident Marcel Henry wandte 1937 die log-normale Verteilung in der Autohaftpflicht an, und in der modernen ASTIN-Zeit kennen wir den Einsatz von Beard und Benckert auf diesem Gebiet.

Einige Versicherungsmathematiker sind jedoch nicht so erpicht auf die Anwendung dieser Verteilung, da die Berechnungen etwas beschwerlich sind. Andererseits wurde aber auch behauptet, dass die log-normale Verteilung die Frequenz der hohen Werte etwas unterschätze.

Systematische Behandlung

Wie schon vorher erwähnt, ist der Ausgangspunkt verschieden, je nachdem, ob man sich für die ganze Verteilung interessiert oder sich darauf begrenzt, die Verteilung der grösseren Schäden zu untersuchen.

Im letzteren Fall möchte ich hier an die Studie erinnern, welche Professor Segerdahl und ich für den Aktuar-Kongress in Brüssel machten und welche in gewisser Weise die nachfolgenden Diskussionen beeinflusste.

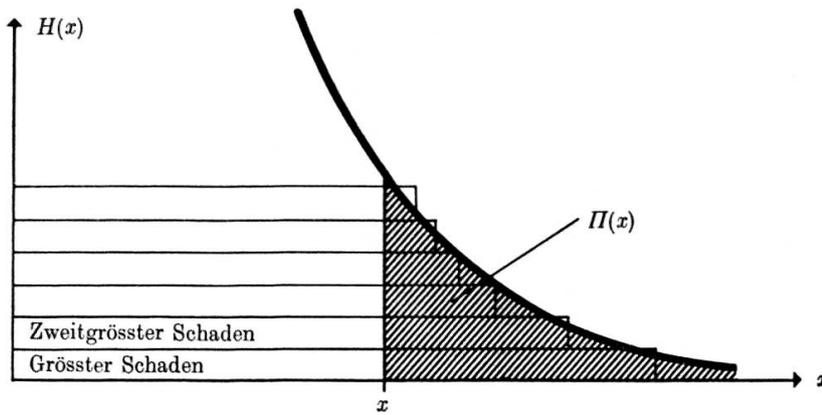
Auf Grund einiger recht allgemein formulierter Kriterien konzentrierten wir uns auf den mittleren Exzessschaden als Funktion der Schadengrenze, also in analytischer Form:

$$m(x) = \frac{\int_x^{\infty} (z-x) dP(z)}{\int_x^{\infty} dP(z)} = \frac{\int_x^{\infty} H(z) dz}{H(x)},$$

wo $P(z)$ die übliche Cramersche Bezeichnung der Verteilung der Schadenhöhe ist, und $H(z)$ die Anzahl Schäden darstellt, welche die Grenze z übersteigen.

Also: $H(z) = H(o)[1 - P(z)].$

Das Integral beim oben angeführten rechten Bruch entspricht der Exzess-Risikoprämie $\overline{\Pi}(x)$. Wenn man sich nicht die Mühe machen will, die partielle Integration, welche im Prinzip oben angewandt wurde, auszuführen, kann man eine kleine Figur anwenden.



Wir haben also

$$m(x) = \frac{\Pi(x)}{H(x)}$$

oder

$$\Pi(x) = H(x) \cdot m(x).$$

Aus Obenstehendem geht hervor, dass, falls die Funktion $m(x)$ bekannt ist, man $H(x)$ bis auf einen Niveaufaktor berechnen kann und dadurch auch $\Pi(x)$.

Exponentialverteilung:

Wenn
$$H(x) = H(0) e^{-Kx},$$

dann
$$m(x) = \frac{\int_0^x e^{-Ky} dy}{e^{-Kx}} = \frac{1}{K} = \text{konstant}.$$

Wenn man will, kann man den mittleren Exzessschaden über x mit der verbleibenden mittleren Dauer eines Telefongesprächs, welches schon während des Zeitraumes x läuft, vergleichen. Wir wissen, dass Erlangs Annahme der konstanten mittleren Wartezeit in der Praxis nicht stimmt. In gleicher Weise ist es in der Schadenversicherung, $m(x)$ wächst mit x . Wir können also symbolisch schreiben

$$m'(x) > 0$$

Pareto-Verteilung:

$$H(x) = H(x_0) \left(\frac{x}{x_0} \right)^{-\alpha} \quad x \geq x_0.$$

Wir erhalten so

$$m(x) = \frac{\int_x y^{-\alpha} dy}{x^{-\alpha}} = \frac{x}{\alpha - 1} \quad \alpha > 1.$$

Hier steigt folglich der Mittelexzess-Schaden linear mit der Schädengrenze x . Ein kleines α bedeutet eine gefährliche Verteilung und führt auch zu einem grösseren mittleren Exzessschaden.

Gleichzeitig mit dem theoretischen Studium untersuchten wir das statistische Material aus verschiedenen Ländern und Branchen und berechneten $m(x)$. In sämtlichen Fällen wuchs $m(x)$ mit x , aber mit steigendem x nahm die Zuwachsschnelligkeit ab. Für jedes praktische statistische Material, welches ja einen höchsten Wert für x besitzt, muss von einem gewissen Punkt an das beobachtete $m(x)$ abnehmen, um gegen 0 zu sinken, wenn x sich seinem Maximum nähert. Für ein analytisches Modell, welches für ein im Prinzip unendliches Intervall zur Anwendung kommt, ein fallendes $m(x)$ anzunehmen, dürfte jedoch unrealistisch sein.

Ein analytisches Modell sollte also die drei Bedingungen

$$1) \quad m(x) > 0$$

$$2) \quad m'(x) \geq 0$$

$$3) \quad m''(x) \leq 0$$

erfüllen.

In der Praxis verwendbare Modelle scheinen also im Gefährlichkeitsgrad zwischen der Exponential- und der Pareto-Verteilung zu liegen, und zwar näher bei der letzteren.

In der Arbeit von Segerdahl und mir findet sich eine kleine Tabelle mit solchen Verteilungen.

Die Verteilungen, welche in der Nicht-Leben-Versicherung von Interesse sind, haben eine Eigenschaft gemeinsam: sie sind schief. In der klassischen Definition wurde die Schiefeit als eine Abweichung von der Symmetrie aufgefasst, und sie wurde mit dem normierten dritten Moment $\frac{\mu_3}{\sigma^3}$ gemessen. Für unseren Zweck ist eine solche Messung von begrenztem Wert, besonders weil sich unser Interesse auf die höheren Werte der Variablen konzentriert. Vor einigen Jahren führte ich in Analogie zur Lebensversicherung die Schadensterblichkeit ein. $\mu(x)dx$ soll die Wahrscheinlichkeit bezeichnen, dass ein Schaden, welcher mindestens gleich x ist, $x + dx$ nicht übersteigen wird. $\mu(x)dx$ stellt also die Wahrscheinlichkeit dar, dass die stochastische Variable, welche dem Schaden entspricht, in x «lebt», aber im Intervall $x + dx$ «stirbt».

Je niedriger also die Schadensterblichkeit, desto schief und gefährlicher ist die Verteilung.

Auf Grund der oben gemachten Voraussetzungen haben wir

$$\mu(x) dx = -\frac{dH(x)}{H(x)}$$

oder

$$\mu(x) dx = -d \ln H(x)$$

\ln = natürlicher Logarithmus,

was zu

$$H(x) = \text{const } e^{-\int^x \mu(t) dt}$$

führt.

Es ist leicht, zu beweisen,

dass

$$\mu(x) = \frac{1 + m'(x)}{m(x)},$$

denn

$$H(x) m(x) = \int_x H(z) dz$$

differenziert

$$H(x) m'(x) + H'(x) m(x) = -H(x)$$

ergibt

$$\frac{1 + m'(x)}{m(x)} = -\frac{H'(x)}{H(x)} = \mu(x).$$

Wenn die stochastische Variable x unbegrenzt hohe Werte annehmen kann, so ist $H(x) > 0$ für alle endlichen x .

Aus $H(\infty) = 0$ folgt, dass das Integral

$$\int_x^{\infty} \mu(t) dt \quad \text{divergiert.}$$

Ist speziell $\mu(x) = k \cdot x^p$, dann sind diese Bedingungen erfüllt für alle $p \geq -1$.

Konstante Sterblichkeit [$p=0$] ergibt die Exponentialfunktion, und $p = -1$ führt zur Pareto-Verteilung, denn

$$H(x) = c \cdot e^{-\int \frac{K}{t} dt} = c \cdot x^{-K}.$$

Innerhalb der gegebenen Klasse von Verteilungen stellt die, welche $p = -1$ entspricht, eine Grenzklasse dar, gekennzeichnet mit der denkbar niedrigsten Schadensterblichkeit.

Innerhalb des gegebenen Rahmens stellt also die Pareto-Klasse eine maximale Schiefe dar, in Übereinstimmung mit der von uns gegebenen Definition.

Suchen wir Verteilungen, welche schiefere sind als die Pareto-Verteilung, müssen wir ausserhalb der Klasse gehen, welche durch

$$\mu(x) = K \cdot x^p$$

definiert ist.

Wir untersuchen den Ansatz

$$\mu(x) = K_1 x^{p_1} + K_2 x^{p_2} + K_3 x^{p_3} + \dots,$$

wobei

$$p_1 > p_2 > p_3 \dots$$

und alle

$$K_i > 0.$$

Für grosse x wird das Verhalten dieser Frequenzfunktion vom Term mit p_1 bestimmt.

Beispiel:
$$\mu(x) = K_1 x^{-1} + K_2 x^{-2}$$

$$H(x) = c \cdot x^{-K_1} \cdot e^{+\frac{K_2}{x}}.$$

Diese Funktion konvergiert schnell gegen die Pareto-Verteilung.

Wir können also die Pareto-Klasse im weiten Sinne definieren als die Verteilungen, welche der Formel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \mu(x) = K > 0$$

genügen.

Wenn $\mu(x) = \frac{K}{x \ln x}$ gilt,

so divergiert $\int_x^\infty \mu(t) dt$.

Für alle $x > x_0$ besteht eine niedrigere Sterblichkeit als im

Pareto-Fall $\mu(x) = \frac{K}{x}$.

Wir haben $H(x) = c e^{-\int \frac{K dt}{t \ln t}} = c \cdot \frac{1}{(\ln x)^K}$.

Diese Verteilung hat keinen endlichen Mittelwert und ist für die praktische Anwendung nicht interessant.

Das gleiche gilt für alle Verteilungen, welche mit

$$\mu(x) = \frac{K}{x(\ln x)^q} \quad \text{wo } 0 < q < 1$$

definiert sind.

Wenn wir einen endlichen Mittelwert verlangen, wird schon ein Teil der Pareto-Klasse mit $K > 1$ definiert. Eine Verteilung mit niedrigerer Sterblichkeit als die der Pareto-Klasse kann folglich intuitiv nicht einen endlichen Mittelwert haben.

Segerdahl hat dies bewiesen, als er zeigte, dass

$$\mu(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x} \quad \text{mit} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varepsilon(x) = 0$$

zu einer Verteilung mit unendlichem Mittelwert führt. Schliessen wir pathologische Fälle aus, so können wir für Verteilungen, deren $\mu(x)$ für $x > x_0$ monoton sind oder durch monotone Funktionen majorisiert werden, folgende Aussage machen:

Die Pareto-Klasse im weiten Sinne ist eine Grenzkasse, welche die Verteilungen, für welche alle Momente existieren, von denjenigen, für welche alle Momente divergieren, scheidet.

Herr Green, London, hat vor einigen Jahren versucht, ein Gegenbeispiel zu konstruieren durch Studium der Verteilung

$$f(x) = \frac{A}{x^2 (\ln x)^2}.$$

Für $x \geq c > 1$ zeigt sich indessen, dass diese Verteilung der Pareto-Klasse im weiten Sinne angehört.

Wir haben also bewiesen, dass für die Exponentialverteilung

$$\mu(x) = \text{konstant}$$

und für die Pareto-Verteilung

$$\mu(x) = \frac{K}{x} \quad \text{ist.}$$

Bevor wir weitergehen, beweisen wir noch einige allgemeine Formeln. Wenn $H(x)$ die erwartete Anzahl Schäden über x bezeichnet und $\Pi(x)$ bzw. $\Pi(x, Kx)$ der Exzess-Risikoprämie für das Intervall (x, ∞) bzw. (x, Kx) entspricht, dann haben wir:

$$\Pi(x) = H(x) \cdot m(x),$$

und da
$$\Pi(x) = \int_x H(t) dt,$$

gilt
$$\Pi'(x) = -H(x).$$

Weiter haben wir

$$\frac{d \ln \Pi(x)}{dx} = \frac{\Pi'(x)}{\Pi(x)} = -\frac{H(x)}{\Pi(x)} = -\frac{1}{m(x)},$$

und gemäss der Definition von $\mu(x)$ ist

$$\frac{d \ln H(x)}{dx} = -\mu(x).$$

Wir haben auch bewiesen, dass

$$\mu(x) = \frac{1 + m'(x)}{m(x)} \quad \text{ist.}$$

Wir versuchen nun, die Berechnungsgrundlage der zweiten Ordnung zu finden, indem wir von der Pareto-Verteilung ausgehen:

$$m(x) = \frac{x}{\alpha - 1} = \frac{x}{a}.$$

Wir verlangen, dass die Bedingungen

$$m'(x) > 0 \quad \text{und} \quad m''(x) < 0$$

erfüllt sein sollen.

Zwei Modifikationen bieten sich sogleich an, nämlich

$$\text{I} \quad m(x) = \frac{x}{a + 2b \ln x}$$

$$\text{und II} \quad m(x) = \frac{x^{1-b}}{a} \quad 0 < b \leq 1$$

Daraus folgt, dass

$$H_{\text{I}}(x) = c x^{-a-1} x^{-b \ln x} (a + 2b \ln x)$$

$$H_{\text{II}}(x) = c a x^{-(1-b)} e^{-\frac{a}{b} x^b}$$

$$\text{und} \quad \Pi_{\text{I}}(x) = c x^{-a} x^{-b \ln x}$$

$$\Pi_{\text{II}}(x) = c e^{-\frac{a}{b} x^b}.$$

Daher gilt:

$$\ln \prod_{\text{I}}(x) = \ln c - a \ln x - b \ln^2 x$$

$$\ln \prod_{\text{II}}(x) = \ln c - \frac{a}{b} x^b$$

und

$$\mu_{\text{I}}(x) = \frac{a + 1 + 2b \ln x}{x} - \frac{2b}{x(a + 2b \ln x)}$$

$$\mu_{\text{II}}(x) = \frac{a}{x^{1-b}} + \frac{1-b}{x}.$$

Es ist leicht zu sehen, dass für I und II

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \mu(x) = \infty \quad \text{gilt,}$$

was die Konvergenz sämtlicher Momente sichert.

Die Inflationseffekte sind von besonderer Bedeutung innerhalb der Schadenexzedenten-Rückversicherung. Wenn alle Schäden mit dem Faktor $i > 1$ anwachsen, erhält man

$$\text{I:} \quad m_i(x) = \frac{1}{a - 2b \ln i + 2b \ln x}$$

$$\text{II:} \quad m_i(x) = \frac{x^{1-b}}{a} i^b = m(x) i^b.$$

Beide Resultate werden leicht aus der Relation

$$H_i(x) = H\left(\frac{x}{i}\right) \quad \text{abgeleitet.}$$

Aus Obenstehendem ersehen wir, dass in I und II der Durchschnittsschaden mit der Inflation *anwächst*, was mit unseren Beobachtungen tatsächlich übereinstimmt.

Für das Pareto-Modell bleibt der Durchschnittsschaden konstant.

Bei einem französischen Versicherungsmaterial für Autohaftpflicht habe ich herausgefunden, dass, wenn jeder Schaden um 10% anwächst, der durchschnittliche Exzessschaden um 6% ansteigt.

Wir haben folglich für den Fall II die Gleichung zu lösen

$$1.1^b = 1.06$$

und erhalten

$$b = 0.6.$$

Die Herren Depoid-Duchez haben auf Grund der Abwicklungsstatistik für frühere Jahrgänge eine Schadenverteilung in Frankreich für Autohaftpflicht für den Jahrgang 1966 gemäss nachstehender Tabelle (Kolonne 2) abgeleitet.

Die Zahlen beziehen sich auf 100 000 Schäden:

Schadengrenze in 100 000	Anzahl Exzess- schäden gemäss Depoid-Duchez	$H_I(x)$	$H_{II}(x)$
0,6	202		196,6
0,8	144		141,0
1,0	106	106,0	106,0
1,5	58	63,6	58,6
2,0	36	38,5	35,8
3,0	17	16,0	15,8
4,0	8	7,7	8,0
5,0	4	4,0	4,4

Man erwartet folglich, dass von 100 000 Schäden 106 100 000 übersteigen werden.

Hier ist $m_I(x) = \frac{x}{0.9 + 2 \log x}$ $\log =$ dekadischer Logarithmus.

$$H_I(x) = 117.8 x^{-1.9} x^{-\log x} (0.9 + 2 \log x).$$

Zur einfacheren Berechnung wurden die 10er-Logarithmen verwendet. Das b ist also hier $\log e = 0,434$ ($2 \log e \cdot \ln x = 2 \log x$)

$$m_{II}(x) = \frac{x^{1-0.6}}{0.94}$$

$$H_{II}(x) = 507.8 x^{-0.4} e^{-1.57 x^{0.6}} .$$

Wie es scheint, geben beide Formeln I und II eine ausgezeichnete Beschreibung, besonders die Formel II, welche ein Extrapolation bis zu 60000 hinunter zulässt.

Das obige Modell bezieht sich auf 1966. Vorausgesetzt, dass die Inflation das Muster nicht ändert, sondern für alle Schäden die gleiche Tendenz des Zuwachses beibehält, d. h. dass

$$H_i(x) = H\left(\frac{x}{i}\right),$$

können wir ohne weiteres die Berechnungen für 1967, 1968, 1969 und 1970 ausführen, wenn der Inflationsfaktor bekannt ist.

Wir stellten fest, dass es nicht ausreicht, einen Lohnindex anzuwenden, sondern dass es notwendig ist, den Lohnindex mit einem Faktor zu erhöhen, für welchen ich die Bezeichnung «superimposed inflation» eingeführt habe. [Siehe *G. Benktander*, «The effect of inflation on excess layers».] Der Hauptteil der Schadeninflation kann mit der Lohnsteigerung erklärt werden, aber darüber hinaus existiert eine «Inflation» in der Gerichtspraxis, der Schadenregulierungspraxis und den Spitalkosten. Ferner wirkt sich der medizinische Fortschritt aus, welcher darauf hintendiert, in jedem Fall die grösseren Schäden, an welchen wir beteiligt sind, zu erhöhen.

Eine mathematische Beschreibung der Schadenverteilung erleichtert den Vergleich des Resultats für verschiedene Zeitspannen.

Aus früherem Material, welches 20% des französischen Marktes umfasst, konnte ich ableiten, dass

$$m(x) = \frac{x}{1.2 + 2 \log x} .$$

Wenn bis 1966 eine Schadeninflation von 50% angenommen wird, was angemessen scheint, ergibt sich

$$m_{66}(x) = \frac{x}{1.2 - 2 \log 1.5 + 2 \log x} = \frac{x}{0.85 + 2 \log x}.$$

Dies liegt nahe bei der Formel für $m_I(x)$, in welcher wir 0,90 anstatt 0.85 hatten.

Was ist nun der Sinn dieser Untersuchungen, vom Standpunkt des Exzess-Rückversicherers aus gesehen?

Die Tarifierung kann daraus Nutzen ziehen, dass man in der Lage ist, präzisere Schätzungen zu machen. Für sogenannte Working Covers können die Fehler in der Festsetzung der Risikoprämie stark vermindert werden. Eine weitere Reduktion der Fehler ist möglich, wenn die Information über das Intervall unterhalb der aktuellen Schadengrenze zugänglich ist.

Die Bedeutung dieser höheren Präzision wird klar, wenn man den Effekt der Konkurrenz zwischen den Exzess-Rückversicherern betrachtet. Eine fehlende Exaktheit in der Schätzung der Risikoprämie wirkt sich zum Nachteil des ganzen Marktes aus. Besonders die Rückversicherer, welche mit niedriger Präzision arbeiten, werden im Konkurrenzkampf bei reiner Preiskonkurrenz geschädigt, da die Portefeuilles, die sie erhalten, die Tendenz aufweisen, stark untertarifert zu sein. Weiter ist die Kenntnis der Struktur der Schadenverteilung von unschätzbarem Nutzen bei der Tarifierung von hohen Layers mit wenig oder keinen Schäden.

Varianzberechnung

Von besonderem Interesse ist die Varianz des totalen Schadenexzess-Betrages, denn die Sicherheitsbelastung auf den Prämien sollte aus der Varianz oder deren Quadratwurzel berechnet werden.

Für einen begrenzten Layer haben wir die Varianz

$$V(x, Kx) = 2 \int_x^{Kx} \Pi(y) dy - 2x(K-1) \Pi(Kx)$$

und für einen unendlichen Layer

$$V(x) = 2 \int_x \prod(y) dy,$$

vorausgesetzt, dass die Anzahl Exzessschäden Poisson-verteilt sind.

Von besonderem Interesse ist die relative Varianz $\frac{\sigma}{\prod} = \frac{\sqrt{V}}{\prod}$.

Es gilt:

$$\frac{V(x)}{\prod^2(x)} = \frac{1}{H(x)} \cdot \frac{V(x)}{m(x) \cdot \prod(x)}.$$

Wir untersuchen den unendlichen Layer (x, ∞) .

Für den Ansatz I: $\prod(x) = c x^{-a} x^{-b \ln x}$

erhalten wir $V(x) = 2 \int_x \prod(y) dy = 2c \int_x y^{-a} y^{-b \ln y} dy$.

Die Umformung ergibt $V(x) = 2c e^{\frac{(a-1)^2}{4b}} \sqrt{\frac{\pi}{b}} (1 - \varnothing(z))$

mit $\varnothing(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

und $z = \sqrt{2b} \left(\ln x + \frac{a-1}{2b} \right)$.

Für $a = 0,9$ und $b = \log e \approx 0,434$ tabellieren wir $\sqrt{\frac{V(x)}{m(x) \prod(x)}}$.

Schadengrenze pro Tausend	x	$\sqrt{\frac{V(x)}{m(x)\Pi(x)}}$
100	1	1,62
200	2	1,66
300	3	1,64
400	4	1,64
500	5	1,64
1000	10	1,60

Für die Pareto-Verteilung mit $\alpha = 3$ wird der entsprechende Faktor 2, und für andere Werte von α liegt er in der Nähe von 2.

Wir werden darauf im Anschluss an eine einfache und praktische Belastungsformel zurückkommen.

Im Ansatz II war $\Pi(x) = c \cdot e^{-\frac{a}{b}x^b}$.

Dann ist $V(x) = 2c \int_x^{\frac{a}{b}y^b} e^{-t} dt$.

Setzen wir $\frac{a}{b}y^b = t$, so erhalten wir

$$V(x) = 2c \cdot \frac{1}{b} \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{b}} \int_{\frac{a}{b}x^b}^{\frac{1}{b}y^b} t^{\frac{1}{b}-1} e^{-t} dt,$$

also eine Γ -Funktion.

b war oben 0,6; Wir untersuchen den näherliegenden einfacheren Fall mit $b = 0,5$,

d. h. $m(x) = \frac{\sqrt{x}}{a}$

und $\Pi(x) = c \cdot e^{-2a\sqrt{x}}$

und $V(x) = c \cdot \frac{1}{a^2} e^{-2a\sqrt{x}} (1 + 2a\sqrt{x})$.

Damit wird

$$\frac{V(x)}{\overline{II}^2(x)} = \frac{1}{H(x)} \cdot \frac{V(x)}{m(x) \cdot \overline{II}(x)} = \frac{\frac{1}{a^2} e^{-2a\sqrt{x}} (1 + 2a\sqrt{x})}{H(x) \cdot \frac{\sqrt{x}}{a} \cdot e^{-2a\sqrt{x}}} = \frac{1}{H(x)} \left(2 + \frac{1}{a\sqrt{x}} \right).$$

Vor einigen Jahren leitete ich eine einfache Belastungsformel ab, die unter folgenden Voraussetzungen gültig ist:

1. Anzahl Exzessschäden ist Poisson-verteilt,
2. die Schadensgrösse ist Pareto-verteilt mit $\alpha = 3$.

Für den Layer (x, Kx) erhalten wir

$$\frac{\sigma}{\overline{II}} = \frac{2}{\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{K} \right)},$$

wobei $n = H$ die erwartete Anzahl Schäden und K das Verhältnis zwischen oberer und unterer Grenze des Layers ist. Für einen unendlichen

Layer erhalten wir also $\frac{\sigma}{\overline{II}} = \frac{2}{\sqrt{n}}$.

Wenn alle Exzessschäden gleich gross wären, hätten wir $\frac{\sigma}{\overline{II}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Hier besteht nur eine Variation in der Anzahl, nicht in der Grösse.

Nachdem der Ansatz II eine bessere Beschreibung als nach Pareto gibt, kann es von Interesse sein, das $\frac{\sigma}{\overline{II}}$ der beiden Fälle zu vergleichen. Der Fall II, der schneller konvergiert als nach Pareto, pflegt ein niedrigeres $\frac{\sigma}{\overline{II}}$ zu haben.

Wir erhalten folgende Relationszahlen für $\left(\frac{\sigma}{\overline{II}} \right)_{\text{II}} / \left(\frac{\sigma}{\overline{II}} \right)_{\text{Pareto}}$

Schaden- grenze pro Tausend	Obere Grenze des Layers							
	350	400	450	500	750	1000	1250	∞
150	0,90	0,90	0,90	0,90	0,90	0,91	0,91	0,85
175	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,91	0,84
200	0,93	0,92	0,92	0,92	0,91	0,91	0,91	0,83
250	0,96	0,95	0,94	0,93	0,93	0,92	0,92	0,82
300	0,98	0,97	0,96	0,95	0,94	0,93	0,93	0,81

Aus der Tabelle ist ersichtlich, dass für beschränkte Layer gilt:

$$\left(\frac{\sigma}{\Pi}\right)_{\text{II}} \geq 0.9 \left(\frac{\sigma}{\Pi}\right)_{\text{Pareto}}$$

Noch einige abschliessende Bemerkungen:

Wir haben

$$\begin{array}{ccc} \text{normal} & \longleftrightarrow & \text{log-normal} \\ \text{exponential} & \longleftrightarrow & \text{log-exponential} = \text{Pareto.} \end{array}$$

Nicht von Interesse ist die Normalverteilung, von Interesse ist das Dreieck, welches von der exponentialen, der log-exponentialen und der log-normalen Verteilung gebildet wird.

Die beiden Ansätze I und II, wie oben beschrieben, liegen tatsächlich sehr nahe bei der log-normalen Verteilung, insbesondere der Fall I. Der Vorteil der Ansätze I und II ist, dass die Handhabung angenehmer ist, weil $m(x)$, $\mu(x)$, $H(x)$, $\Pi(x)$ eine einfachere Form erhalten.

Um zu illustrieren, dass die Ansätze nahe bei der log-normalen Verteilung liegen, gehen wir von I bzw. II aus und anti-logarithmieren sie.

$$P[X > \ln x] = \text{const} \cdot x^{-a-1} \cdot x^{-b \ln x} (a + 2b \ln x)$$

$$\ln x = z, \quad x = e^z$$

$$H_I(z) = P[X > z] = \text{const} \cdot e^{-(a+1)z - bz^2} (a + 2bz)$$

$$\ln H(z) = \text{const} - (a+1)z - bz^2 + \ln(a + 2bz),$$

woraus
$$f_I(z) = e^{-(a+1)z - bz^2} [(a + 2bz)^2 + (a + 2bz) - 2b]$$
 folgt.

Wenn die Parameter so gewählt werden, dass I und log-normal in einem niedrigeren Intervall relativ gleich sind, dann ist I > log-normal in einem höheren Intervall.

Auf gleiche Weise erhalten wir:

$$P[X > \ln x] = \text{const} \cdot x^{-(1-b)} e^{-\frac{a}{b} x^b}$$

$$\ln x = z, \quad x = e^z$$

$$P[X > z] = \text{const} \cdot e^{-(1-b)z} e^{-\frac{a}{b} e^{bz}}$$

$$\ln H_{\text{II}}(z) = -(1-b)z - \frac{a}{b} e^{bz}$$

$$f_{\text{II}}(z) = \text{const} \cdot e^{-(1-b)z - \frac{a}{b} e^{bz}} [(1-b) + a e^{bz}].$$

Diese Verteilung konvergiert für grosse z schneller als eine log-normale Verteilung, mit welcher sie in einem niedrigeren Intervall einigermassen übereinstimmt. Also ist Ansatz II im Limes weniger gefährlich als die log-normale Verteilung.

Aus früheren Formeln ist leicht zu ersehen, dass

$$x \mu_{\text{I}}(x) \Rightarrow a + 1 + 2b \ln x \quad \text{schwächere Sterblichkeit}$$

und $x \mu_{\text{II}}(x) \Rightarrow a x^b \quad \text{stärkere Sterblichkeit}$

Die log-normale Verteilung liegt zwischen diesen beiden mit Tendenz zu I.

Aus der Tabelle sehen wir, dass für die beiden Verteilungen exponential und log-exponential (= Pareto)

$$m(x) \cdot \mu(x) = \text{const} \begin{cases} 1 \text{ exponential} \\ \frac{\alpha}{\alpha-1} \text{ Pareto} \end{cases} \quad \text{gilt.}$$

Wenn $m(x) \mu(x) = c$,

dann $1 + m'(x) = c$, $m'(x) = c - 1$

und $m(x) = (c - 1)x + c_1$

$c = 1$ exponential

$c > 1$ Pareto-Klasse.

Für die in der Praxis interessanten Verteilungstypen gelten:

$$m(x) \mu(x) > 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} m(x) \mu(x) = 1.$$

Literaturverzeichnis

- Rolf Eckert*: Beiträge zur Schätzung des jährlichen durchschnittlichen Schadenbetrages in der Motorfahrzeughaftpflichtversicherung. Inaugural-Dissertation 1957.
- P. Riebesell*: Einführung in die Sachversicherungsmathematik. Berlin 1936.
- G. Benktander, C.O. Segerdahl*: On the analytical representation of claim distributions with special reference to excess of loss reinsurance. XVth International Congress of Actuaries, Brussels 1960.
- G. Benktander*: A note on the most «dangerous» and skewest class of distributions. The ASTIN Bulletin, Vol. II, Part III, April 1963.
- The effect of inflation on excess layers. «The Review», Reinsurance Number, 1968.

Zusammenfassung

Der Verfasser behandelt einige analytische Verteilungsfunktionen, die zur Beschreibung der Schadenverteilung gebraucht werden, z.B. die Exponential-, Pareto- und Log-Normal-Verteilung. Er schlägt zwei weitere Funktionen vor, mit denen er gearbeitet hat. Um die Verteilungstypen zu klassifizieren, benützt er verschiedene Mittel, wie den durchschnittlichen Exzessschaden und die «Sterblichkeitsintensität» der Schäden.

Die Varianz der totalen Exzess-Schadenlast wird berechnet und eine einfache Approximation angegeben.

Résumé

L'auteur part de quelques fonctions de distribution utilisées pour décrire la distribution des sinistres, par exemple la distribution exponentielle, celle de Pareto et la distribution logarithmique normale. Il propose deux autres fonctions avec lesquelles il a opéré. Pour classer les types de distribution, il utilise différents moyens tels que le sinistre moyen en excédent, l'intensité de «mortalité» des sinistres, etc.

Il calcule la variance de la charge totale des sinistres en excédent et donne une simple formule d'approximation.

Riassunto

L'autore spiega le distribuzioni analitiche che sono state usate per descrivere la distribuzione dei sinistri, come per esempio quella esponenziale, quella di Pareto, la log-normale, ecc., e contribuisce con due proprie proposte. Egli si occupa poi di certi mezzi analitici da usare nella classificazione delle distribuzioni, come il valore medio degli eccessi di sinistri, l'intensità di «mortalità» di un sinistro, ecc.

L'autore calcola la varianza dell'importo totale degli eccessi di sinistri, e ne formula una semplice approssimazione.

Summary

The author mentions the analytical distributions which have been used to describe the claims distribution, e. g. exponential, Pareto, log-normal, etc. and contributes two suggestions of his own. He further discusses some analytical tools to be used when classifying distributions, such as the average excess claim, the force of «mortality» of a claim, etc.

The variance of the total excess claims amount is calculated and a short-cut approximation formula is given.