

Varia zur hyperbolischen Interpolation von Reservekurven

Autor(en): **Jecklin, H.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer
Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaire
Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **56 (1956)**

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-966831>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Varia zur hyperbolischen Interpolation von Reservekurven

Von *H. Jecklin*, Zürich

In letzter Zeit wurde in verschiedenen Arbeiten darauf hingewiesen, dass die Reservekurven von Lebensversicherungen, insbesondere jene der gemischten Versicherung, gut hyperbolisch approximiert werden können. So basiert denn auch die F -Methode der Reserveberechnung auf der genäherten Wiedergabe der Reservekurve durch den Ast einer gleichseitigen Hyperbel mit zu den Koordinatenachsen parallelen Asymptoten [1]¹⁾. Wir haben dann für die Einzelreserve der gemischten Versicherung die Näherungsformel

$${}_tV_{\overline{xn}} \sim \frac{t}{Fn - (F-1)t}, \quad \text{mit } F = \frac{(1 - {}_\alpha V_{\overline{xn}})\alpha}{{}_\alpha V_{\overline{xn}}(n - \alpha)}, \quad 0 < \alpha < n, \quad (1)$$

wobei mit Vorteil $\alpha = \frac{n}{2}$ gewählt wird.

D. Bierlein hat gezeigt [2], dass es kein Sterbe-gesetz gibt, welches als Reservekurven einer ins Gewicht fallenden Klasse von Versicherungen generell exakte Hyperbeln resultieren lässt von der Gestalt

$${}_tV_{\overline{xn}} = \frac{a + bt}{c + dt}, \quad \text{mit } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2)$$

Es liegt jedoch kein zwingender mathematischer Grund vor, die Darstellung von Reservekurven auf Hyperbeln von der Gestalt (2) zu beschränken. In der Tat basiert beispielsweise die φ -Methode zur globalen Reserveberechnung [3] auf einer Reserveapproximation durch Hyperbeln der Gestalt

$${}_tV = t \frac{C}{n} + \frac{t}{A + Bt}. \quad (3)$$

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern [] beziehen sich auf die Literaturhinweise am Schluss der Arbeit.

Wir haben hier also Superposition einer durch den Nullpunkt gehenden Geraden und einer gleichseitigen Hyperbel der Gestalt (2). Wie nun Verfasser unlängst dargelegt hat [4], sind bei Zugrundelegung des Sterbegesetzes

$$l_{x+t} = l_x(1-\lambda t)k^t \quad (4)$$

die Reservekurven gemischter Versicherungen exakte Hyperbeln von der Gestalt (3), sofern der technische Zinssatz $i = k-1$ ist. In praktischer Hinsicht ist diese Feststellung kaum von direktem Wert, denn wie wir andernorts zeigten [5], ergibt sich bei der Wiedergabe moderner schweizerischer Sterblichkeitserfahrungen durch (4) die Grösse k zu ungefähr 1,016, was einem technischen Zinssatz von ca. $1\frac{1}{2}\%$ entsprechen würde. Wir kommen jedoch auf diese Angelegenheit im Verlaufe vorliegender Arbeit nochmals zurück.

Es ist zu erwarten, dass die einzelne Reservekurve durch eine Hyperbel der Gestalt (3) besser approximiert werden kann als durch eine solche der Gestalt (2). Wir machen den Ansatz

$${}_tV_{\overline{xn}} = t \frac{C}{n} + A \frac{t}{1-\psi t}. \quad (5)$$

Da für $t = n$ gelten muss

$$C + A \frac{n}{1-\psi n} = 1,$$

folgt für den Parameter A offenbar

$$A = (1-C) \left(\frac{1}{n} - \psi \right), \quad (6)$$

und an Stelle von (5) hat man

$${}_tV_{\overline{xn}} = t \frac{C}{n} + (1-C) \left(\frac{1}{n} - \psi \right) \frac{t}{1-\psi t}. \quad (7)$$

Nehmen wir nun für t eine bestimmte Position α , wobei natürlich $0 < \alpha < n$, so ist

$${}_{\alpha}V_{\overline{xn}} - \frac{\alpha}{n} = (1-C) \left[\left(\frac{1}{n} - \psi \right) \frac{\alpha}{1-\psi \alpha} - \frac{\alpha}{n} \right], \quad (8)$$

und entsprechend für eine Position $t = \beta \neq \alpha$, $0 < \beta < n$,

$${}_{\beta}V_{\overline{xn}} - \frac{\beta}{n} = (1-C) \left[\left(\frac{1}{n} - \psi \right) \frac{\beta}{1-\psi \beta} - \frac{\beta}{n} \right].$$

Setzen wir

$$\frac{{}_\alpha V_{xn} - \frac{\alpha}{n}}{{}_\beta V_{xn} - \frac{\beta}{n}} = Q, \quad (9)$$

so folgt ohne weiteres

$$Q = \frac{\left(\frac{1-\psi n}{1-\psi \alpha} - 1\right)}{\left(\frac{1-\psi n}{1-\psi \beta} - 1\right)}.$$

Hieraus ergibt sich nach leichter Rechnung für die Bestimmung von ψ aus zwei Reservepositionen:

$$\psi = \frac{\frac{n-\alpha}{\beta} - Q \frac{n-\beta}{\alpha}}{(n-\alpha) - Q (n-\beta)}. \quad (10)$$

Wählt man insbesondere $\beta = n - \alpha$, so vereinfacht sich (10) zu

$$\psi = \frac{1-Q}{\beta - \alpha Q}. \quad (11)$$

Nachdem ψ bekannt ist, kann C aus (8) bestimmt werden.

In Tabelle I am Schlusse der Arbeit sind für zwei Kombinationen gemischter Versicherung die genauen Reservesätze und die Näherungswerte nach (1) und nach (7) auf Basis S. M. 1939/44 zu 2½% in Vergleich gestellt. Die bessere Approximation nach Formel (7) ist nicht verwunderlich, werden doch in dieser Näherungsformel zwei charakteristische Parameter verwendet (C und ψ), gegenüber nur einem einzigen (nämlich F) in Formel (1).

In Formel (7) sind die beiden Terme $\frac{C}{n}$ und $(1-C)\left(\frac{1}{n} - \psi\right)$ während der ganzen Versicherungsdauer konstant. Es muss also möglich sein, auf Basis dieser Formel eine globale Reserveberechnung für Gruppen gleicher verflossener Dauer t vorzunehmen. Sei die Policensumme der einzelnen gemischten Versicherung S , und setzen wir vereinfachend $\frac{C}{n} = L$, $(1-C)\left(\frac{1}{n} - \psi\right) = K$, so gilt, wenn mit dem Index e die einzelne Versicherung gekennzeichnet sein soll:

$$\begin{aligned}
 \sum_e S_e {}_tV_e &\sim t \sum_e S_e L_e + t \sum_e \frac{S_e K_e}{1 - t\psi_e} = \\
 &= t \left[\sum_e S_e L_e + \sum_e S_e K_e + t \sum_e S_e K_e \psi_e + t^2 \sum_e S_e K_e \psi_e^2 + \dots \right] \sim \\
 &\sim t \left[\sum_e S_e L_e + \sum_e S_e K_e + t \bar{\psi} \sum_e S_e K_e + (t \bar{\psi})^2 \sum_e S_e K_e + \dots \right] = \\
 &= t \left[\sum_e S_e L_e + \frac{1}{1 - t \bar{\psi}} \sum_e S_e K_e \right], \quad \text{mit } \bar{\psi} = \frac{\sum_e S_e K_e \psi_e}{\sum_e S_e K_e}. \quad (12)
 \end{aligned}$$

Man hat also zwecks globaler Reserveberechnung für die einzelne Versicherung drei Hilfszahlen zu notieren, nämlich SL , SK und $SK\psi$. Diese Methode ist wie die F -Methode insofern unabhängig von Sterbetafel und Zinsfuß, als in der gleichen t -Gruppe Versicherungen nach ganz verschiedenen Rechnungsgrundlagen enthalten sein können. Die approximatorische Leistungsfähigkeit bei der globalen Reservebestimmung ist jedoch nicht besser als jene der F -Methode, trotzdem hier eine Hilfszahl mehr benötigt wird, und wir verzichten daher auf die Anführung numerischer Beispiele.

Eine Formel von der Gestalt (3) hat jedoch den Vorteil, dass sie nicht nur zur Approximation monoton steigender Reservekurven geeignet ist, sondern auch für Reservekurven von der Art der temporären Todesfallversicherung. Betrachten wir nun die einen ähnlichen Verlauf zeigende Kurve, die sich ergibt, wenn bei einer gemischten Versicherung die Differenz der Reserven nach einer bestimmten Sterbetafel bei verschiedenem Zinsfuß gebildet wird. Es seien die beiden Zinsfüsse i und i' , wobei $i < i'$, und es soll die Kurve

$${}_tA_{\overline{xn}} = {}_tV_{\overline{xn}(i)} - {}_tV_{\overline{xn}(i')} \quad (13)$$

approximiert werden. Hierzu machen wir den Ansatz

$${}_tA_{\overline{xn}} = t \frac{C}{n} - A \frac{t}{1 - \psi t}, \quad (14)$$

und da für $t = n$ gelten muss

$$C - A \frac{n}{1 - \psi n} = 0,$$

folgt für den Parameter A :

$$A = C \left(\frac{1}{n} - \psi \right).$$

Infolgedessen tritt an Stelle von (14)

$${}_tA_{x\bar{n}} = C \left[\frac{t}{n} - \frac{t}{1-\psi t} \left(\frac{1}{n} - \psi \right) \right]. \quad (15)$$

Nehmen wir nun wieder zur Bestimmung von ψ zwei bestimmte Positionen von t . Es seien dies α und β , wobei $0 < \alpha < \beta < n$. Dann ist

$${}_{\alpha}A_{x\bar{n}} = C \left[\frac{\alpha}{n} - \frac{\alpha}{1-\psi\alpha} \left(\frac{1}{n} - \psi \right) \right], \quad (16)$$

$${}_{\beta}A_{x\bar{n}} = C \left[\frac{\beta}{n} - \frac{\beta}{1-\psi\beta} \left(\frac{1}{n} - \psi \right) \right],$$

und setzen wir

$$\frac{{}_{\alpha}A_{x\bar{n}}}{{}_{\beta}A_{x\bar{n}}} = Q, \quad (17)$$

so folgt auch hier wieder die Formel (10):

$$\psi = \frac{\frac{n-\alpha}{\beta} - Q \frac{n-\beta}{\alpha}}{(n-\alpha) - Q(n-\beta)},$$

nur dass Q hier eine andere Bedeutung hat. Der Parameter C wird sodann mittels (16) bestimmt. In Tabelle II am Schluss sind in einem numerischen Beispiel genaue und nach (15) approximierte Differenzen ${}_tA_{x\bar{n}}$ einander gegenübergestellt.

Die Rechnung kann auch hier als globale Näherung für Gruppen gleicher verflossener Dauer t durchgeführt werden. Sei wieder die Policensumme der einzelnen Versicherung S ; weiter setzen wir

$\frac{C}{n} = L$ und $C \left(\frac{1}{n} - \psi \right) = K$, und kennzeichnen mit dem Index e

die einzelne Versicherung. Dann ist nach den gleichen Überlegungen wie bei der Herleitung von (12):

$$\sum_e S_e {}_tA_e \sim t \left[\sum_e S_e L_e - \frac{1}{1-t\bar{\psi}} \sum_e S_e K_e \right], \quad (18)$$

$$\text{mit } \bar{\psi} = \frac{\sum_e S_e K_e \psi_e}{\sum_e S_e K_e}.$$

Bekanntlich sind bei der gemischten Versicherung die durch Zinsfussänderung resultierenden Reservedifferenzen den Zinsfussdifferenzen ungefähr proportional, d.h. es gilt genähert

$${}_tV_{\overline{xn}|(i)} - {}_tV_{\overline{xn}|(i')} \sim 100 (i - i') ({}_tV_{\overline{xn}|(i)} - {}_tV_{\overline{xn}|(i+0,01)}) . \quad (19)$$

Wenn daher bei einem Versicherungsbestand die Reserven nach Gruppen gleicher verflossener Dauer t bestimmt werden (was z.B. nach der t -, F - oder φ -Methode geschehen kann), und für jede Versicherung separat die Hilfszahlen SL , SK und $SK\psi$ für die Zinsfussdifferenz von 1 % (z.B. für Übergang von $2\frac{1}{2}$ % auf $3\frac{1}{2}$ %) vermerkt sind, so ist es ohne grosse zusätzliche Arbeit möglich, die Reserven approximiert zu einem beliebigen technischen Zinssatz anzugeben. In Tabelle IIIa hiernach sind für einen kleinen Bestand von 13 gemischten Versicherungen die 5., 10. und 15. Totalreserven genau gerechnet, und zwar nach S. M. 1939/44 zu $2\frac{1}{2}$ % und zu $3\frac{1}{2}$ %. Tabelle IIIb sodann gibt die nötigen Angaben für Zinsänderung in Höhe von 1 % gemäss der vorstehend beschriebenen Methode. Damit lässt sich beispielsweise ein Übergang in den Reserven von $2\frac{1}{2}$ % auf 3 % wie folgt approximieren:

	$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$
Genaues Reservetotal zu $2\frac{1}{2}$ %:	47 677,4	100 972,8	161 274,4
$0,5 \sum S_t A$ (1 %) nach Formel (18):	2 042,1	3 161,1	2 997,0
Approx. Reservetotal zu 3 %:	45 635,3	97 811,7	158 277,4
Zum Vergleich:			
Genaues Reservetotal zu 3 %:	45 625,2	97 725,7	158 049,9

Nach diesen mehr auf die Praxis ausgerichteten Darlegungen kommen wir zurück zum Sterbegezet gemäss Formel (4). Nach den bereits gemachten Angaben müsste eine Ausscheidetafel von der Form

$$D_{x+t} = D_x(1 - \lambda t) \quad (20)$$

bei geeigneter Wahl des Parameters λ Reservewerte liefern, welche ungefähr jenen nach der Tafel S. M. 1939/44 zu $1\frac{1}{2}$ % entsprechen.

Basierend auf (20) haben wir offenbar

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{x}|} &= n \left(1 - \lambda \frac{n-1}{2} \right), \\ \ddot{a}_{x+t, \overline{n-t}|} &= \frac{1}{1-\lambda t} (n-t) \left(1 - \lambda \frac{n+t-1}{2} \right), \\ {}_tV_{\overline{x}|} &= 1 - \frac{(n-t)(2-\lambda(n+t-1))}{n(1-\lambda t)(2-\lambda(n-1))} = \\ &= \frac{t}{n(2-\lambda(n-1))} + \frac{t}{1-\lambda t} \cdot \frac{(1-\lambda n)^2 + \lambda(1-\lambda)}{n(2-\lambda(n-1))}.\end{aligned}\tag{21}$$

Diese Reservekurve ist eine Hyperbel von der Gestalt (3). Für eine globale Reserveberechnung nach Gruppen gleicher verflossener Dauer t haben wir hier, analog zu (12), die Möglichkeit

$$\sum_e S_e {}_tV_e \sim t \left[\sum_e S_e L_e + \frac{1}{1-t\bar{\lambda}} \sum_e S_e K_e \right], \tag{22}$$

mit

$$L = \frac{1}{n(2-\lambda(n-1))}, \quad K = L((1-\lambda n)^2 + \lambda(1-\lambda)), \quad \bar{\lambda} = \frac{\sum_e S_e K_e \lambda_e}{\sum_e S_e K_e}.$$

Unter Bezugnahme auf eine bereits zitierte Arbeit [5] wählen wir versuchsweise $\lambda = \frac{1}{90-x}$. In Tabelle IVa sind für den gleichen

kleinen Versicherungsbestand wie in Tabelle III die nötigen Angaben für eine globale Reserveberechnung nach (22) zusammengestellt. In der linken Hälfte der Tabelle IVb sodann sind für den nämlichen Bestand die 5., 10. und 15. Reserven nach S. M. 1939/44 zu $1\frac{1}{2}\%$ genau berechnet. Dies liefert uns den folgenden interessanten numerischen Vergleich

	$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$
Genaues Reservetotal zu $1\frac{1}{2}\%$:	52 100,6	107 725,0	167 793,9
Approximiert mit Formel (22):	52 197,6	107 841,3	168 338,1

Diese Resultate dürfen wohl überraschen, wenn man bedenkt, dass es sich um eine Reserveberechnung ohne Kommutationszahlen, lediglich mit Hilfe einer einfachen algebraischen Formel handelt. Man wird sofort die Frage stellen, ob es nicht möglich ist, die Approxima-

tion dahingehend zu erweitern, dass die Reserven auch zu einem andern Zinsfuss als gerade $1\frac{1}{2}\%$ erhalten werden können. Es hätte keinen grossen Zweck, hiefür auf Formel (18) zurückzugreifen, da dieselbe ja die Kenntnis einzelner genauer Reservepositionen voraussetzt. Nun gilt aber bekanntlich für den genäherten Übergang von einem technischen Zinssatz i zu i' bei gemischter Versicherung:

$$\begin{aligned} {}_tV_{\overline{xn}(i')} &\sim {}_tV_{\overline{xn}(i)} - {}_tV_{\overline{n}(i)} + {}_tV_{\overline{n}(i')} \sim \\ &\sim {}_tV_{\overline{xn}(i)} - 100(i - i')({}_tV_{\overline{n}(i)} - {}_tV_{\overline{n}(i+0,01)}), \end{aligned} \quad (23)$$

woraus die gröbere Approximation herzuleiten ist

$$\begin{aligned} {}_tV_{\overline{xn}(i)} - {}_tV_{\overline{xn}(i')} &\sim 100(i - i')({}_tV_{\overline{n}(0)} - {}_tV_{\overline{n}(1\%)}) = \\ &= 100(i - i')\left(\frac{t}{n} - (r^t - 1)\frac{1}{r^n - 1}\right), \quad \text{mit } r = 1,01. \end{aligned}$$

Damit hätte man für die globale Erfassung der Zinsfussänderung für Reservegruppen gleicher abgelaufener Dauer t :

$$\sum S {}_t\Delta(1\%) \sim t \sum \frac{S}{n} - (r^t - 1) \sum \frac{S}{r^n - 1}, \quad r = 1,01. \quad (24)$$

Es wären also für jede einzelne gemischte Versicherung nur zwei zusätzliche Hilfszahlen vorzumerken, nämlich $\frac{S}{n}$ und $\frac{S}{r^n - 1}$. In der rechten Hälfte der Tabelle IVb sind diese Werte für den betrachteten kleinen Versicherungsbestand angegeben. Wir erhalten folgende rechnerischen Resultate:

$\sum S {}_tV_{(1\frac{1}{2}\%)} \text{ nach Formel (22):}$	52 198,—	107 841,—	168 338,—
$\sum S {}_t\Delta_{(1\%)} \text{ nach Formel (24):}$	5 107,—	7 418,—	6 790,—
$\sum S {}_tV_{(2\frac{1}{2}\%)} \text{ approximiert:}$	47 091,—	100 423,—	161 548,—
Zum Vergleich:			
Genaues Reservetotal zu $2\frac{1}{2}\%$:	47 677,—	100 973,—	161 273,—

Naturgemäss müssen die Näherungen schlechter werden, wenn die Reserven zu einem höheren technischen Zinssatz verlangt werden. Die vorstehenden Ausführungen hatten jedoch weniger den Zweck, für die Praxis direkt verwendbare Formeln aufzuzeigen, als vielmehr Anregungen zu vermitteln für eine weitere Bearbeitung der hier angeschnittenen, theoretisch interessanten und praktisch möglicherweise auswertbaren Approximationsmethoden.

Tabelle I

$$\left. \begin{array}{l} \text{A: } {}_tV_{\overline{xn}} = 1 - \frac{\ddot{a}_{x+t, \overline{n-t}|}}{\ddot{a}_{\overline{xn}|}} \\ \text{B: } {}_tV_{\overline{xn}} = t \frac{C}{n} + \frac{t}{1-\psi t} (1-C) \left(\frac{1}{n} - \psi \right) \\ \text{C: } {}_tV_{\overline{xn}} = \frac{t}{Fn - (F-1)t} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{S. M. 1939/44} \\ \text{zu } 2\frac{1}{2}\% \end{array}$$

t	$x = 40, \quad n = 20$			t	$x = 30, \quad n = 30$		
	A ‰	B ‰	C ‰		A ‰	B ‰	C ‰
2	79,24	79,40	78,06	3	70,49	71,71	71,34
4	161,83	161,91	160,02	6	146,59	147,78	147,37
6	247,88	247,92	246,18	9	228,33	228,71	228,58
8	337,93	337,87	336,87	12	315,77	314,93	315,50
10	432,46	432,32	432,46	15	408,77	407,74	408,77
12	531,98	531,91	533,50	18	508,01	507,39	509,10
14	637,25	637,42	640,03	21	614,73	615,10	617,33
16	749,32	749,79	752,96	24	730,53	732,06	734,43
18	869,45	870,07	872,74	27	857,48	859,75	861,54
		$\alpha = 7$	$\alpha = 10$			$\alpha = 10$	$\alpha = 15$
		$\beta = 13$				$\beta = 20$	
		$\psi = 18,612 \text{ ‰}$	$F = 1,31235$			$\psi = 11,919 \text{ ‰}$	$F = 1,44636$
		$C = 0,40814$				$C = 0,15257$	

Tabelle II

A: ${}_tV_{40, \overline{20}}$, genau, nach S. M. 39/44 à $2\frac{1}{2}\%$

B: ${}_tV_{40, \overline{20}}$, » » » » à $3\frac{1}{2}\%$

C: ${}_t\Delta_{40, \overline{20}}$ = Differenzen der Kolonnen A und B

$$D: {}_t\Delta_{40, \overline{20}} = Ct \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{1 - \psi t} \left(\frac{1}{n} - \psi \right) \right)$$

t	A ‰	B ‰	C ‰	D ‰
2	79,24	72,31	6,93	6,97
4	161,83	148,97	12,86	12,89
6	247,88	230,24	17,64	17,63
8	337,93	316,93	21,00	21,01
10	432,46	409,55	22,91	22,92
12	531,98	509,96	22,02	23,06
14	637,25	616,10	21,15	21,20
16	749,32	732,26	17,06	17,01
18	869,45	859,34	10,11	10,11
				$\alpha = 7$
				$\beta = 13$
				$\psi = 18,688 \text{ ‰}$
				$C = 0,19944$

Tabelle IIIa

Gemischte Versicherungen, Sterbetafel S.M. 39/44

x	n	S	$S {}_tV_{\overline{xn} }$ zu $2\frac{1}{2}\%$			$S {}_tV_{\overline{xn} }$ zu 3%		
			$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$	$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$
25	30	10 000	1 170,7	2 516,1	4 042,9	1 092,1	2 378,2	3 871,9
30	20	15 000	3 039,0	6 502,8	10 446,5	2 919,2	6 325,4	10 299,5
	25	30 000	4 576,8	9 759,0	15 605,1	4 331,4	9 362,1	15 168,6
	30	20 000	2 412,2	5 137,6	8 177,4	2 257,8	4 866,6	7 841,2
35	15	10 000	2 895,8	6 193,0	10 000,0	2 819,5	6 109,1	10 000,0
	20	20 000	4 082,2	8 678,2	13 902,4	3 919,6	8 444,0	13 707,8
	25	25 000	3 874,0	8 192,0	13 010,0	3 675,7	7 892,2	12 652,5
	30	30 000	3 741,9	7 866,0	12 382,2	3 512,1	7 469,7	11 894,1
40	20	20 000	4 087,8	8 649,2	13 847,0	3 951,2	8 419,2	13 653,2
	25	30 000	4 712,1	9 871,8	15 599,4	4 512,3	9 493,2	15 179,1
45	15	10 000	2 866,6	6 133,2	10 000,0	2 793,1	6 050,3	10 000,0
	20	30 000	6 120,9	12 915,9	20 638,5	5 891,4	12 575,7	20 348,4
50	20	20 000	4 097,4	8 558,0	13 623,0	3 949,8	8 340,0	13 433,6
			47 677,4	100 972,8	161 274,4	45 625,2	97 725,7	158 049,9

Tabelle IIIb

$\left. \begin{array}{l} \psi \text{ gemäss Formeln (17) und (10)} \\ C \text{ gemäss Formel (16)} \end{array} \right\} \text{ nach S.M. 39/44 } 2\frac{1}{2}\% \text{ und } 3\frac{1}{2}\%$

$$L = \frac{C}{n}, \quad K = C \left(\frac{1}{n} - \psi \right)$$

x	n	α	β	S	ψ in ‰	C	SL	SK	$SK\psi$
25	30	10	20	10 000	15,779	0,21705	72,35	38,10	0,60118
30	20	7	13	15 000	17,931	0,21469	161,03	103,28	2,88743
	25	8	17	30 000	16,639	0,21692	260,31	152,01	2,52929
	30	10	20	20 000	15,719	0,21433	142,88	75,50	1,18678
35	15	5	10	10 000	19,330	0,20946	139,64	99,15	1,91657
	20	7	13	20 000	18,027	0,21114	211,14	135,02	2,43401
	25	8	17	25 000	16,983	0,20849	208,50	119,98	2,03762
	30	10	20	30 000	15,585	0,21100	210,99	112,35	1,75097
40	20	7	13	20 000	18,690	0,19944	199,44	124,88	2,33401
	25	8	17	30 000	17,340	0,19887	238,65	135,18	2,34402
45	15	5	10	10 000	20,368	0,19447	129,65	90,04	1,83393
	20	7	13	30 000	19,303	0,18789	281,85	173,04	3,34019
50	20	7	13	20 000	20,692	0,16685	166,86	97,80	2,02368
				270 000			2423,29	1456,33	27,21968
									$\bar{\psi} = 18,6906 \text{ ‰}$

$$\sum S_t A \sim t \left[\sum SL - \frac{1}{1 - \bar{\psi}t} \sum SK \right]$$

$$\begin{array}{ccc}
 t = 5 & t = 10 & t = 15 \\
 \sum S_t A \sim 4084,1 & 6322,1 & 5994,0
 \end{array}$$

Tabelle IV a

$$\lambda = \frac{1}{90 - x}$$

$$L = \frac{1}{n(2 - \lambda)(n - 1)}, \quad K = L((1 - \lambda n)^2 + \lambda(1 - \lambda))$$

x	n	S	λ in ‰	SL	SK	$SK\lambda$
25	30	10 000	15,385	214,52	65,45	1,00695
30	20	15 000	16,667	445,55	205,32	3,42200
	25	30 000	16,667	750,00	267,51	4,45851
	30	20 000	16,667	439,56	117,10	1,95167
35	15	10 000	18,182	381,94	208,84	3,79709
	20	20 000	18,182	604,40	255,54	4,64618
	25	25 000	18,182	639,53	201,70	3,66727
	30	30 000	18,182	679,02	152,40	2,77091
40	20	20 000	20,000	617,28	234,32	4,68640
	25	30 000	20,000	789,48	212,85	4,25700
45	15	10 000	22,222	394,74	184,02	4,08933
	20	30 000	22,222	950,70	314,07	6,97933
50	20	20 000	25,000	655,74	179,92	4,49800
				7562,46	2599,04	50,23064 $\bar{\lambda} = 19,3264 \text{ ‰}$

$$\sum S_t V = t \left[\sum SL + \frac{1}{1 - \bar{\lambda}t} \sum SK \right]$$

Tabelle IV b

x	n	S	$S_t V_{xn}$ nach S.M. 39/44 zu $1\frac{1}{2}\%$			$S \frac{1}{n}$	$S \frac{1}{(1,01)^n - 1}$
			$t = 5$	$t = 10$	$t = 15$		
25	30	10 000	1 340,1	2 806,7	4 394,0	333	28 748,12
30	20	15 000	3 290,1	6 862,4	10 738,4	750	68 122,80
	25	30 000	5 082,9	10 578,3	16 487,1	1 200	106 220,04
	30	20 000	2 750,8	5 710,0	8 864,2	667	57 496,24
35	15	10 000	3 052,2	6 360,7	10 000,0	667	62 123,57
	20	20 000	4 413,4	9 153,6	14 290,2	1 000	90 830,40
	25	25 000	4 291,3	8 862,3	13 734,3	1 000	88 516,70
	30	30 000	4 234,2	8 702,4	13 388,1	1 000	86 244,36
40	20	20 000	4 414,6	9 119,6	14 233,2	1 000	90 830,40
	25	30 000	5 206,5	10 658,1	16 449,3	1 200	106 220,04
45	15	10 000	3 018,8	6 299,9	10 000,0	667	62 123,57
	20	30 000	6 600,3	13 606,2	21 212,7	1 500	136 245,60
50	20	20 000	4 405,4	9 004,8	14 002,4	1 000	90 830,40
			52 100,6	107 725,0	167 793,9	11 984	1 074 552,24

$$\sum S_t \Delta(1\%) \sim t \sum S \frac{1}{n} - (r^t - 1) \sum S \frac{1}{r^n - 1}, \quad r = 1,01$$

Literaturverzeichnis

- [1] *H. Jecklin* und *H. Zimmermann*: «Reserveberechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation.» Mitteilungen VSVM, Bd. 50, 2.
— «Ergänzende Bemerkungen zur Reserveberechnung auf Basis hyperbolischer Interpolation.» Mitteilungen VSVM, Bd. 51, 1.
— «Weitere Ergänzungen zur F -Methode der Reserveberechnung.» Mitteilungen VSVM, Bd. 51, 2.
W. Saxer: «Versicherungsmathematik I.» Springer-Verlag, Berlin 1955, S. 123 ff.
- [2] *D. Bierlein*: «Sterbetafeln lassen sich nicht so ausgleichen, dass die Reservekurven generell hyperbolisch sind.» Bl. d. deutsch. Ges. f. Vers.-Math., Bd. II, Heft 2, 1955.
- [3] *H. Jecklin* und *P. Strickler*: «Eine Variante zur F -Methode der Reserveberechnung.» Mitteilungen VSVM, Bd. 54, 1.
P. Strickler: «Reserveapproximation durch Hyperbeln nach der φ -Methode.» Mitteilungen VSVM, Bd. 55, 1.
- [4] *H. Jecklin*: «Über die Möglichkeit, Sterbetafeln so auszugleichen, dass die Reservekurven generell hyperbolisch sind.» Bl. d. deutsch. Ges. f. Vers.-Math., Bd. II, Heft 3, 1955.
- [5] *H. Jecklin* und *W. Leimbacher*: «Über ein Sterbegesetz, welches eine exakte Darstellung der Leibrenten durch Zeitrentenwerte gestattet.» Mitteilungen VSVM, Bd. 53, 2.