Bemerkungen zur Berechnung von kombinierten Übertritts- und Verbleibswahrscheinlichkeiten

Autor(en): **Zwinggi, Ernst**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries**

Band (Jahr): **48 (1948)**

PDF erstellt am: **30.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-966902

Bemerkungen zur Berechnung von kombinierten Übertritts- und Verbleibswahrscheinlichkeiten

Von *Ernst Zwinggi*, Basel

Die Fortschreibung einer Bevölkerung nach Zivilständen, die Berechnung der Aktivitätsordnung nach der Methode von *Schaertlin* usw. stützt sich u. a. auf die Wahrscheinlichkeit, innert Jahresfrist von einer (ersten) Gesamtheit (z. B. der Gesamtheit der Ledigen, der Aktiven usw.) in eine andere (zweite) Gesamtheit (z. B. in die Gesamtheit der Verheirateten, der Invaliden usw.) überzutreten und am Ende des Übertrittsjahres noch der letzten Gesamtheit anzugehören [1]. Für die Ermittlung dieser Wahrscheinlichkeit sind mehrere Formeln angegeben worden [2], ohne dass unseres Wissens bisher ein Vergleich der Güte der verschiedenen Ansätze vorgenommen worden wäre. Indem wir im folgenden eine «genaue» Formel ableiten und damit die bekannten Näherungen vergleichen, möchten wir diese Lücke schliessen.

Wir bezeichnen wie folgt:

l^{I}_{x+t} = Umfang der ersten Gesamtheit,

l^{II}_{x+t} = Umfang der zweiten Gesamtheit,

ν_{x+t} = Intensität des Übertritts von I zu II,

μ^{I}_{x+t} = Intensität des übrigen Ausscheidens aus I,

μ^{II}_{x+t} = Intensität des Ausscheidens aus II.

Die Rückkehr zur ersten Gesamtheit (z. B. von der zweiten) soll ausgeschlossen sein.

---

[1] Vgl. darüber auch *R. Schmidlin:* Beiträge zur mathematischen Theorie der Vorausberechnung der Bevölkerungsgliederung. Diss. Basel, 1947.

[2] Z. B. durch *A. Berger:* Prinzipien der Lebensversicherungstechnik, 2. Band (Berlin 1925), Formeln (54) und (55), S. 235; ferner durch *E. Zwinggi:* Versicherungsmathematik (Basel 1945), Formel (42), S. 27.

Ist $p_x^{\mathrm{I/II}}$ die gesuchte Wahrscheinlichkeit, so können wir mit Hilfe der eingeführten Symbole schreiben [1]).

$$p_x^{\mathrm{I/II}} = \int\limits_0^1 \frac{l_{x+t}^{\mathrm{I}}}{l_x^{\mathrm{I}}}\, \nu_{x+t}\, \frac{l_{x+1}^{\mathrm{II}}}{l_{x+t}^{\mathrm{II}}}\, dt\,. \tag{1}$$

Weil nach der Theorie der «unabhängigen Ordnungen» [2])

$$\frac{l_{x+t}^{\mathrm{I}}}{l_x^{\mathrm{I}}} = \left(1 - {}_tq_x^{\mathrm{I}}\right)\left(1 - {}_tq_x\right),$$

$$\frac{l_{x+t}^{\mathrm{II}}}{l_x^{\mathrm{II}}} = 1 - {}_tq_x^{\mathrm{II}},$$

mit

$$1 - {}_tq_x^{\mathrm{I}} = \exp\left(-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau}^{\mathrm{I}}\, d\tau\right),$$

$$1 - {}_tq_x = \exp\left(-\int\limits_0^t \nu_{x+\tau}\, d\tau\right),$$

$$1 - {}_tq_x^{\mathrm{II}} = \exp\left(-\int\limits_0^t \mu_{x+\tau}^{\mathrm{II}}\, d\tau\right)$$

und

$$\nu_{x+t} = \frac{1}{1 - {}_tq_x}\, \frac{d}{dt}\, {}_tq_x$$

folgt aus (1) die Darstellung

$$p_x^{\mathrm{I/II}} = \left(1 - q_x^{\mathrm{II}}\right) \int\limits_0^1 \frac{1 - {}_tq_x^{\mathrm{I}}}{1 - {}_tq_x^{\mathrm{II}}}\, d\,{}_tq_x\,. \tag{2}$$

Wir setzen dann voraus, alle unter dem Integralzeichen auftretenden Wahrscheinlichkeiten verlaufen im Intervall $t = 0$ bis $t = 1$ linear, also ${}_tq_x = tq_x$ usw.; damit wird

$$p_x^{\mathrm{I/II}} = \left(1 - q_x^{\mathrm{II}}\right) q_x \int\limits_0^1 \frac{1 - tq_x^{\mathrm{I}}}{1 - tq_x^{\mathrm{II}}}\, dt\,. \tag{3}$$

Die Annahme des linearen Verlaufs der Wahrscheinlichkeiten bedeutet eine Einschränkung der Ergebnisse. Es ist aber zu beachten,

---

[1]) Formel (41), S. 27, in «Versicherungsmathematik».
[2]) Formeln (25) ff., S. 22 ff., in «Versicherungsmathematik».

dass diese Annahme schon bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen[1]) allgemein verwendet wird und schon dort grundsätzlich jedesmal einer Prüfung bedarf. Es wäre auch theoretisch sinnwidrig, für die Wahrscheinlichkeiten z. B. exponentiellen Verlauf vorauszusetzen, zugleich aber für die Berechnung der Wahrscheinlichkeiten aus den Beobachtungszahlen die gleichmässige Verteilung der Ausscheidefälle über das Jahr anzunehmen. Dieses Zusammenhangs hat man sich bewusst zu bleiben, will man über die Zulässigkeit der Approximation urteilen.

Wir zerlegen sodann wie folgt

$$\frac{1-tq_x^{\mathrm{I}}}{1-tq_x^{\mathrm{II}}} = \frac{q_x^{\mathrm{I}}}{q_x^{\mathrm{II}}} + \frac{1-\dfrac{q_x^{\mathrm{I}}}{q_x^{\mathrm{II}}}}{1-tq_x^{\mathrm{II}}}$$

und erhalten nach durchgeführter Integration von (3)

$$p_x^{\mathrm{I/II}} = (1-q_x^{\mathrm{II}})\, q_x \left[\frac{q_x^{\mathrm{I}}}{q_x^{\mathrm{II}}} - \frac{q_x^{\mathrm{II}}-q_x^{\mathrm{I}}}{(q_x^{\mathrm{II}})^2} \ln\left(1-q_x^{\mathrm{II}}\right)\right]. \tag{4}$$

Man könnte nun die eingangs erwähnten Näherungen mit der «genauen» Lösung (4) vergleichen und damit die Frage der Rangordnung als abgeklärt ansehen. Für die praktische Rechnung und die allfällige Anwendung von (4) ist aber unter Umständen vorzuziehen, einen Ausdruck ohne Logarithmen zu haben[2]). Dazu entwickeln wir $\ln\left(1-q_x^{\mathrm{II}}\right)$ in die Reihe und finden

$$p_x^{\mathrm{I/II}} = (1-q_x^{\mathrm{II}})\, q_x \left[\frac{q_x^{\mathrm{I}}}{q_x^{\mathrm{II}}} + \frac{q_x^{\mathrm{II}}-q_x^{\mathrm{I}}}{q_x^{\mathrm{II}}} \left(1 + \frac{q_x^{\mathrm{II}}}{2} + \frac{(q_x^{\mathrm{II}})^2}{3} + \dots\right)\right].$$

Approximieren wir $1 + \frac{q_x^{\mathrm{II}}}{2} + \dots$ durch die geometrische Reihe mit dem Quotienten $\frac{q_x^{\mathrm{II}}}{2}$, so können wir dafür $\frac{2}{2-q_x^{\mathrm{II}}}$ setzen und schreiben

$$p_x^{\mathrm{I/II}} \sim (1-q_x^{\mathrm{II}})\, q_x \frac{2-q_x^{\mathrm{I}}}{2-q_x^{\mathrm{II}}}. \tag{5}$$

---

[1]) Formeln (48) und (50), S. 30, in «Versicherungsmathematik».

[2]) In den «Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research» (3. Auflage 1948) von *R. A. Fisher* und *F. Yates* können allerdings die Werte von $\ln\left(1-q_x^{\mathrm{II}}\right)$ unmittelbar abgelesen werden.

Die Näherung (5) ist aber noch zu roh, um durchwegs als Vergleichsbasis dienen zu dürfen. Durch Einführung der geometrischen Reihe haben wir in der eckigen Klammer den Fehler

$$\frac{q_x^{II} - q_x^{I}}{q_x^{II}} \, \frac{(q_x^{II})^2}{12} \left(1 + \frac{3}{2} q_x^{II} + \frac{33}{20} (q_x^{II})^2 + \ldots\right)$$

begangen. Die runde Klammer nähern wir wiederum durch eine geometrische Reihe an; der Quotient ist $\frac{3}{2} q_x^{II}$, die Summe der Reihe $\frac{2}{2 - 3q_x^{II}}$ und die anzubringende Korrektur

$$\frac{(q_x^{II} - q_x^{I}) \, q_x^{II}}{12 - 18 q_x^{II}},$$

so dass schliesslich

$$p_x^{I/II} \sim (1 - q_x^{II}) \, q_x \left[\frac{2 - q_x^{I}}{2 - q_x^{II}} + \frac{(q_x^{II} - q_x^{I}) \, q_x^{II}}{12 - 18 q_x^{II}}\right]. \tag{6}$$

Setzen wir den «genauen» Wert nach (4) gleich «1», so lässt sich der Anwendungsbereich von (5) und (6) aus den folgenden Zahlen erkennen:

q_x^{I}	q_x^{II}	Absolute Abweichung in $^0/_{00}$ vom «genauen» Wert (5)	(6)
0,005	0,010	0,0	0,0
10	5	0,0	0,0
	20	0,0	0,0
20	10	0,0	0,0
25	50	0,1	0,0
40	20	0,0	0,0
50	100	0,5	0,0
100	50	0,2	0,0
	200	2,2	0,1
200	100	1,0	0,0
	400	11,9	2,8

Für die praktisch vorkommenden Werte von q_x^{I} und q_x^{II} genügt Gleichung (6) als Grundlage vollkommen.

Vergleichen wir die zu Beginn erwähnten Näherungen, nämlich

(Berger) $$p_x^{I/II} \sim q_x \left(1 - \frac{q_x^I}{2}\right)\left(1 - \frac{q_x^{II}}{2}\right) \tag{7}$$

und

(Zwinggi) $$p_x^{I/II} \sim (1 - q_x^{II})\, q_x \left(1 - \frac{q_x^I}{2} + \frac{q_x^{II}}{2}\right), \tag{8}$$

indem wir den «genauen» Wert nach (6) gleich «1» setzen, so haben wir die folgenden Verhältnisse:

q_x^I	q_x^{II}	Absolute Abweichung in ‰ vom «genauen» Wert (7)	(8)
0,005	0,0025	0,0	0,0
	0,010	0,0	0,0
	15	0,0	0,0
10	3	0,0	0,0
	5	0,0	0,0
	20	0,1	0,1
	30	0,2	0,2
50	20	0,2	0,2
	40	0,5	0,1
	100	2,3	1,8
	150	5,1	5,4
100	30	0,4	0,7
	50	0,9	0,9
	200	10,2	7,5
	300	23,8	23,7
200	100	3,8	3,8
	400	51,1	36,5

Die Ziffernbeispiele zeigen, dass über weite Altersstrecken die Formeln (7) und (8) genügen; erst bei grössern Werten von q_x^I und q_x^{II} treten die Abweichungen vom «genauen» Wert stärker hervor [1]). Man kann auch nicht sagen, welche der beiden Formeln (7) und (8) besser ist; festzuhalten ist, dass die relative Güte nicht abhängt von q_x.

Sollten die Beziehungen (7) und (8) in Fällen mit verhältnismässig grossen q_x^{I} und q_x^{II} und einem von der Geraden stark abweichenden Verlauf zu fühlbaren Fehlern Anlass geben und eine genauere Formel rechtfertigen, so müsste man, wie schon einmal erwähnt worden ist, nicht allein die Berechnung von $p_x^{\mathrm{I/II}}$ aus den Wahrscheinlichkeiten anpassen, sondern auf die Ermittlung der q_x^{I} und q_x^{II} aus den Beobachtungszahlen zurückgehen [2]).

---

[1]) q_x^{I} und q_x^{II} haben in der Regel den Sinn von Sterbewahrscheinlichkeiten; erst für $x > 80$ überschreiten diese Werte die Schranke 0,2, also in Altern, in denen ohnehin die Beobachtungszahlen zu gering sind, um eine eindeutige Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten zu ermöglichen.

[2]) Ein Ansatz dazu findet sich in «Über die Berechnung der unabhängigen Sterbe- und Stornowahrscheinlichkeiten im ersten Versicherungsjahr (Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, 45. Band, 1945, S. 57 bis 66). — Von dritter Seite ist beabsichtigt, der Frage in allgemeiner Form nachzugehen.