Zeitschrift: Mitteilungen / Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker = Bulletin / Association des Actuaires Suisses = Bulletin / Association of Swiss Actuaries

Herausgeber: Vereinigung Schweizerischer Versicherungsmathematiker

Band: 48 (1948)

Artikel: Das Deckungskapital in seiner Abhängigkeit vom Zinsfuss und von der Sterblichkeit

Autor: Riebesell, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-966893

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 16.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Das Deckungskapital in seiner Abhängigkeit vom Zinsfuss und von der Sterblichkeit

Von *Paul Riebesell*, Hamburg

1. Das Problem

Die vorliegende Arbeit war bereits Anfang 1945 druckfertig. Sie konnte in Deutschland nicht mehr erscheinen, da nach der Katastrophe eine versicherungsmathematische Zeitschrift in Deutschland nicht mehr vorhanden ist. Das Problem hat aber sowohl in Deutschland hinsichtlich der in Aussicht genommenen Währungsreform als auch in den anderen Ländern wegen der schwankenden Zins- und Sterblichkeitsverhältnisse Bedeutung. Die folgenden Ausführungen werden daher vielleicht Interesse finden, da sie Erläuterungen zu den Sätzen bilden, die, soweit das heute überhaupt möglich ist, das Problem zusammenfassend und abschliessend behandeln, und mehrere Irrtümer, die sich in der Literatur finden, richtiggestellt werden. Es werden natürlich nicht nur die Deckungskapitalien, sondern auch die Prämien behandelt. Im wesentlichen kommt es auf die Berechnung des Barwertes einer Leibrente an, da sich alle Formeln durch diese Leibrente ausdrücken lassen.

2. Die Änderung der Prämie durch Zins

Betrachten wir zunächst einmal den Einfluss des *Zinsfusses* auf die *Prämie*, so lässt sich natürlich leicht zeigen, dass die Prämie mit wachsendem Zinssatz abnimmt. Haben wir beispielsweise den Zinssatz 0 und sehen wir von der Sterblichkeit ganz ab, haben wir es also mit der sogenannten «Urprämie» im Sinne von *Parthier* [1]) zu tun, so errechnet sich diese bei n-jähriger Dauer aus der Gleichung

$$P = \frac{1000}{n}. \tag{1}$$

[1]) Vgl. *H. Parthier*, Die Rechnungsfaktoren der Lebensversicherungsprämie in ihrer Wirkung auf die Prämienbestandteile. «Blätter für Versicherungsmathematik», Band 5, Heft 4, 1941.

Werden dagegen Zinsen vergütet, so errechnet sich die Prämie P aus der Gleichung

$$1000 = P \cdot s_n, \tag{2}$$

wo s_n den Endwert einer vorschüssigen Zeitrente von n Jahren darstellt.

Da die Endwerte der Zeitrente bei wachsendem Zins steigen, sinkt die Prämie mit wachsendem Zinsfuss. Allgemein lässt sich dieser Satz folgendermassen beweisen [1]:

Die Prämie für eine lebenslängliche Todesfall-Versicherung lässt sich in der Form schreiben

$$P_x = \frac{1}{\mathsf{a}_x} - d, \tag{3}$$

wo

$$d = \frac{i}{1+i} = 1 - \frac{1}{1+i} = 1 - v$$

ist. Es ist ferner

$$\mathsf{a}_x = 1 + p_x \cdot v + {}_2p_x \cdot v^2 + \ldots = \sum_0^\infty {}_tp_x \cdot v^t. \tag{4}$$

Wenn beispielsweise der Zinssatz i fällt, so steigt v. Damit vermehrt sich auch a_x, so dass der Ausdruck $\frac{1}{\mathsf{a}_x}$ fällt. Es sinkt zwar auch d, trotzdem steigt aber P_x, da

$$\frac{dP_x}{dd} = \frac{\mathsf{a}_x - \mathsf{a}_{x+1}}{\mathsf{a}_x^2} - 1 < 0.$$

Es lassen sich natürlich über die quantitativen Beziehungen zwischen Zinsänderungen und Prämienänderungen Näherungsformeln aufstellen. Sie sind wiederholt unter dem Namen «Zinsfussproblem» in diesen Blättern behandelt [2].

---

[1]) Vgl. *Riebesell*, «Grundsätzliche Fragen zur Umrechnung von Prämien und Deckungskapitalien auf andere Sterbetafeln und auf andere Zinsfüsse». *Neumanns* Zeitschrift für Versicherungswesen, 64. Jahrg., Nr. 39, 1941.

[2]) Vgl. z. B. *E. Fischer:* «Das Zinsfussproblem der Lebensversicherungsrechnung als Interpolationsaufgabe», Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Bd. 42, 1942.

3. Die Änderung der Prämie durch Sterblichkeit

Wie sofort aus Formel (4) zu sehen ist, nimmt a_x mit fallender Sterbenswahrscheinlichkeit, d. h. mit wachsender Erlebenswahrscheinlichkeit zu. Die Prämie nach Formel (3) muss also abnehmen.

Als Beispiel nehmen wir den Vergleich zwischen der *Abel*schen Aggregat-Tafel und der Reichs-Sterbetafel 24/26 Männer. Die Sterbenswahrscheinlichkeiten in vT sind folgende:

Alter	Abel	24/26
35	5,17	4,25
40	7,59	5,35
45	10,61	7,23
50	15,52	10,30
55	22,67	15,48
60	33,63	23,62
65	49,22	36,92

Die Jahresprämien (bei 4 vH) in vT für eine reine Todesfallversicherung sind:

Alter	Abel	24/26
35	18,89	16,97
40	23,54	20,81
45	29,54	25,87
50	37,42	32,65
55	47,80	41,86
60	61,58	54,45
65	79,81	72,10

4. Deckungskapital und Zins

Allgemein lässt sich — unter Berücksichtigung der Sterblichkeit — der Einfluss der Verzinsung folgendermassen analysieren:

Die Reserven für zwei Tafeln, die mit den Zinssätzen i und i'' berechnet sind, wo $v'' = v(1 - c)$, werden

$$ {}_tV_x = 1 - \frac{a_{x+t}}{a_x} \quad \text{und} \quad {}_tV''_x = 1 - \frac{a''_{x+t}}{a''_x}. $$

Nun ist aber

$$\mathsf{a}''_x = 1 + v'' \cdot p_x + (v'')^2 \cdot p_x \cdot p_{x+1} + \dots$$

$$= 1 + v(1-c) \cdot p_x + v^2(1-c) \cdot p_x(1-c) \cdot p_{x+1} + \dots$$

und

$$\mathsf{a}''_{x+t} = 1 + v(1-c) \cdot p_{x+1} + v^2(1-c) \cdot p_{x+t}(1-c) \cdot p_{x+t+1} + \dots$$

Man sieht also, dass ${}_tV''_x$ gleich ist einer Reserve, die mit dem ursprünglichen Zinsfuss i berechnet ist und deren Sterblichkeit der Gleichung genügt

$$p''_x = p_x(1-c) \quad \text{und} \quad p''_{x+t} = p_{x+t}(1-c).$$

Wir werden aber im nächsten Kapitel sehen, dass eine derartige Tafel immer kleinere Reserven V'' liefert, als die Reserven V.

Für die gemischte Versicherung lässt sich der Einfluss des Zinsfusses auf die Reserve ohne weiteres aus Formel (5) ersehen.

$${}_tV_{x,n} = 1 - \frac{\mathsf{a}_{x+t,n-t}}{\mathsf{a}_{x,n}}. \tag{5}$$

Wenn der Zins fällt, steigt a_x, $\mathsf{a}_{x,n}$ steigt ebenfalls, aber mehr als $\mathsf{a}_{x+t,n-t}$. Der Bruch wird also kleiner, d. h. ${}_tV_{x,n}$ wird grösser.

5. Deckungskapital und Sterblichkeit

Falsch sind beispielsweise folgende Überlegungen:

Ist die Sterblichkeit grösser, so ist die Risikoprämie grösser, also die Sparprämie kleiner, also sind die Reserven kleiner. Diese Überlegung trifft nur bei gleicher Prämie zu. Ebenso ist es falsch, wenn die Sparprämie kleiner ist, etwa schliessen zu wollen, dass die Reserve unbedingt kleiner ist. Das geht aus folgender Formel hervor:

$${}_tV_x = {}_tP_s \cdot \frac{N_x - N_{x+t}}{D_{x+t}}, \tag{6}$$

wo ${}_tP_s$ die durchschnittliche Sparprämie darstellt.

Man sieht, dass das Deckungskapital sich aus 2 Faktoren zusammensetzt und infolgedessen nicht der eine Faktor ${}_tP_s$ allein mass-

gebend ist. Wenn man die Zusammenhänge untersuchen will, muss man etwas weiter ausholen.

Für eine Tafel I sei

$$ {}_tV_x = 1 - \frac{\mathsf{a}_{x+t}}{\mathsf{a}_x} \tag{7} $$

und für eine Tafel II

$$ {}_tV'_x = 1 - \frac{\mathsf{a}'_{x+t}}{\mathsf{a}'_x}. \tag{7a} $$

Es wird also

$$ {}_tV'_x \gtreqless {}_tV_x, $$

wenn

$$ \frac{\mathsf{a}'_{x+t}}{\mathsf{a}'_x} \lesseqgtr \frac{\mathsf{a}_{x+t}}{\mathsf{a}_x} \tag{8} $$

oder wenn

$$ \frac{\mathsf{a}'_{x+t}}{\mathsf{a}_{x+t}} \lesseqgtr \frac{\mathsf{a}'_x}{\mathsf{a}_x}. $$

Man muss diese Rentenverhältnisse für jedes Alter untersuchen. Was z. B. bei den verschiedenen Reichssterbetafeln herauskommt, zeigt folgendes Beispiel:

Nimmt man eine gemischte Versicherung mit dem Eintrittsalter 40 und einer Dauer von 25 Jahren, so ergeben sich bei 4 % folgende Netto-Deckungskapitalien:

Deckungskapital nach	1 Jahr	10 Jahren	15 Jahren	24 Jahren
Abel	25,48	290,81	473,30	929,93
Tafel 1891/1900 . .	24,28	279,37	460,67	927,92
Tafel 1901/1910 . .	24,86	284,52	466,16	928,99
Tafel 1924/1926 . .	24,83	289,40	475,92	932,66
Tafel 1932/1934 . .	24,80	289,68	476,26	933,17

Man sieht also, dass die Deckungskapitalien im allgemeinen (wenigstens gilt das für die Reichssterbetafeln) um so höher werden, je niedriger die Sterblichkeit ist.

Die Bedingung dafür, dass die Reserven sich bei Änderung der Sterblichkeit nicht ändern sollen, kann man durch Einführung von p_x und p'_x näher untersuchen.

Es soll in diesem Fall sein

$$\frac{a'_{x+t}}{a_{x+t}} = \frac{a'_x}{a_x} = \text{konstant.}$$

Setzt man

$$\frac{a_x}{a'_x} = 1 + c$$

und beachtet man, dass

$$a_x = 1 + v \cdot p_x \cdot a_{x+1}$$

und

$$a'_x = 1 + v \cdot p'_x \cdot a'_{x+1},$$

so wird

$$p'_x = p_x \left(1 - \frac{c}{a_x - 1}\right). \tag{9}$$

Wird diese Gleichung für beliebiges x erfüllt, so sind die Reserven für die beiden Tafeln gleich, selbst wenn p'_x immer grösser oder kleiner ist als p_x, je nachdem, ob c negativ oder positiv ist.

Hat man z. B. eine Tafel II, bei der für jedes x

$$p'_x = p_x(1 - c_1)$$

ist, wo c_1 positiv ist, so würde die Verminderung der p' kleiner sein, als die Bedingung der Reservegleichheit (9) verlangt, da c_1 konstant ist und $\frac{c}{a_x - 1}$ mit dem Alter zunimmt. Die Reserven, die mit der Tafel II berechnet werden, sind also stets kleiner als die nach Tafel I berechneten.

Satz I:

Aus Formel (5) folgt: Steigt die Sterblichkeit zwischen x und $x + t$, so steigt der Bruch, da $a_{x,n}$ abnimmt. ${}_tV_x$ nimmt also ab. Steigt die Sterblichkeit vom Zeitpunkt $x + t$ ab, so nehmen zwar Zähler und Nenner des Bruchs beide ab, aber bei a_{x+t} ist die Abnahme verhältnismässig grösser. Der Bruch nimmt also ab, ${}_tV_x$ nimmt zu.

6. Deckungskapital bei funktional bestimmter Änderung der Sterblichkeit

a) Die Gleichgewichtsgleichung

Bekanntlich ergibt sich das Deckungskapital V_1 aus dem Dekkungskapital des Vorjahres V durch die Gleichung

$$(V + P) \cdot (1 + i) = V_1 + q \cdot (S - V_1). \tag{10}$$

Nimmt man andere Rechnungsgrundlagen und soll sich das gleiche Deckungskapital ergeben, so würde folgende Gleichung gelten:

$$(V + P') \cdot (1 + i') = V_1 + q' \cdot (S - V_1). \tag{11}$$

Aus (10) und (11) ergibt sich die sogenannte Gleichgewichtsgleichung

$$(V + P) \cdot (i - i') + (P - P') \cdot (1 + i') = (q - q') \cdot (S - V_1) \tag{12}$$

oder

$$(P' - P) \cdot (1 + i') = (q' - q) \cdot (S - V_1) - (V + P) \cdot (i' - i) \tag{13}$$

in Worten:

Die aufgezinste Mehrprämie ist gleich dem mehr zu zahlenden Risikokapital plus den Weniger-Zinsen (oder: minus den Mehr-Zinsen).

Ist $i = i'$, so ergibt sich die Gleichung

$$(P' - P) \cdot (1 + i) = (q' - q) \cdot (S - V_1) \tag{14}$$

oder

$$(P' - P) \cdot (1 + i) = (q' - q) \cdot S + V_1 \cdot (p' - p) \tag{15}$$

Ist Gleichung (13) nicht erfüllt, so bezeichnet man den Ausdruck

$$R = [(P' - P) \cdot (1 + i')] - [(q' - q) \cdot (S - V_1) - (i' - i) \cdot (V + P)] \tag{16}$$

als Rest.

Entscheidend in diesem Ausdruck ist die zweite eckige Klammer, die auch als «kritische Funktion» bezeichnet wird [1]).

---

[1]) Vgl. das Englische «Textbook», Part. 2, London 1922, S. 187.

Ist $R = 0$, so ergeben sich für beide Rechnungsgrundlagen gleiche Reserven.

Ist $R \neq 0$, so sind die Reserven verschieden.

Da die Reserven in jedem Fall schliesslich auf 1000 anwachsen, kann R nicht dauernd positiv oder negativ sein. Es sind vielmehr nur folgende Fälle möglich:

a) R ist zuerst positiv, dann negativ,

b) R ist zuerst negativ, dann positiv.

Im Falle *a)* wird die durch die Reste angesammelte Ergänzungsreserve stets positiv. V' ist daher grösser als V. Die kritische Funktion nimmt in diesem Fall dauernd zu.

Im Falle *b)* wird die Ergänzungsreserve stets negativ. V' ist kleiner als V. Die kritische Funktion nimmt in diesem Falle dauernd ab.

Ist die kritische Funktion konstant, so ist

$$V' = V.$$

b) Gleiche Reserven

Wie bereits im 5. Kapitel gezeigt wurde, lautet die Bedingung dafür, dass die Reserven gleich bleiben:

$$\mathsf{a}_x = (1 + k) \cdot \mathsf{a}'_x$$

und dieser Gleichung entspricht die Relation

$$p'_x = p_x \left(1 - \frac{c}{\mathsf{a}_x - 1}\right).$$

Daraus ergibt sich

$$q'_x = q_x + \frac{k}{\mathsf{a}_{x+1}}, \tag{17}$$

wo

$$k = \frac{c}{v}$$

ist, oder

$$q'_x - q_x = \frac{k}{\mathsf{a}_{x+1}} \text{ [1]}.$$

---

[1]) Im «Textbook» S. 115 steht hier eine falsche Formel.

Da a_x mit wachsendem x abnimmt, ist es für die Gleichheit der Reserven erforderlich, dass p'_x rascher sinkt als p_x, oder q'_x rascher zunimmt als q_x.

Es ergibt sich für die Abhängigkeit folgender Satz:

Satz II:

Nimmt die Sterblichkeit bei allen vorkommenden Altern entweder zu oder ab, so nehmen die Reserven der lebenslänglichen Todesfallversicherung

ab
zu,

wenn die

Zunahme
Abnahme

der Sterblichkeit mit wachsendem Alter kleiner wird, gleichbleibt oder nur um so viel wächst, dass immer noch

$$(q'_x - q_x) \cdot a_{x+1}$$

abnimmt
zunimmt.

Die Reserven bleiben ungeändert, wenn die Zu- bzw. Abnahme der Gleichung

$$q'_x - q_x = \frac{k}{a_{x+1}}$$

genügt. Die Reserven nehmen

zu
ab,

wenn die

Zunahme
Abnahme

stets grösser ist, als wie sie durch diese Gleichung aufgezeigt ist.

Da im allgemeinen die Sterblichkeitszunahme (bzw. Abnahme) mit dem Alter nicht dauernd grösser wird, kann man sagen, dass einer Sterblichkeitszunahme im allgemeinen eine Reserveabnahme ent-

spricht und einer Sterblichkeitsabnahme im allgemeinen eine Reservezunahme [1]).

Die Frage, ob es möglich ist, dass bei 2 verschiedenen Tafeln die Reserven für alle Alter einander gleich sind, ist zuerst von *Dumas* [2]) untersucht und verneinend beantwortet worden. *Münzner* und *Löer* [3]) haben aber gezeigt, dass die *Dumas*sche Behauptung nur für diskontinuierliche Rechnungsweise gilt, dass es dagegen bei kontinuierlicher Rechnungsweise zu jeder Sterbetafel eine ganze Schar von Sterbetafeln gibt, die überall zu denselben Reserven bei der lebenslänglichen Todesfallversicherung führen.

Bei der gemischten Versicherung kommt es nicht nur auf die Sterbetafel, sondern vor allem auch auf die Dauer der Versicherung an. Es lassen sich keine 2 Sterbetafeln angeben, derart, dass 2 gemischte Versicherungen überall die gleichen Reserven haben. Für die gemischte Versicherung ergibt sich im einzelnen folgender Satz:

Satz III:

a) Bei Sterblichkeitsabnahme: Die Reserven nehmen zu, wenn die Abnahme der Sterblichkeit mit dem Alter kleiner wird, gleichbleibt oder nur um so viel wächst, dass

$$(q_x' - q_x) \cdot \mathsf{a}_{x+1}$$

noch mit x zunimmt. Aber auch dann, wenn die Abnahme der Sterblichkeit so stark zunimmt, dass die Reserven für die ersten Alter abnehmen, nehmen die Reserven schliesslich wieder zu.

b) Bei Sterblichkeitszunahme: Die Reserven nehmen ab, wenn die Zunahme der Sterblichkeit mit dem Alter kleiner wird, gleichbleibt oder nur um so viel wächst, dass

$$(q_x' - q_x) \cdot \mathsf{a}_{x+1}$$

noch mit x abnimmt. Die Reserven bleiben unverändert, wenn die Sterblichkeitszunahme der Gleichung

$$(q_x' - q_x) \cdot \mathsf{a}_{x+1} = k$$

---

[1]) Vgl. *K. Löer*, «Abhängigkeit der mathematischen Reserven von Sterblichkeit und Zins». «Das Versicherungsarchiv», 6. Jahrg., Heft 7—8, 1936.

[2]) *S. Dumas*, «Sur les tables de mortalité qui conduisent aux mêmes réserves mathématiques». Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 23, 1928.

[3]) «Die Invarianz des Deckungskapitals gegenüber Sterblichkeitsänderungen». «Archiv für mathematische Wirtschafts- und Sozialforschung», Band 2, 1936.

genügt. Die Reserven nehmen zu, wenn die Sterblichkeitszunahme grösser ist, als wie sie durch diese Gleichung bestätigt ist.

c) Multiplikative Änderung der Erlebenswahrscheinlichkeit

Ist

$$p'_x = p_x(1+k),$$

so entspricht dem die Beziehung

$$q'_x = q_x(1+k) - k.$$

Diese Bedingung wird auch erfüllt, wenn die Sterbensintensität sich additiv ändert. Denn es ist

$$p_x = exp\left[-\int_x^{x+1} \mu(s,t)\,ds\right]$$

wo (s, t) die Sterbensintensität im Alter s und bei der Tafel t ist. Also wird

$$ap_x = exp\left[-\int_x^{x+1} (\mu(s,t)+\beta)\,ds\right]$$

wobei

$$a = exp\left[-\int_x^{x+1} \beta\,ds\right]$$

ist.

$a > 1\ (k > 0)$ bedeutet also eine konstante Abnahme der Intensität, $a < 1\ (k < 0)$ eine konstante Zunahme.

Nach Satz III nimmt also für $a > 1$ die Reserve zu, für $a < 1$ nimmt sie ab.

d) Multiplikative Änderung der Sterbenswahrscheinlichkeit

Ist

$$q' - q = kq,$$

so folgt aus (10)

$$q(1 - V_1) = P(1+i) + V(1+i) - V_1$$

und

$$q(1 - V_2) = P(1+i) + V_1(1+i) - V_2.$$

Daraus ergibt sich

$$\Delta\,[q(1-V_1)] = (1+i)\cdot\Delta V - \Delta V_1 = i\cdot\Delta V - \Delta^2 V. \qquad (18)$$

Da für eine lebenslängliche Todesfallversicherung

$$P + d = \frac{1}{a_x}$$

ist, und

$$V = 1 - \frac{a_{x+1}}{a_x},$$

so ergibt sich

$$\Delta\,[q(1-V_1)] = (-P-d)\,[i\,(\mathsf{a}_{x+t+1} - \mathsf{a}_{x+t}) - \mathsf{a}_{x+t+2} + \mathsf{a}_{x+t}] = (P+d)\,(\Delta^2 a - i\cdot\Delta a).$$

Es folgt also, dass

$$k\cdot q(1-V_1)$$

oder

$$(q'-q)\,(1-V_1)$$

wächst, wenn

$$\Delta^2 a > i\cdot\Delta a.$$

Es ist konstant, wenn

$$\Delta^2 a = i\cdot\Delta a$$

und es fällt, wenn

$$\Delta^2 a < i\cdot\Delta a.$$

Ist

$$\Delta^2 a > i\cdot\Delta a,$$

so ist

$$V' > V.$$

Ist

$$\Delta^2 a < i\cdot\Delta a,$$

so ist

$$V' < V.$$

Ist

$$q'_x = q_x(1+k),$$

d. h. wird die Sterbenswahrscheinlichkeit um einen bestimmten Prozentsatz geändert, so kann die Wirkung aus Gleichung (17) abgelesen werden. Die Vermehrung würde im allgemeinen für die jüngeren Alter

grösser sein als die in Gleichung (17) angegebene, die Steigerung würde also schwächer als in der Bedingung für die Gleichung der Reserven sein. Nach Satz III nehmen daher die Reserven ab. Bei einer Verminderung der Sterbenswahrscheinlichkeit um einen bestimmten Prozentsatz nehmen die Reserven zu. Genauer ist das Resultat in Gleichung (18) angegeben.

e) Additive Änderung der Sterbenswahrscheinlichkeit

Ist

$$q'_x = q_x + k,$$

so steigen gegenüber Gleichung (17) die q_x in den höheren Altern nicht rasch genug. Die Reserve nimmt also ab.

Ist dagegen

$$q'_x = q_x - k,$$

so ist für die jüngeren Alter die Abnahme zu gross, und die Sterblichkeitszunahme wird mit wachsendem Alter zu gross. Die Reserve nimmt also zu [1]).

7. Einige allgemeine Sätze über die Abhängigkeit des Deckungskapitals von den Rechnungsgrundlagen

a) Der Mosersche Zeichenwechselsatz

Moser [2]) hat folgenden Satz bewiesen:

Wird die Reserve einer gemischten Versicherung nach 2 Sterbetafeln berechnet, von denen die eine für ein im Verlauf der Versicherung gelegenes Intervall eine grössere Sterbensintensität hat als die andere, so weist die Reservedifferenz in jenem Intervall stets einen Zeichenwechsel auf.

Berger [3]) hat einen ganz einfachen Beweis für diesen Satz gebracht, der folgendermassen lautet:

---

[1]) Im «Textbook» S. 116 ist hier eine falsche Angabe gemacht.

[2]) «Der Zeichenwechselsatz». Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 9, 1914.

[3]) «Mathematik der Lebensversicherung». Wien 1939.

2 Tafeln haben dieselben Werte der Sterbensintensitäten, ausgenommen für die Alter $x + t_1$ bis $x + t_2$, für welche die Intensitäten der zweiten Tafel grösser sein sollen als die der ersten. Es sei nun die für die zweite Tafel berechnete Prämie grösser als die für die erste berechnete, was offenbar für eine gemischte Versicherung auch der Fall ist, wenn die Dauer über t_2 hinausreicht. Hieraus folgt, dass alle Prämienreserven des Intervalls 0 bis t_1 nach der zweiten Tafel gerechnet, grösser sein müssen als nach der ersten Tafel, denn das ergibt sich unmittelbar aus der Definition der retrospektiven Reserven. Andererseits müssen aber alle Reserven des Intervalls t_2 bis n nach der zweiten Tafel kleiner sein als nach der ersten, denn dies folgt aus der Definition der prospektiven Reserven für dieses Intervall. Daraus folgt, dass die Reservedifferenzen in dem Intervall von t_1 bis t_2 mindestens einmal durch 0 gehen.

b) Der Satz von Schärtlin

Schärtlin [1]) hat folgenden Satz bewiesen:

Sind bei einer Versicherungsdauer n die Reserven nach zwei Sterbetafeln einander gleich, so werden bei einer kürzeren Versicherungsdauer m jene Reserven grösser, welche nach der Tafel mit den grösseren Erlebenswahrscheinlichkeiten berechnet sind.

Durch den Beweis von *Dumas*, dass es keine zwei Sterbetafeln geben kann, die überall zu denselben Reserven führen, war dieser Satz bedeutungslos geworden, da seine Voraussetzung nicht erfüllt sein konnte. Nachdem aber *Münzner* und *Löer* gezeigt haben, dass der *Dumas*sche Beweis nicht richtig ist, hat der *Schärtlin*sche Satz nach wie vor Gültigkeit.

c) Einfluss der Änderung der Konstanten der Gompertz-Makehamschen Sterbeformel auf die Prämienreserven

Friedli [2]) hat zuerst die Änderung der Konstanten in der *Gompertz-Makehamschen* Sterbeformel in bezug auf ihren Einfluss auf die Reservegestaltung untersucht. Seine Untersuchungen beziehen sich auf

---

[1]) «Über die Reserveberechnung mit Bruttoprämie». Assekuranz-Jahrbuch, Band 11, 1890.

[2]) «Reserve und Rentenbarwert als analytische Funktionen». Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmathematiker, Band 13, 1918.

die lebenslängliche Todesfallversicherung. Sie sind von *Löer* auf die gemischte Versicherung ausgedehnt worden. Wird das *Gompertz-Makehamsche* Gesetz in der Form geschrieben

$$l_x = k \cdot s^x \cdot g^{c^x},$$

so ergibt sich das Resultat, dass eine Erhöhung der Konstanten c oder s zu einer Erhöhung der Reserve, eine Erhöhung der Konstanten g dagegen zu einer Verringerung der Reserve führt. Bei der gemischten Versicherung kann allerdings durch eine geeignete Wahl von n auch erreicht werden, dass die Reserve dauernd abnimmt, wenn die Konstante c wächst. Der Verlauf der Reserve der gemischten Versicherung bei Änderung der Sterblichkeit hängt eben wesentlich von der Dauer n ab.

Ist die Sterbensintensität

$$\mu_x = A + B \cdot c^x,$$

so wird die *Gompertz-Makehamsche* Sterbeformel

$$l_x = k \cdot s^x \cdot g^{c^x}$$

und es bestehen dann folgende Beziehungen:

$$-A = \log s$$

$$\frac{-B}{\log c} = \log g.$$

Für die Reichssterbetafel 24/26 hat *Schweer* in der vom deutschen Aktuarverein herausgegebenen Ausgabe diese Konstanten folgendermassen berechnet:

$A = 0{,}00252$	$s = 0{,}99422$
$B = 0{,}000050$	$g = 0{,}99735$
$c = 1{,}10502$	$c = 1{,}10502.$

Für die *Abel*sche Tafel habe ich nach dem *Schweer*schen Vorschlag [1]) die Konstanten errechnet und bin zu folgendem Resultat gekommen:

$A = 0{,}000555$	$s = 0{,}99900$
$B = 0{,}0001343$	$g = 0{,}9912$
$c = 0{,}03497$	$c = 1{,}0839.$

[1]) «Eine graphische Methode zur Berechnung der Konstanten der *Gompertz-Makehamschen* Formel». 10. Aktuar-Kongress, Rom 1934, Band 5, S. 292.

d) Quantitative Auswirkung

Will man wenigstens für die Änderung der Reserven, die durch eine Zinsänderung eintreten, eine quantitative Formel aufstellen, so lässt sich dafür nach *Berger* [1]) folgende Beziehung ableiten:

es sei

$$ {}_tE_x = v^t \cdot {}_tp_x . $$

Unter Rücksicht auf

$$ a_{x,\overline{n}|} = a_{x,\overline{t}|} + {}_tE_x \cdot a_{x+t,\overline{n-t}|} $$

oder

$$ 1 - \frac{a_{x,\overline{t}|}}{a_{x,\overline{n}|}} = {}_tE_x(1 - {}_tV_{x,\overline{n}|}) $$

erhält man, wenn $i' < i$

$$ {}_tE_x(1 - {}_tV_{x,\overline{n}|}) < {}_tE'_x(1 - {}_tV'_{x,\overline{n}|}) \tag{19} $$

und auch

$$ {}_tV'_{x,\overline{n}|} < 1 - \frac{{}_tE_x}{{}_tE'_x}(1 - {}_tV_{x,\overline{n}|}) $$

als obere Schranke. Die Differenz der Prämienreserven

$$ {}_tV'_{x,\overline{n}|} - {}_tV_{x,\overline{n}|} $$

muss daher kleiner sein als

$$ (1 - {}_tV_{x,\overline{n}|})\left(1 - \frac{{}_tE_x}{{}_tE'_x}\right). $$

Aus (19) folgt aber auch

$$ {}_tV_{x,\overline{n}|} > 1 - \frac{{}_tE'_x}{{}_tE_x}(1 - {}_tV'_{x,\overline{n}|}), $$

so dass die Differenz der Prämienreserven kleiner sein muss als

$$ (1 - {}_tV'_{x,\overline{n}|})\left(\frac{{}_tE'_x}{{}_tE_x} - 1\right). $$

Die erstere Formel wird bei bekanntem ${}_tV_{x,\overline{n}|}$, die letztere bei bekanntem $V'_{x,\overline{n}|}$, benutzt.

---

[1]) *A. Berger*, Mathematik der Lebensversicherung. Wien 1939.