Sitzungsberichte der Mathematischen Vereinigung in Bern

Objekttyp: **AssociationNews**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern**

Band (Jahr): **1 (1944)**

PDF erstellt am: **16.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Sitzungsberichte
der Mathematischen Vereinigung in Bern

---

124. Sitzung, Freitag, den 29. Januar 1943.

Herr **Dr. E. Preisig** (Baden) spricht über das Thema: **„Ueber Bewegungsmittelwerte konvexer Körper“.**

Der Referent gibt einen zusammenfassenden Bericht über das Hauptresultat seiner Dissertation ähnlichen Titels (erschienen in den Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. XV, Fasciculus secundus, 1942/43, 120—143). Es bezeichne J_k den über alle Bewegungen eines konvexen Körpers des n-dimensionalen Raumes erstreckte Mittelwert der Treffzahl des Körpers im Unterraumgitter G_k (Einheitsgitter der (n-k)-dimensionalen linearen Unterräume des Grundraumes). Diese Bewegungsmittelwerte stehen nun, wie Referent in der oben erwähnten Dissertation nachgewiesen hat, in enger Beziehung mit den sogenannten Quermassintegralen von Minkowski. Ist nämlich W_i das i.te Quermassintegral des bewegten konvexen Körpers, und bezeichnet noch V_i das Volumen der i-dimensionalen Einheitskugel, so gilt die beachtenswerte Relation:

$$J_k = \frac{V_k}{V_n} W_{n-k}.$$

Diese Formel enthält mit dem Spezialfall $k = n$, G_n = Einheitspunktgitter, W_0 = Volumen des Körpers, die aus dem bekannten Blichfeldtschen Satz folgende Identität des Volumens mit dem Bewegungs- (oder auch nur Translations-)mittelwert der Gitterpunkttreffzahl im gewöhnlichen Punktgitter.

---

125. Sitzung, Mittwoch, den 17. Februar 1943.

Die Vereinigung ehrt den 300. Geburtstag des grossen Gelehrten und Mathematikers Isaak Newton durch einen Vortrag in der Bernischen Schulwarte. Herr **Prof. Dr. P. Gruner** spricht über **„Isaak Newton, sein Leben und sein Lebenswerk“.** Der Vortrag ist mittlerweile im Verlag Paul Haupt, Bern-Leipzig, 1943, erschienen.

---

126. Sitzung, Freitag, den 5. März 1943.

Herr **Dr. H. Bieri** (Herzogenbuchsee) spricht über das Thema: **„Räumliche Beispiele zum Randwertproblem der Variationsrechnung“.**

Das genannte Problem besteht in spezieller Fassung darin, durch 2 Punkte P und Q des Raumes eine glatte Kurve E zu legen derart, dass dem Kurvenintegral $\int_P^Q F\,dt$ ein Extremwert erteilt wird. F soll eine Invariante gegenüber Transformationen des Kurvenparameters t bedeuten. Die zulässigen Vergleichskurven V dürfen eine gewisse Umgebung von E nicht verlassen.

Nach der allgemeinen Theorie muss E eine Lösung der Euler'schen Differentialgleichungen in der Weierstrass'schen Form sein. Ausserdem müssen im allgemeinen auf E die Legendre'sche und die Jakobi'sche Bedingung erfüllt sein. Unter diesen Umständen liefert E ein schwaches Extrem. Für ein starkes Extrem ist hinreichend, dass man E in ein Feld einbetten kann und dass daselbst die Weierstrass'sche E-Funktion festes Vorzeichen besitzt.

Direkte Verifizierung der Bedingungen auf der Extremalen E ist unschön und meistens nicht möglich, da bei allgemeiner Wahl von F nicht einmal die Extremalen des Variationsproblems ermittelt werden können. Mit

$$F = \sqrt{\Phi}\,\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}, \text{ wo } \Phi = \sum_{i=1}^{3} \varphi_i\,(x_i),$$

sind die Euler'schen Differentialgleichungen in geschlossener Form integrierbar. Die Lösung des gestellten Problems gestaltet sich hernach wie folgt:

1. Im Realitätsbereich B von Φ wird der Knotenpunkt P in allgemeiner Lage gewählt.

2. Durch P wird die 2-parametrige ausgezeichnete Extremalenschar gelegt. Die Scharparameter sind Richtungsgrössen. Der Kurvenparameter wird so normiert, dass er in P den Wert Null hat.

3. Die Gleichung $\Delta(t, x_1, x_2) = \dfrac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(t, x_1, x_2)}$

wird diskutiert. Für unsere Beispiele ergibt sich die Existenz eines einfachzusammenhängenden Bereiches G im Parameterraum mit dem Rand C (C = Fläche!).

4. Im Koordinatenraum wird die Hülle von 2. diskutiert. Ihre Einfachheit wird festgestellt, indem man sie mit einer geeigneten Schar von parallelen Ebenen zum Schnitt bringt und die Einfachheit der Schnittkurven beweist.

5. Existiert jetzt noch ein Extremalenfeld durch P, so wird das Randwertproblem auf eine ein-eindeutige Abbildung zurückgeführt. Es hat genau 1 Lösung, wenn Q im Feld liegt.

6. Die Lage von P wird spezialisiert. Es kann vorkommen, dass dann keine Lösungen mehr existieren.

---

127. Sitzung, Freitag, den 7. Mai 1943.

Herr **Pd. Dr. E. Stiefel** (E. T. H. Zürich) spricht über das Thema: **„Anschauliches zur Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades".**

Schreibt man die kubische Gleichung in der reduzierten Form $x^3 - px + q = 0$ (1) und bezeichnen x_1, x_2, x_3 die drei Lösungen, so gelten nach Vieta die Relationen

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 && (2)\\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 &= 2p && (3)\\ x_1 x_2 x_3 &= -q && (4). \end{aligned}$$

Werden nun die x_i als Cartesische Koordinaten eines Punktes aufgefasst, so liegt nach (2) und (3) der Lösungspunkt auf einem Kreis im dreidimensionalen Raum. Mit Rücksicht auf diese geometrische Interpretation wird es nun zweckmässig sein, für den oben bezeichneten Kreis eine geeignete Parameterdarstellung einzuführen. Nach der Transformation

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{y_1}{\sqrt{2}} - \frac{y_2}{\sqrt{6}} + \frac{y_3}{\sqrt{3}}\\ x_2 &= \frac{y_1}{\sqrt{2}} - \frac{y_2}{\sqrt{6}} + \frac{y_3}{\sqrt{3}}\\ x_3 &= \frac{2y_2}{\sqrt{6}} + \frac{y_3}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

ist die naheliegende Darstellung durch

$$y_1 = \sqrt{2p}\cos\varphi, \quad y_2 = \sqrt{2p}\sin\varphi, \quad y_3 = 0$$

gegeben. Nun ist nach (4)

$$x_1 x_2 x_3 = -q = \sqrt{\frac{4p^3}{27}}\,(4\sin^3\varphi - 3\sin\varphi) = -\sqrt{\frac{4p^3}{27}}\sin 3\varphi.$$

Also ergibt sich

$$x_3 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\varphi, \text{ wo } \sin 3\varphi = \frac{q}{2\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

ist. Damit ist auf dem eben beschrittenen geometrisch anschaulichen Wege die bekannte trigonometrische Auflösungsformel der kubischen Gleichung gewonnen.

Zu einer weiteren komplexen Darstellung der Lösungen gelangt der Referent auf die folgende originelle Weise: Die Drehung des oben erwähnten Kreises um 120° in sich führt einen Lösungspunkt in einen ebensolchen über. Offenbar ist es nun zweckmässig, die Hauptsachen der entsprechenden Raumdrehung als neues Bezugssystem zu wählen. Nach der durchgeführten Hauptachsentransformation gelangt man zu der Darstellungsformel

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1 + z_2 + z_3\\ x_2 &= e z_1 + e^2 z_2 + z_3\\ x_3 &= e^2 z_1 + e z_2 + z_3, \end{aligned}$$

wobei 1, e, e^2 die drei Wurzeln der Kreiseinteilungsgleichung $\lambda^3 - 1 = 0$ bezeichnen. Nach (3) und (4) erhält man nun

$$z_1, z_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

und $x_1 = z_1 + z_2$, also die bekannte Cardanische Auflösungsformel. — Durch eine projektive Betrachtung gelangt der Referent weiter zu einer Charakterisierung der Lösungspunkte durch 6 Doppelverhältnisse, welche schliesslich zu einer Darstellung der Lösung mit Hilfe der Modulfunktion führt. Einige analoge Studien über die Gleichungen vierten und fünften Grades beschliessen die Ausführungen des Referenten.

---

128. Sitzung, Freitag, den 12. November 1943.

Herr **Prof. Dr. H. Behnke** (Münster i. Westf.) spricht über: **„Einführung in die Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen“.**

Der Referent, einer der bedeutendsten Funktionentheoretiker der Gegenwart, hat durch seine Forschungsarbeit und seine publizistische Tätigkeit wesentlichen Anteil an der Entwicklung und Förderung dieser Theorie. — Mit Beschränkung auf zwei komplexe Veränderliche wird die Definition auf Grund der Entwickelbarkeit in Doppelpotenzreihen gegeben, und die Uebernahme des klassischen Grundgedankens von Weierstrass angedeutet. Die regulären Funktionen können auch durch die Forderung gekennzeichnet werden, dass sie 1. die regulären Funktionen der klassischen Theorie als Sonderfälle enthalten, 2. bei Substitutionen zweier derartiger Funktionen eine ebensolche liefern, 3. die Cauchyschen Integralformeln erfüllen. Ausgehend von Hyperkugel und Dizylinder werden die Reinhardt'schen Körper als Konvergenzbereiche der Doppelreihen mit zweiparametriger und die Kreiskörper mit einparametriger Drehungsgruppe und endlich die starren Körper, die keine Transformation in sich zulassen, erläutert. Dies sind die wichtigsten Objekte, mit denen sich die Abbildungstheorie zu befassen hat (Riemann'scher Abbildungssatz!). In der Theorie der Singularitäten sind die Begriffe des Regularitätsbereiches (Existenzbereich einer regulären Funktion) und ihrer Randhyperflächen (Singularitätenmannigfaltigkeit) wesentlich.

Bereits die Erweiterung auf zwei komplexe Dimensionen bedingt eine ausserordentlich reichhaltige Menge von neuartigen Begriffsbildungen und erstaunlichen Aussagen, die zum Teil auch den Kenner der klassischen Funktionentheorie zu beeindrucken vermögen.

Durch diesen einführenden Vortrag, der, mit Umgehung der Schwierigkeiten, welche eine Durchrechnung mit sich bringen würde, nur die wesentlichen Grundbegriffe, Aussagen und Forschungsziele klar zu Tage treten liess, zeichnete Herr Prof. Behnke in meisterhafter Weise ein lebendiges Bild einer sich heute in voller Entwicklung befindlichen Disziplin der Mathematik. Interessiert hörte man von den Anstrengungen von Fachgelehrten der verschiedensten Länder zur Erreichung der gemeinsamen Forschungsziele, und nahm so deutlich die Auszeichnung einer abstrakten Wissenschaft wahr, die darin besteht, über allem Zeitgeschehen stehen zu dürfen.

---

129. Sitzung, Freitag, den 3. Dezember 1943.

Herr **Prof. Dr. H. Hadwiger** spricht über „Eine **einfache Ableitung der isoperimetrischen Ungleichung in der Ebene.**"

Nach einigen knappen historischen Bemerkungen skizziert der Referent den klassischen analytischen Beweis der isoperimetrischen Ungleichung von Hurwitz und lässt sodann noch einen modernen, von Santaló herrührenden Beweis folgen, der sich der Hilfsmittel der ebenen Integralgeometrie bedient. Sodann entwickelt der Referent einen neuen, allerdings nur für Polygone gültigen Beweis, der mit völlig elementaren Hilfsmitteln durchführbar ist.