Polarebenen in Bezug auf das Rotationsflächensystem (1)

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): **- (1911)**

PDF erstellt am: **29.05.2024**

$$(2.)\quad \frac{x'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{y'^2}{\frac{s^2 k^2}{(1-k^2)^2}} + \frac{z'^2}{\frac{s^2 k^2}{1-k^2}} = 1$$

Da $a = b$ ist, so werden die Koordinaten der Kreispunkte:

$$x' = \pm 0 \quad \text{und} \quad z' = \pm \frac{s\,k}{\sqrt{1-k^2}}$$

Je zwei der Kreispunkte der durch Gleichung (2) dargestellten Rotationsellipsoïde und -Hyperboloïde fallen demnach in einen einzigen zusammen, so dass im ganzen nur zwei übrig bleiben; sie liegen symmetrisch zur ($x\,y$)-Ebene und haben im alten System die Koordinaten:

$$x = a_0 = \frac{s}{1-k^2} \quad \text{und} \quad z = \pm \frac{s\,k}{\sqrt{1-k^2}}$$

Für jedes Rotationsellipsoïd fallen die Kreispunkte zusammen mit den Endpunkten der Rotationsachse $2\,c$ und bei variablem Parameter k bewegen sie sich nach der in § 4 aufgestellten Parabelgleichung (b.). Für die Rotationshyperboloïde wird die Ordinate der Kreispunkte

$$z = \pm \frac{s\,k}{\sqrt{1-k^2}} = \pm \frac{s\,k}{i\sqrt{k^2-1}} = \mp i \frac{s\,k}{\sqrt{k^2-1}} = \text{imaginär},$$

d. h. es gibt auf den Rotationshyperboloïden keine Kreispunkte. Das System paralleler Schnittebenen, welches in der Fläche Kreise ausschneidet, ist parallel der ($x\,y$)-Ebene und setzt sich nach beiden Richtungen bis ins Unendliche fort.

§ 10.

Polarebenen in Bezug auf das Rotationsflächensystem (1).

Soll die Polarebene eines beliebigen festen Punktes $P_0(x_0\,y_0\,z_0)$ in Bezug auf eine Fläche 2. Grades bestimmt werden, so wird deren Gleichung zunächst mit w homogen gemacht; Gleichung (1) geht also über in $(1-k^2)\,x^2 + (1-k^2)\,y^2 + z^2 - 2\,s\,x\,w + s^2\,w^2 = 0$, wo w die Bedeutung 1 hat. Die Gleichung der Polarebene wird dann nach der Formel bestimmt:

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x_0} + y\,\frac{\partial f}{\partial y_0} + z\,\frac{\partial f}{\partial z_0} + w\,\frac{\partial f}{\partial w_0} = 0$$

Es ist nun $\frac{\partial f}{\partial x_0} = 2(1-k^2)x_0 - 2sw_0$

$$\frac{\partial f}{\partial y_0} = 2(1-k^2)y_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial z_0} = 2z_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial w_0} = -2sx_0 + 2s^2 w_0$$

Also wird die Gleichung der Polarebene des Punktes $P_0(x_0 y_0 z_0)$, wenn $w_0 = w = 1$ gesetzt wird:

$[(1-k^2)x_0 - s]x + (1-k^2)y_0 y + z_0 z - s(x_0 - s) = 0$ oder

$$(1-k^2)[x_0 x + y_0 y] - sx + z_0 z - s(x_0 - s) = 0 \qquad (15)$$

Als Pol wählen wir vorerst einen beliebigen Punkt $P_0(x_0, 0, 0)$ der (x)-Achse. Wir haben also in der Gleichung (15) für $y_0 = z_0 = 0$ zu setzen, und sie geht dann über in

$$x = \frac{s(x_0 - s)}{(1-k^2)x_0 - s}$$

Wir sehen hieraus, dass allgemein die Polarebene eines Punktes der (x)-Achse in Bezug auf jede beliebige Fläche des Systems zu der (y z)-Ebene des Koordinatensystems parallel ist. Wählt man speziell den festen Punkt F(s, 0, 0) als Pol und erinnert sich daran, dass nach § 4 die (z)-Achse die Leitlinie, d. h. die Polare in Bezug auf den einen Brennpunkt F aller Schnittkegelschnitte in der (x z)-Ebene darstellt, so folgt, dass alle Polarebenen des Punktes F mit der (y z)-Ebene zusammenfallen; denn sie müssen die (z)-Achse enthalten und zugleich zur (x)-Achse senkrecht stehen. Setzt man in der Polarebenengleichung (15) für $x_0 = s$, $y_0 = z_0 = 0$, so geht sie wirklich für jedes beliebige k über in $x = 0$, die Gleichung der (y z)-Ebene.

Für den Pol $P_0(0, 0, 0)$, also den Ursprung des Koordinatensystems, wird die Polarebenengleichung $x = s$. Auch die Polarebene des Nullpunktes ist also für alle Flächen der Schar dieselbe; sie ist parallel zu der (y z)-Ebene und geht durch den Punkt F.

Wir wählen nun einen beliebigen aber festen Punkt $P(x_0 y_0 z_0)$ und betrachten seine Polarebenen in Bezug auf alle Rotationsflächen des ganzen Systems. Dann spielt in der Polarebenengleichung (15) die Grösse $(1-k^2)$ die Rolle eines veränderlichen Parameters, der alle Werte von 1 bis $-\infty$ annehmen kann, und die Gleichung (15) stellt daher bei veränderlichem k ein Ebenenbüschel dar. Die Gleichungen seiner Grundebenen sind:

$$E_1 = x_0 \cdot x + y_0 \cdot y = 0 \qquad \text{und}$$
$$E_2 = s \cdot x - z_0 \cdot z + s\,(x_0 - s) = 0$$

Die Grundebene E_1 steht senkrecht auf der (x y)-Ebene und geht durch die (z)-Achse. Ihre Spurgerade in der (x y)-Ebene hat die Gleichung $y = -\frac{x_0}{y_0} x$; sie ist die Polarebene des Punktes P in Bezug auf die Fläche $k = \infty$ des Systems, welche die (z)-Achse ist. Die Grundebene E_2 des Büschels steht senkrecht auf der (x z)-Ebene; ihre Spurgerade hat die Gleichung $z = \frac{s}{z_0} x + \frac{s}{z_0}(x_0 - s)$; sie ist die Polarebene des Punktes P in Bezug auf die Fläche $k = 1$ des Systems, welches ein parabolischer Cylinder ist.

Die Achsenabschnitte der Grundebene E_2 sind $x = s - x_0$ und $z = \frac{s}{z_0}(x_0 - s)$. Die Scheitelkante des Büschels, durch welche alle Polarebenen des Punktes P $(x_0\, y_0\, z_0)$ in Bezug auf alle Rotationsflächen des Systems hindurch gehen, hat die Doppelgleichung:

$$x = -\frac{y_0}{x_0} y = \frac{z_0}{s} z - x_0 + s$$

Diese Gerade geht durch die (z)-Achse und zwar im Abstand $z = \frac{s}{z_0}(x_0 - s)$. Ihr Durchstosspunkt mit der (x y)-Ebene hat die Koordinaten $x = s - x_0$ und $y = \frac{x_0}{y_0}(x_0 - s)$

Haben wir zwei verschiedene Pole $P_1\,(x_1\, y_1\, z_1)$ und $P_2\,(x_2\, y_2\, z_2)$, so werden die Polarebenengleichungen des Rotationsflächensystems in Bezug auf P_1 und P_2 nach Gleichung (15):

$$(1 - k^2)\,[x_1 x + y_1 y] - s\,x + z_1 z - s\,(x_1 - s) = 0 \quad \text{und} \qquad \text{(a)}$$
$$(1 - k^2)\,[x_2 x + y_2 y] - s\,x + z_2 z - s\,(x_2 - s) = 0 \qquad \text{(b)}$$

Betrachtet man wieder die Grösse $(1 - k^2)$ als variablen Parameter, so lassen sich die beiden letzten Gleichungen abgekürzt in der Form schreiben

$$(1 - k^2)\, E_1 + E_2 = 0 \quad \text{und} \tag{c}$$
$$(1 - k^2)\, E_3 + E_4 = 0 \tag{d}$$

Dabei stellen E_1 und E_2 die Grundebenengleichungen des Ebenenbüschels für den Pol P_1, E_3 und E_4 diejenigen für den Pol P_2 dar, welche die oben angegebene Bedeutung als Polarebenen der Grenzflächen $k = \infty$ und $k = 1$ haben. Weil der Parameter $(1 - k^2)$ in den Gleichungen (c) und (d) der beiden Ebenenbüschel dieselben Werte durchläuft, so stellen diese Gleichungen zwei projektivische Ebenenbüschel dar. Jedem Parameterwert entspricht in jedem Büschel eine bestimmte Ebene; zwei solche Ebenen heissen entsprechende Ebenen. Je zwei entsprechende Ebenen schneiden sich in einer Geraden, und die Gesamtheit aller dieser Schnittgeraden bildet in ihrer Aufeinanderfolge eine Linienfläche oder windschiefe Regelfläche. Man erhält ihre Gleichung, wenn man aus den beiden Büschelgleichungen den veränderlichen Parameter $(1 - k^2)$ eliminiert. Es folgt dann als Eliminationsgleichung:

$$E_2 E_3 - E_1 E_4 = 0 \quad \text{oder}$$
$$s(x_1 - x_2)\, x^2 + s(y_1 - y_2)\, x\, y + (x_2 z_1 - x_1 z_2)\, x\, z + (y_2 z_1 - y_1 z_2)\, y\, z$$
$$+ s^2 (x_2 - x_1)\, x + s\,[s(y_2 - y_1) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)]\, y = 0 \tag{16}$$

Da diese Linienfläche vom zweiten Grade ist, so stellt die Gleichung (16) entweder ein einschaliges Hyperboloïd oder ein hyperbolisches Paraboloïd dar. Um dies zu entscheiden, muss die Determinante δ der allgemeinen Flächengleichung 2. Grades berechnet werden. Für die Gleichung (16) wird sie:

$$\delta = \begin{vmatrix} s(x_1 - x_2) \cdot & \frac{s}{2}(y_1 - y_2) \cdot & \frac{1}{2}(x_2 z_1 - x_1 z_2) \\ \frac{s}{2}(y_1 - y_2) \cdot & 0 & \cdot \frac{1}{2}(y_2 z_1 - y_1 z_2) \\ \frac{1}{2}(x_2 z_1 - x_1 z_2) \cdot & \frac{1}{2}(y_2 z_1 - y_1 z_2) & \cdot\, 0 \end{vmatrix}$$

oder ausgerechnet:

$$\delta = (y_2 z_1 - y_1 z_2) \left[\frac{s}{8}(y_1 - y_2)(x_2 z_1 - x_1 z_2) - \frac{s}{4}(x_1 - x_2)(y_2 z_1 - y_1 z_2) \right]$$

Wenn der Determinantenwert δ von Null verschieden ist, so stellt die Gleichung (16) eine centrische Fläche 2. Grades dar, also ein einschaliges Hyperboloïd. Verschwindet dagegen der Wert von δ, so rückt der Mittelpunkt der Fläche ins Unendliche; sie stellt dann im allgemeinen ein Paraboloïd dar, kann aber in speziellen Fällen auch in zwei Ebenen zerfallen. Für das Verschwinden der Determinante δ gibt es folgende mögliche Fälle:

a) $y_2 z_1 - y_1 z_2 = 0$ oder $\frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$. Dies ist der Fall, wenn die Verbindungsgerade der beiden Pole P_1 und P_2 die (x)-Achse schneidet. Die Flächengleichung (13) geht dann über in:

$$s(x_1 - x_2) x^2 + s(y_1 - y_2) x y + (x_2 z_1 - x_1 z_2) x z + s^2 (x_2 - x_1) x + s [s(y_2 - y_1) + (x_2 y_1 - x_1 y_2)] y = 0$$

Dies ist die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloïdes.

b) $y_1 = y_2$ und $x_1 = x_2$. Wenn diese Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind, so liegen die beiden Pole P_1 und P_2 auf einer Parallelen zur (z)-Achse. Setzt man in der Gleichung (16) $y_1 = y_2$ und $x_1 = x_2$, so zerfällt sie in die beiden Ebenengleichungen:

$$z = 0 \quad \text{und} \quad x_1 \cdot x + y_1 \cdot y = 0$$

Die eine Ebene wird gebildet von der (x y)-Ebene des Koordinatensystems und die andere steht auf ihr senkrecht; sie geht durch die (z)-Achse und erzeugt eine Spurgerade von der Gleichung

$$y = -\frac{x_1}{y_1} x$$

c) $x_1 = x_2$ und $z_1 = z_2$. Die Pole P_1 und P_2 müssen in dem Fall auf einer Parallelen zur (y)-Achse liegen. Die Flächengleichung (16) zerfällt dann in:

$$y = 0 \quad \text{und} \quad s x + z_1 \cdot z + s^2 + s x_1 = 0$$

Dies sind die Gleichungen zweier Ebenen; die erste fällt zusammen mit der (x z)-Ebene des Koordinatensystems, die zweite steht dazu senkrecht und erzeugt die Achsenabschnitte:

$$x = -(s + x_1) \quad \text{und} \quad z = -\frac{s(s + x_1)}{z_1}$$

Die beiden projektivischen Polarebenenbüschel zweier Pole P_1 und P_2 in Bezug auf das Rotationsflächensystem erzeugen also ein hyperbolisches Paraboloïd, wenn die Verbindungsgerade $P_1 P_2$ die (x)-Achse schneidet, zwei Ebenen, wenn sie entweder zur (z)- oder zur (y)-Achse parallel ist, in allen andern Fällen dagegen ein einschaliges Hyperboloïd.

§ 11.

Ort der Schnittpunkte von drei sich rechtwinklig schneidenden Tangentialebenen für die verschiedenen Flächen des Rotationsflächensystems.

Die Achsengleichung einer beliebigen centrischen Fläche 2. Grades hat allgemein die Form $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Nun ist der Ort aller Punkte im Raum, von denen aus drei zueinander senkrecht stehende Tangentialebenen an eine solche Fläche gelegt werden können, eine mit der Fläche concentrische Kugel vom Radius $R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Da die Halbachsen unserer Rotationsfläche $a = b = \frac{s\,k}{1 - k^2}$ und $c = \frac{s\,k}{\sqrt{1 - k^2}}$ sind, so ist der Radius der Kugel von obiger Beschaffenheit

$$R = \sqrt{\frac{2\,s^2\,k^2}{(1 - k^2)^2} + \frac{s^2\,k^2}{1 - k^2}} = \frac{s\,k}{1 - k^2}\sqrt{3 - k^2} \qquad \text{(a)}$$

Wir können aus diesem Wert für R bereits schliessen, dass nur für diejenigen Flächen des Rotationsflächensystems eine Kugel von der oben erwähnten Eigenschaft besteht, für welche $k < \sqrt{3}$ ist, also für alle Rotationsellipsoïde und für die Rotationshyperboloïde $k < \sqrt{3}$. Für jede dieser Flächen lässt sich die Gleichung einer Kugel bestimmen, deren sämtliche Flächenpunkte Schnittpunkte von je drei senkrecht aufeinander stehenden Tangentialebenen an die betreffende Fläche sind; diese Kugelgleichung lautet

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{s^2\,k^2}{(1 - k^2)^2}(3 - k^2) \qquad (17)$$

Um diese Gleichung auf das alte Coordinatensystem zu beziehen, haben wir in ihr $x' = x - \frac{s}{1 - k^2}$, $y' = y$ und $z' = z$ zu setzen; die Gleichung (17) geht dann über in