

Objektyp: **Chapter**

Zeitschrift: **Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft Bern**

Band (Jahr): - **(1902)**

Heft 1519-1550

PDF erstellt am: **14.05.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Zeichen verwendet werden darf. Das negative Zeichen entspricht den Lösungen der Spiegelbildkurve in Bezug auf die x-Axe.

Setzt man in der Proportion:

$$y : h_b = x : \frac{b}{2} \text{ für } x \text{ und } y \text{ die Werte von (11) ein,}$$

so erhält man für h_b den Wert nach Formel (6); damit ist nachgewiesen, dass beide Verfahren die gleichen Ergebnisse liefern.

Berechnen wir mit Hilfe von (11) m , denn $m = \sqrt{x^2 + y^2}$ und h_s , denn $h_s = \sqrt{b^2 - m^2}$, so finden wir, dass bei jedem spitzwinkligen Dreieck die Strecke $m = OD$ gleich ist der Grösse h_s bei dem zugehörigen stumpfwinkligen Dreieck und umgekehrt. Bei allen Lösungen gilt die Relation

$$\begin{aligned} h_s + m &= c, & \text{wenn } c > b, \\ h_s \pm m &= c, & \text{» } c = b \text{ und} \\ h_s - m &= c, & \text{» } c < b \text{ ist.} \end{aligned}$$

IX.

§ 26. *Neunte Aufgabe: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Schenkel und Basishöhe gegeben sind.*

Gegeben: 1. b ,
2. $s \pm h_b = \pm c = \text{konstant.}$

Bedingungen: 1. $s + h_b \geq \frac{b}{2}$,
2. $s - h_b \leq \frac{b}{2}$.

Die Summe ist das Minimum bei einem unendlich kleinen Dreieck; da ist $s = \frac{b}{2}$ und $h_b = 0$. Umgekehrt ist die Differenz bei einem unendlich kleinen Dreieck das Maximum und nimmt stetig ab bis 0, wenn das Dreieck wächst und schliesslich unendlich gross wird.

§ 27. *Erstes Verfahren. Bestimmung der Fusspunkte D.*

a) *Konstruktion der Hilfskurve.* Taf. IV, Fig. 14.

Es sei $OA = b$ die Basis des Dreiecks. Wir ziehen den Grundkreis und die Mittelsenkrechte, auf welcher wir von C aus

die Konstante c nach E abtragen. Durch O laufe nun ein Strahl, der den Grundkreis in Q und die Mittelsenkrechte in R schneidet. Nun tragen wir die Strecke RE von O aus auf dem Strahl OQ nach beiden Seiten ab und bekommen die beiden Punkte T_1 und T_2 . Schliesslich tragen wir noch die Strecken RT_1 und RT_2 auf dem Strahl OQ von Q aus ab und zwar in der Richtung, in welcher von der Mittelsenkrechten aus die Punkte T liegen. Die gewonnenen Punkte seien P_1 und P_2 , welche bei sich drehendem Strahl die Kurve beschreiben. Die Schnittpunkte derselben mit dem Grundkreis liefern die zunächst gesuchten Punkte D ; denn fällt ein Kurvenpunkt P in den Grundkreis, so ist $QP=0$, also auch $RT=0$. Im letztern Fall kommt T in die Mittelsenkrechte zu liegen, und es ist ferner $OT=RE=OB=s$ und da auch $RC=h_b$ ist, so muss sich eine der Bedingungen erfüllen:

$$s \pm h_b = c.$$

b) *Ableitung der Kurvengleichung.*

Wir legen in gewohnter Weise das Koordinatensystem. x und y seien die Koordinaten des Kurvenpunktes P_1 ; dann ist

$$OP_1 = \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$OP_1 = OQ - T_1R = OQ - OR + OT_1 = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (\alpha)$$

$$\text{Num ist } OQ = b \cos \varphi,$$

$$OR = \frac{b}{2 \cos \varphi}$$

$$\text{und } OT_1 = EC - RC = c - \frac{b}{2} \operatorname{tg} \varphi,$$

sub. in (α) , so
gibt es

$$b \cos \varphi - \frac{b}{2 \cos \varphi} + c - \frac{b}{2} \operatorname{tg} \varphi = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ umgeformt}$$

$$[(x^2 + y^2)(2x - b) - 2bx^2]^2 - (by - 2cx)^2(x^2 + y^2) = 0. \quad (1)$$

Für ein negatives c bekommen wir die Spiegelbildkurve in Bezug auf die x -Axe. In der Gleichung (1) ändert bloss das mit c behaftete Glied Vorzeichen. Löst man Gleichung (1) auf, so verschwindet das Glied b^2y^4 ; dann lässt sich der Faktor x in allen Gliedern wegdividieren und wir erhalten:

$$(x^2 + y^2)^2 x - (x^4 - y^4)b + (x^2 - 3y^2) \frac{b^2 x}{4} + (x^2 + y^2)(by - cx)c = 0. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Polargleichung: } r &= \frac{b \cos 2\varphi \pm (b \sin \varphi - 2c \cos \varphi)}{2 \cos \varphi} \\ &= \frac{b \cos 2\varphi}{2 \cos \varphi} \pm \left(\frac{b}{2} \operatorname{tg} \varphi - c \right). \quad (2a) \end{aligned}$$

c) *Diskussion der Kurrengleichung.*

Die Kurve ist von der 5. Ordnung und hat im Nullpunkt einen 3fachen Punkt. Die Gleichung der *Nullpunktstangenten* lautet:

$$\left(\frac{y}{x} \right)^3 - \frac{3b^2 + 4c^2}{4bc} \cdot \left(\frac{y}{x} \right)^2 + \frac{y}{x} + \frac{b^2 - 4c^2}{4bc} = 0. \quad (3)$$

Spezialfälle:

$$1. \quad c = 0; \quad \frac{b^2}{4} x (x^2 - 3y^2) = 0.$$

$$\alpha) \quad x = 0.$$

$$\beta) \quad y = \pm \frac{x}{3} \sqrt{3}.$$

Die Gleichung der Kurve selbst nimmt die Form an

$$(x^2 + y^2)[(x^2 + y^2)x - b(x^2 - y^2)] + (x^2 - 3y^2) \frac{b^2 x}{4} = 0. \quad (4)$$

Diese Spezialkurve allein ist symmetrisch und zwar in Bezug auf die x-Axe. Nach y aufgelöst erhalten wir

$$y = \pm \sqrt{\frac{3b^2 x - 8x^3 \pm bx \sqrt{9b^2 - 16bx}}{8(x + b)}}.$$

$x = \frac{9b}{16}$ ist der Maximalwert, den x annehmen kann. Für

diesen Grenzwert von x wird $y = \pm \frac{3b}{16} \sqrt{0,6}$. Die Kurve bildet eine Doppelschleife, welche ganz innerhalb des Grundkreises liegt, denselben im Nullpunkt berührt und aus 2 kongruenten Schleifen besteht, die sich im Punkt $\left(\frac{b}{2}, 0 \right)$ schneiden.

$$2. \quad c = \frac{b}{2}; \quad \left(\frac{y}{x} \right)^3 - 2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + \frac{y}{x} = 0;$$

$\alpha) \quad y = 0$; die x-Axe ist Tangente.

$\beta) \quad y = x$ 2mal; diese Tangente ist eine Selbstberührungstangente, welche die Kurve im Nullpunkt zudem noch schneidet.

Alle Schnittpunkte der Geraden $y=x$ mit der Kurve fallen daher in den Nullpunkt. Von den 3 Doppelpunkten, die im 3fachen Punkte O liegen, ist der eine also ein Selbstberührungspunkt. Die 4 Doppelpunkte, welche die Kurve im Endlichen hat, stecken für $c = \frac{b}{2}$ alle im Nullpunkt.

Die x-Axe schneidet die Kurve in O 3mal und 2mal in den Punkten $\frac{b}{2} \pm c$. Die y-Axe schneidet die Kurve 3mal in O, einmal in $(0, -c)$ und einmal im Unendlichen.

Die imaginären Kreispunkte der Ebene sind Doppelpunkte der Kurve; diese ist somit *rational*; denn sie besitzt 6 Doppelpunkte, 4 im Endlichen und 2 im Unendlichen, so lange c endlich ist.

Die Gerade $x = -b$ ist *Wendeasymptote*. (4)

Die Kurve hat *Wendepunkte*. Ist O Knotenpunkt, so besitzt die Kurve einen Wendepunkt im Unendlichen. Ist O isolierter Punkt, so sind 3 Wendepunkte vorhanden, wovon 2 im Endlichen sind.

Für ein unendlich grosses c besteht die Kurve aus der y-Axe, der doppelt gelegten unendlich fernem Geraden und dem isolierten Punkt in O.

d) Die Lösungen.

Wir suchen die Fusspunkte D der Schenkelhöhen zunächst. Für die Koordinaten von D finden wir die Werte

$$x = \frac{16b^3c^2}{(b^2 + 4c^2)^2} \quad (5)$$

$$\text{und } y = \pm \frac{4b^2c(4c^2 - b^2)}{(b^2 + 4c^2)^2}. \quad (6)$$

Das negative Zeichen gilt für die Lösungen der Spiegelbildkurve. Wir bekommen für einen bestimmten Wert von c nur *eine* reelle Lösung; das rührt daher, weil $s + h$ nicht kleiner als $\frac{b}{2}$ und $s - h$ nicht grösser als $\frac{b}{2}$ werden kann. Wir bekommen folgende Hauptfälle:

$$\text{A. } c > \frac{b}{2}.$$

Alle Lösungen genügen der Bedingung: $s + h_b = c$.

$$1. \quad c > \frac{b}{2} (1 + \sqrt{2}); \quad 0 < x < \frac{b}{2}.$$

Das Dreieck ist spitzwinklig und wird speziell gleichseitig, wenn $c = \frac{b}{2} (2 + \sqrt{3})$ ist.

$$2. \quad c = \frac{b}{2} (1 + \sqrt{2}); \quad x = \frac{b}{2}.$$

Das Dreieck ist rechtwinklig.

$$3. \quad \frac{b}{2} (1 + \sqrt{2}) > c > \frac{b}{2}; \quad \frac{b}{2} < x < b.$$

Das Dreieck ist stumpfwinklig.

$$B. \quad c = \frac{b}{2}, \text{ Grenzfall; } x = b.$$

Das Dreieck ist unendlich klein und genügt der Relation:

$$s \pm h_b = c.$$

$$C. \quad c < \frac{b}{2}.$$

Die Dreiecke erfüllen die Bedingung: $s - h_b = 0$.

$$1. \quad \frac{b}{2} (\sqrt{2} - 1) < c < \frac{b}{2}; \quad \frac{b}{2} < x < b.$$

Das Dreieck ist stumpfwinklig.

$$2. \quad c = \frac{b}{2} (\sqrt{2} - 1); \quad x = \frac{b}{2}.$$

Das Dreieck ist rechtwinklig.

$$3. \quad \frac{b}{2} (\sqrt{2} - 1) > c > 0; \quad \frac{b}{2} > x > 0.$$

Das Dreieck ist spitzwinklig und wird für $c = \frac{b}{2} (2 - \sqrt{3})$ speziell gleichseitig.

$$4. \quad c = 0; \quad x = 0.$$

Das Dreieck ist unendlich gross, wie es bei A für $c = \infty$ wird.

Für die Basishöhe BC findet man nach bekannter Proportion den Ausdruck:

$$h_b = \frac{4c^2 - b^2}{8c}. \quad (8)$$

Für die Lösungen der Spiegelbildkurve ist dieser Wert negativ zu nehmen.

Für die Dreiecksfläche erhält man nach (8) die Formel

$$F = \frac{(4c^2 - b^2)b}{16c}. \quad (9)$$

§ 28. Zweites Verfahren. Bestimmung der Spitzen B.

Diese Aufgabe ist schon elementar ohne Mühe lösbar. Es ist ja $s^2 = \frac{b^2}{4} + h_b^2$. Berücksichtigt man, dass $s \pm h_b = c$, so

findet man
$$h_b = \pm \frac{4c^2 - b^2}{8c},$$
 was mit (8) voll-

kommen übereinstimmt. Die elementare Lösung auf konstruktivem Wege erfordert 2 verschiedene Konstruktionen, je nachdem die Summe oder Differenz von s und h_b vorliegt. Soll die gleiche Konstruktion beide Fälle einschliessen, so wird eine Hilfskurve nötig. Ihre Gleichung lautet:

$$(x^2 + y^2)4x^2 - (by - 2cx)^2 = 0. \quad (10)$$

Wir haben dieselbe unter V (8), pag. 60, bereits kennen gelernt. In unserm Fall hat die Kurve den Selbstberührungspunkt in O.

Ihre Asymptoten sind $x = \pm \frac{b}{2}$.

Bei den Lösungen handelt es sich um die Schnittpunkte B der Mittelsenkrechten $x = \frac{b}{2}$ mit der Kurve. Für die Ordinate von B finden wir den Wert $y = h_b = \frac{4c^2 - b^2}{8c}$. (11)

Dieser Wert stimmt mit (8) überein. Beide Verfahren decken sich somit vollständig in ihren Resultaten.

X.

§ 29. Zehnte Aufgabe. Konstruktion eines gleichschenkligen Dreieckes, wenn die Basis und die Summe oder Differenz aus Basis-höhe und dem an die Basis angrenzenden Schenkelabschnitt gegeben sind.

- Gegeben:
1. b ,
 2. $h_b \pm m = \pm c = \text{konstant}$.