

# Regelmässige Prismen und Vielecke

Autor(en): **Pünchera, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Jahresbericht des Bündnerischen Lehrervereins**

Band (Jahr): **17 (1899)**

Heft: **Der Geometrie-Unterricht in der I. und II. Klasse der Kantonsschule und in Realschulen**

PDF erstellt am: **19.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-145638>

## Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

in zwei Punkten  $F$  und  $F'$ , welche Brennpunkte der Ellipse heissen, während die Entfernung eines Brennpunktes vom Mittelpunkt Excentrizität genannt wird.

Nimmt man einen Faden von der Länge  $2a$ , befestigt seine Endpunkte bei  $F$  und  $F'$ , hält dann den Faden mit einem Stift bei  $C$  gespannt, so erhält man eine Ellipse, wenn man mit dem Stift herumfährt.

Prüfe die Richtigkeit dieser Konstruktion bei den schon gezeichneten Ellipsen.

### Übungen.

1) Stelle einige der früher behandelten Cylinderkörper in Parallelprojektion dar.

2) Ein Erdmeridian ist eine Ellipse, bei welcher die kleine Achse  $\frac{299}{300}$  der grossen Achse beträgt. Zeichne sie. Sie ist fast ein Kreis.

3) Die Bahn der Erde um die Sonne ist eine Ellipse, bei welcher  $\frac{OF}{OA} = \frac{1}{60}$  ist; zeichne sie auf einem sehr grossen Blatte.

## F. Regelmässige Prismen und Vielecke.

### I. Konstruktion regelmässiger Vielecke aus ihren Seiten.

1) Ein sechsseitiger Brunnen hat eine innere Seitenlänge von 1,5 m, eine Tiefe von 90 cm und eine Wanddicke von 30 cm.

*Zeichne den Grund- und den Aufriss dieses Brunnens, und berechne, wieviel Liter Wasser er hält, sowie den Rauminhalt der Wandung.*

a) Der Grundriss des Innenraums ist ein regelmässiges Sechseck mit der Seitenlänge 1,5 m; der Grundriss der äusseren Wand ist ebenfalls ein regelmässiges Sechseck, dessen Seiten von den Seiten des inneren Sechsecks einen Abstand von 30 cm haben. Der Umriss des Aufrisses ist ein Rechteck.

Der  
Grund- und  
der Aufriss  
des  
Brunnens.

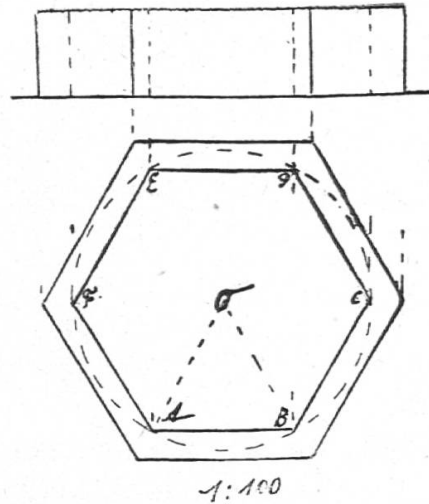
Wir wählen hier den Massstab 1 : 100.

Wie wird das innere Sechseck gezeichnet?

Wir beschreiben einen Kreis mit Radius 1,5 cm und tragen den Radius sechsmal als Sehne ein. Warum geht das? Dreieck

$ABO$  ist gleichseitig, somit auch gleichwinklig; darum misst der Centriwinkel  $AOB$   $60^\circ$  und ist genau sechsmal im vollen Winkel enthalten.

Fig. 45.



Zweite  
Konstruk-  
tion des  
Sechsecks.

Das äussere Sechseck können wir zeichnen, indem wir zu den Seiten des inneren im Abstände von 3 mm Parallele ziehen.

b) Wie könnte man das Sechseck  $ABCDEF$  ohne Hilfe des Kreises konstruieren? Wir werden davon Gebrauch machen, dass wir die Winkel an der Peripherie des Sechsecks kennen.  $\angle ABC = \angle ABO + \angle CBO = 120^\circ$ ; ebenso  $\angle BCD$  u. s. f. Jeder Peripheriewinkel des Sechsecks misst  $120^\circ$ ; beachte, dass ein solcher den Centriwinkel eines der Dreiecke zu  $180^\circ$  ergänzt.

Wir erhalten das Sechseck, indem wir zuerst eine Strecke  $AB = 1,5$  cm machen, dann in  $B$  einen Winkel von  $120^\circ$  abtragen, auf dem 2. Schenkel 1,5 cm abmessen, wiederum  $120^\circ$  abtragen u. s. f.

c) *Berechnung.* Der Hohlraum des Brunnens wird gleich inneres Sechseck mal Höhe, und die Wandung wird gleich ihrem Grundriss mal Höhe sein. Der Grundriss der Wandung besteht aus 6 gleichen Trapezen. Entnimm die Länge der Seite des äusseren Trapezes aus der Zeichnung.

Wir nennen den Hohlraum des Brunnens ein regelmässiges Prisma. Grund- und Deckfläche sind kongruent; ihre Seiten laufen paarweise parallel. Die Seitenkanten sind einander gleich und stehen senkrecht zur Grund- und zur Deckfläche.

2) *Zeichne den Grundriss einer sechseitigen Schraubenmutter, deren Seite 2 cm misst, ohne Benutzung des Zirkels.*

3) Zeichne den Grundriss eines achtseitigen Brunnens, bei welchem eine Achteckseite 1,2 m misst.

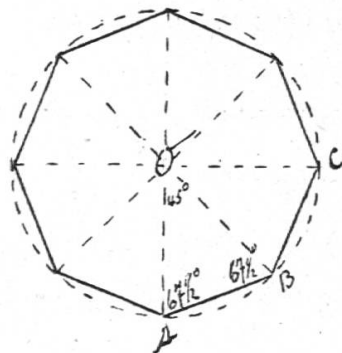
a) Wir denken uns je zwei gegenüberliegende Eckpunkte des Achtecks miteinander verbunden. Dadurch wird es in 8 kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt. (Siehe Fig. 46.)

Der Centriwinkel eines solchen Dreiecks misst  $\frac{360}{8} = 45^\circ$ ; die Winkel an der Grundlinie messen somit zusammen  $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ ; jeder davon ist gleich  $67\frac{1}{2}^\circ$ .

Ein solches Dreieck des Achtecks lässt sich nun aus der Grundlinie A B und den beiden anliegenden Winkeln konstruieren; ihm können wir die 7 kongruenten Dreiecke am einfachsten anschliessen, indem wir um die Spitze einen Kreis beschreiben, welcher durch die Endpunkte der Grundlinie geht. In diesen Kreis tragen wir letztere noch 7 mal als Sehne ein.

Dieser Kreis heisst dem Achtecke umgeschrieben.

Fig. 46.



b) Wir könnten auch dieses Achteck konstruieren, ohne den Kreis zu ziehen. Wir berechnen einen Peripheriewinkel.

$$W. A B C = 2 \cdot 67\frac{1}{2}^\circ = 135^\circ = 180^\circ - 45^\circ.$$

Der Peripheriewinkel A B C ist das Supplement zum Centriwinkel A O B.

Nun können wir zuerst A B zeichnen, bei B  $135^\circ$  abtragen, B C abmessen u. s. w.

Wie wäre der Rauminhalt dieses Brunnens zu berechnen, wenn  $h = 40$  cm ist?

4) Wie zeichnet man ein beliebiges regelmässiges Vieleck aus seiner Seite?

a) Ist die Seitenzahl  $n$ , so lässt sich das Vieleck in  $n$  kongruente gleichschenklige Dreiecke einteilen, indem man seine

Ecken mit seinem Mittelpunkte, den wir uns vorläufig nur denken, verbindet. Der Centriwinkel eines solchen Dreiecks misst  $\frac{360^\circ}{n}$ . Die zwei Winkel an der Grundlinie messen zusammen  $180^\circ = \frac{360^\circ}{n}$ . Da sie gleich sind, misst ein jeder hievon die Hälfte. Aus der Grundlinie und den anliegenden Winkeln lässt sich das Dreieck zeichnen. Dann kann man den umgeschriebenen Kreis ziehen und darin die Vielecksseite als Sehne eintragen.

b) Wir können auch den Peripheriewinkel benutzen. Ein solcher setzt sich aus zwei Winkeln zusammen, die den Winkeln, welche an der Grundlinie eines Dreiecks im Vieleck liegen, gleich sind und folglich den Centriwinkel zu  $180^\circ$  ergänzen.

Der Peripheriewinkel ist daher das Supplement zum Centriwinkel, also  $= 180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$ .

Mit Hilfe des Peripheriewinkels kann man aber einer ersten Seite die folgenden anschliessen.

5) *Berechne den Peripherie- und den Centriwinkel bei mehreren regelmässigen Vielecken.*

| Seitenzahl       | n                           | 4          | 5           | 6           | 8           | 9           | 12          |
|------------------|-----------------------------|------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| Centriwinkel     | $\frac{360^\circ}{n}$       | $90^\circ$ | $72^\circ$  | $60^\circ$  | $45^\circ$  | $40^\circ$  | $30^\circ$  |
| Peripheriewinkel | $180 - \frac{360^\circ}{n}$ | $90^\circ$ | $108^\circ$ | $120^\circ$ | $135^\circ$ | $140^\circ$ | $150^\circ$ |

6) Zeichne den Boden eines Gartenhauses, der ein regelmässiges Fünfeck von 1,4 m Seitenlänge ist.

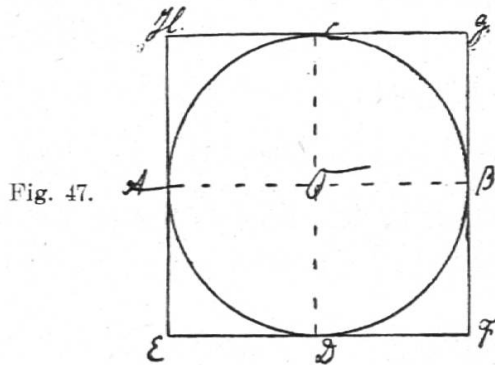
## II. Das dem Kreise umgeschriebene regelmässige Vieleck. Die Tangente.

*Wie könnte man aus einem Holzblock einen Cylinder von vorgeschriebenem Radius heraussägen?*

Das Tangenten-  
quadrat.

a) Wir zeichnen auf der Grundfläche des Blocks den Kreis vom geg. Radius ein und konstruieren zuerst ein Quadrat, das den Kreis einschliesst, indem wir ein Achsenkreuz, A B, C D, einzeichnen und in den Endpunkten der beiden Durchmesser die Senkrechten dazu ziehen.

Dann führen wir einen Sägeschnitt längs jeder Quadratseite; dadurch wird aus dem Holzblock zunächst ein quadratisches Prisma herausgeschnitten.



Wir wollen die Figur E F G H näher ins Auge fassen; sie heisst ein dem Kreise *umgeschriebenes Quadrat* oder *Tangentenquadrat*. Die Seite EF berührt den Kreis im Punkte D. Jeder Punkt auf E F ist vom Centrum weiter entfernt als D, liegt also ausserhalb des Kreises. E F heisst *Berührungslinie* oder *Tangente* des Kreises. D heisst ihr *Berührungspunkt*. Die Tangente E F steht auf dem Radius des Berührungspunktes senkrecht.

Wie nennt man FG, GH, HE? Welche Eigenschaft haben diese Linien? Wie ist jede konstruiert worden?

Konstruktion der Tangente.

**Satz 22.** Man konstruiert die Tangente in einem Kreispunkte, indem man den Radius zieht und darauf im Kreispunkte die Senkrechte errichtet.

b) Nun wollen wir mit unserer Konstruktion weiter fahren. Wir halbieren die Viertelsbogen des gezeichneten Kreises, zeichnen die Radien dieser Mitten und errichten die Senkrechten zu diesen. Die entstehende Figur heisst *umgeschriebenes regelmässiges Achteck* oder *regelmässiges Tangentenachteck*. Indem man längs der Seiten des Achtecks durch den Holzblock Schnitte führt, verwandelt man ihn in ein achtseitiges Prisma. Die Ecken sind stumpfer geworden.

Das Tangentenachteck.

Wie wird man nun fortfahren?

c) Mit welchem Vielecke hätte man mit Vorteil auch beginnen können? Zeichne das umgeschriebene regelmässige Sechs- und Zwölfeck eines Kreises.

Wie konstruiert man ein grosses Wasserrad?

*Verallgemeinerung.* 1) Vergleiche die gemeinsamen Eigenschaften des Quadrats, des regelm. 6-, 8- und 12-Ecks. Jedes dieser Vielecke hat alle Seiten und alle Winkel gleich und besitzt einen Mittelpunkt, um den sich ein Kreis beschreiben lässt, der durch die Eckpunkte geht (umgeschriebener Kreis) und einen Kreis, der alle Seiten berührt (eingeschriebener Kreis).

**Satz 23.** In einem regelmässigen Vieleck sind alle Seiten und alle Winkel gleich; es besitzt einen Mittelpunkt, einen eingeschriebenen und einen umgeschriebenen Kreis.

2) Wir wollen auch einen Rückblick auf die sämtlichen Prismen werfen, die wir bisher betrachtet haben.

Wir haben behandelt: rechtwinklige Prismen, senkrechte Prismen, deren Grundfläche ein Dreieck, ein Parallelogramm, ein Trapez, ein Trapezoid, ein regelmässiges Sechs- und Achteck war, ferner schiefe Prismen.

Bei allen diesen Prismen sind Grund- und Deckfläche kongruente Vielecke, deren Seiten paarweise parallel laufen; die Seitenflächen sind Parallelogramme. Die Prismen, deren Seitenkanten senkrecht zur Grundfläche stehen, haben wir senkrechte Prismen, und die Prismen, deren Seitenkanten schief zur Grundfläche stehen, schiefe Prismen genannt. Was gilt von den Seitenflächen?

Die senkrechten Prismen, deren Grundflächen regelmässige Vielecke sind, haben wir regelmässige Prismen genannt.

Wie haben wir die Prismen nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche benannt?

Bei sämtlichen Prismen haben wir den Rauminhalt erhalten, indem wir die Grundfläche mit ihrem senkrechten Abstände von der Deckfläche (Höhe des Prismas) multipliziert haben.

**Satz 24. a)** Bei einem Prisma sind Grund- und Deckfläche kongruente Vielecke, deren Seiten paarweise parallel laufen; die Seitenflächen sind Parallelogramme.

b) Stehen die Seitenkanten senkrecht zur Grundfläche, so heisst das Prisma ein senkrechtes; ist die Grundfläche zudem ein regelmässiges Vieleck, so heisst das Prisma ein regelmässiges. Die Seitenflächen des senkrechten Prismas sind Rechtecke. Stehen die Seitenkanten schief zur Grundfläche, so heisst das Prisma ein schiefes.

c) Nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche teilt man die Prismen in drei-, vier-, fünf-, sechsseitige u. s. w. ein.

d) Für jedes Prisma gilt die Regel:

Inhalt = Grundfläche mal Höhe.

## G. Die Pyramide.

### I. Die quadratische Pyramide.

1) Wir befinden uns vor einem Turme (oder Pfeiler), der in eine quadratische Pyramide ausläuft.

a) *Beschreibe den Turm von der Stelle an, wo seine* Beschreibung.  
*rechtwinklige Form aufhört.*

Die Grundfläche dieses Teiles des Turmes ist ein Quadrat; seine 4 Seitenflächen sind gleichschenklige Dreiecke, die in einer Ecke, der Spitze, zusammenlaufen. Wir nennen diesen Körper eine *quadratische* Pyramide. Sie ist begrenzt von einer Grund- und 4 Seitenflächen, von 4 gleichen Grund- und 4 gleichen Seitenkanten und von 5 Ecken.

b) *Es soll dieser Körper durch Grund- und Aufriss dargestellt werden.* Grund- und Aufriss.

Welche Masse müssen wir nehmen? Eine Grundkante misst 6 m und der senkrechte Abstand der Spitze von der Grundfläche, die Höhe der Pyramide, misst 10 m.

Wir zeichnen den Grund- und den Aufriss dieser Pyramide und denken sie uns einmal so auf die Grundrissebene gestellt, dass zwei Seiten ihrer Grundfläche parallel zur Aufrissebene laufen, und ein zweites Mal so, dass zwei Seitenkanten diese Lage erhalten.

In Fig. 1 erscheinen die Seitenkanten im Aufriss verkürzt. Bei der Stellung 2) laufen A S und C S parallel zur Aufrissebene und erscheinen im Aufriss in wahrer Grösse; denn die Raumfiguren A A" S S" und C C" S S" sind Rechtecke.

c) *Was kostet die Erstellung dieses Turmdachs à 7 Fr. pro m<sup>2</sup>?*

Wir zeichnen das Netz der Pyramide und berechnen ihre Seitenflächen. Das Netz lässt sich leicht der Seite S" C" anschliessen (siehe Fig. 48 b). Die Höhe einer Seitenfläche kann man der Zeichnung entnehmen. S" M misst in der Zeichnung (1 : 400) 2,6 cm, in der Natur also 10,4 m.