Die Kohärenzeigenschaften der emittierten und gestreuten Strahlung

Autor(en): **Schilt, Heinz**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **7 (1934)**

Heft I

PDF erstellt am: **19.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110358

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Die Kohärenzeigenschaften der emittierten und gestreuten Strahlung.

Auszug aus der Diplomarbeit von **Heinz Schilt.**

(7. XI. 33.)

Zusammenfassung. Aus der wellenmechanisch berechneten elektrischen Feldstärke wird korrespondenzmässig der Ausdruck für die Intensität der Strahlung gewonnen und daraus die Kohärenzeigenschaften abgelesen. Im ersten Teil behandeln wir die gestreute Strahlung ohne die Strahlungsdämpfung zu berücksichtigen. Die Strahlungsdämpfung wird im zweiten Teil an einzelnen speziellen Problemen berücksichtigt. Dort ist die emittierte, die gestreute und besonders die Resonanzstrahlung behandelt.

Einleitung.

1. Allgemeines.

Es sollen in dieser Arbeit verschiedene Fälle der Entstehung kohärenten Lichtes untersucht werden. Wir behandeln da folgende allgemeine Sachlage: Durch irgend eine Anordnung (Spiegel, Linsen, Prismen usw.) werde Licht verschiedener Art in einem Punkte, dem Aufpunkte, vereinigt. Wir berechnen die Lichtintensität in diesem Punkte. Für diese werden wir immer einen Ausdruck von der Form

$$J = J_1 + J_2 + \sum_i C_i \cos(\nu \Delta - \delta_i)$$
$$= J_1 + J_2 + A \cos \nu\Delta + B \sin \nu\Delta$$

zu erwarten haben. Es bedeutet J_1 (J_2) die Intensität der Strahlung, wenn nur solche der Art 1 (2) vorhanden wäre. $c\Delta$ ist die Differenz der Lichtwege, $\nu\Delta$ gibt diese in Anzahl Wellenlängen an. Es ist

$$A = \sum_i C_i \cos \delta_i \qquad B = \sum_i C_i \sin \delta_i .$$

Die Summe über i kann eventuell auch eine Integration bedeuten. Zu beachten ist noch, dass der Ausdruck für J immer statistisch gemittelt werden muss, d. h. man soll immer über viele Atome mitteln.

Kohärent nennen wir die beiden Lichtarten dann, wenn Interferenzstreifen auftreten, wenn also $J_{max} - J_{min} > 0$ ist. Es ist zweckmässig, als Mass für die Kohärenz eine Grösse D einzuführen, die definiert ist durch die Gleichung:

$$D = \frac{J_{max} - J_{min}}{J_{max} + J_{min}} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{J_1 + J_2}.$$

Für inkohärentes Licht ist $D = 0$. Für kohärentes Licht liegt D zwischen null und eins und ist im günstigsten Falle ($J_{min} = 0$) gleich eins.

Es besteht speziell dann keine Kohärenz, wenn vor der statistischen Mittelung im Argument der Cosinusglieder unbestimmte Phasen stehen, denn diese bewirken, dass bei der Mittelung die periodischen Glieder verschwinden.

2. *Zur Methode.*

Die Lichtintensität im Aufpunkte soll mit Hilfe der Wellenmechanik berechnet werden. Prof. W. Pauli hat in seinem Handbuchartikel dargelegt, wie das zu geschehen hat[1]). Es wird dort von dem klassischen Ausdruck für das Vektorpotential ausgegangen,

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathfrak{i}_Q}{r_{PQ}} d V_Q$$

und darin den wellenmechanischen Wert für den Strom eingesetzt. Aus dem Vektorpotential, das nur für die Wellenzone berechnet wird, erhält man in bekannter Weise durch Differentiieren die elektrische Feldstärke. Bei der Bildung der Intensität der Strahlung, die bei kleiner Lichtmenge ja die einzige beobachtbare Grösse ist, muss nun allerdings eine besondere Vorschrift, die von Klein stammt, beachtet werden. Diese Vorschrift beschränkt die Möglichkeiten der Ausstrahlung derart, dass z. B. ein Atom im Grundzustand nicht strahlt. Sie lässt sich folgendermassen darstellen:

Wir entwickeln die Zustandsfunktion Ψ des Systems nach dessen Eigenfunktionen u_n:

$$\Psi = \sum_n c_n u_n.$$

[1]) Handbuch für Physik, hrsg. v. Geiger u. Scheel, Band XXIV, 2. Aufl. Artikel 2, Abschnitt A, Nr. 15 u. 16.

Für die Feldstärke erhalten wir dann einen Ausdruck von der Form

$$\mathfrak{E} = \sum_{nm} c_n^* \, \mathfrak{E}_{nm} \, c_m .$$

Das Matrixelement $\mathfrak{E}_{nm}$ erhalte ich, indem ich in $\mathfrak{E}$ für Ψ^*, u_n^* und für Ψ, u_m einsetze. Die $\mathfrak{E}_{nm}$ sind Funktionen der Zeit und des Ortes; ich zerlege sie in folgender Weise nach FOURIER:

$$\mathfrak{E}_{nm} = \mathfrak{E}_{nm}^+ + \mathfrak{E}_{nm}^-$$

$$\mathfrak{E}_{nm}^+ = \sum_{\omega > 0} \mathfrak{F}_{nm}(\omega) \, e^{i\omega t}; \quad \mathfrak{E}_{nm}^- = \sum_{\omega > 0} \mathfrak{F}_{nm}(-\omega) \, e^{-i\omega t} .$$

Zwischen diesen Grössen bestehen die Beziehungen:

$$\mathfrak{F}_{nm}(-\omega) = (\mathfrak{F}_{mn}(\omega))^* \qquad \mathfrak{E}_{nm}^- = (\mathfrak{E}_{mn}^+)^*$$

$$\mathfrak{F}_{nm}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_{nm} \, e^{-i\omega t} \, dt .$$

Die Vorschrift besagt nun, dass $\mathfrak{E}^2$ ersetzt werden soll durch $2\,\mathfrak{E}^+\mathfrak{E}^-$, also:

$$\mathfrak{E}^2 \rightarrow 2\,\mathfrak{E}^+\,\mathfrak{E}^- = 2 \sum_{nm} c_n^* \left(\sum_l \mathfrak{E}_{nl}^+ \, \mathfrak{E}_{lm}^- \right) c_m .$$

Für den zeitlichen Mittelwert davon erhalte ich dann:

$$J \sim \overline{\mathfrak{E}^2} \rightarrow 2\,\overline{\mathfrak{E}^+\,\mathfrak{E}^-} = 2 \sum_{nm} c_n^* \left(\sum_l \sum_{\omega > 0} \mathfrak{F}_{nl}(\omega) \, \mathfrak{F}_{lm}(-\omega) \right) c_m .$$

Prof. PAULI untersuchte im oben erwähnten Abschnitt dann noch speziell die Kohärenz der emittierten Strahlung, allerdings ohne Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung und des Dopplereffektes. Die Ergebnisse seiner Berechnungen mögen hier noch kurz erwähnt werden. Es ergab sich als allgemeingültiges Resultat: Die Strahlung freier Atome kann nur dann kohärent sein, wenn der Ort des strahlenden Atoms entweder vor oder nach der Interferenzmessung hinreichend scharf definiert ist, und zwar muss der Ort bis auf Bruchteile einer Wellenlänge der gestrahlten Frequenz genau bekannt sein. Aus der Heisenberg'schen Ungenauigkeitsrelation folgt, dass eine Rückstossmessung, die scharf genug wäre, um die Ausstrahlungsrichtung des Lichtquants festzustellen, mit der Interferenzmessung unverträglich ist.

Bei der emittierten Strahlung sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1. Die *Strahlung zweier Atome.* Der Interferenzapparat gestattet hier die Strahlen, die an zwei verschiedenen Orten emittiert wurden, zu vereinigen und auf Interferenz zu prüfen. 2. Die

Strahlung eines Atoms in verschiedener Richtung. Hier ist der Apparat so beschaffen, dass er Licht vereinigt, das nach verschiedenen Richtungen hin emittiert wurde. Vereinigen soll sowohl Übereinstimmen der Richtungen der Strahlen, als auch Übereinstimmen der Polarisationsebenen heissen. Aus der Arbeit von Prof. Pauli ergibt sich: Die Strahlung zweier Atome ist bei spontaner Emission nie kohärent. Die Strahlung eines Atoms nach verschiedenen Richtungen ist dagegen selbst bei spontaner Emission kohärent.

I. Teil.

Mit denselben Methoden und Vernachlässigungen wie sie Prof. Pauli benutzte, soll nun im ersten Teil dieser Arbeit die *gestreute Strahlung* in bezug auf Kohärenz untersucht werden.

Das Matrixelement der Feldstärke für ein Atom hat für die gestreute Strahlung folgende Gestalt:

$$\mathfrak{E}_{nm} = \frac{\mathfrak{U}^{+}_{nm}}{R} e^{i(\nu_{nm}+\nu)\left(t-\frac{R}{c}\right)} + \frac{\mathfrak{U}^{\circ}_{nm}}{R} e^{i\nu_{nm}\left(t-\frac{R}{c}\right)} + \frac{\mathfrak{U}^{-}_{nm}}{R} e^{i(\nu_{nm}-\nu)\left(t-\frac{R}{c}\right)}.$$

Hierin sind die $\mathfrak{U}_{nm}$ Matrixelemente, die die Ausstrahlung bestimmen und den Relationen genügen:

$$\mathfrak{U}^{-}_{nm} = (\mathfrak{U}^{+}_{mn})^{*} \qquad \mathfrak{U}^{\circ}_{nm} = (\mathfrak{U}^{\circ}_{mn})^{*}.$$

Sie sind ausserdem zeitunabhängig.

R ist der Lichtweg Atomschwerpunkt-Beobachter.

Für freie Atome ist das Matrixelement noch von den Koordinaten des Schwerpunktes abhängig:

$$\mathfrak{E}_{nm}(QQ') = \frac{\mathfrak{U}_{nm}}{R} e^{i\nu\frac{\mathfrak{r}_Q \mathfrak{n}}{c}} \delta(Q_- Q') e^{i\nu\left(t-\frac{R}{c}\right)}$$

wo $\mathfrak{r}_Q$ = Ortsvektor des Schwerpunktes, und $\mathfrak{n}$ = Einheitsvektor in der Beobachtungsrichtung.

1. Die Strahlung zweier Atome.

Wir wollen die Intensität der Strahlung berechnen an einer Stelle, die von zwei verschiedenen Atomen Licht empfängt. Die Durchrechnung zeigt, dass das Matrixelement der elektrischen Feldstärke die Gestalt hat:

$$\mathfrak{E}_{n\nu\, m\mu} = \delta_{\nu\mu}\mathfrak{E}_{nm} + \delta_{nm}\mathfrak{E}_{\nu\mu}.$$

Dabei beziehen sich die lateinischen Indizes auf die Quantenzahlen des ersten Atoms und die griechischen auf die des zweiten Atoms. Wir berechnen $\mathfrak{E}^+\mathfrak{E}^-$ und schreiben davon nur jene Glieder auf, die bei der Mittelung über t einen Beitrag liefern:

$$\mathfrak{E}^+\mathfrak{E}^- = \frac{1}{R_P^2}\sum_{nm} c_n^* \Bigg[\sum_{\substack{\nu_l \leqq \nu_n + \nu \\ \nu_l \leqq \nu_m + \nu}} \mathfrak{U}^+_{nl}\,\mathfrak{U}^-_{lm}\, e^{i\nu_{nm}\left(t-\frac{R_P}{c}\right)} \tag{1 a}$$

$$+ \sum_{\substack{\nu_l \leqq \nu_n \\ \nu_l \leqq \nu_m}} \mathfrak{U}^\circ_{nl}\,\mathfrak{U}^\circ_{lm}\, e^{i\nu_{nm}\left(t-\frac{R_P}{c}\right)} \tag{2 a}$$

$$+ \sum_{\substack{\nu_l \leqq \nu_n - \nu \\ \nu_l \leqq \nu_m - \nu}} \mathfrak{U}^-_{nl}\,\mathfrak{U}^+_{ln}\, e^{i\nu_{nm}\left(t-\frac{R_P}{c}\right)} \Bigg] c_m \tag{3 a}$$

$$+ \frac{1}{R^2}\sum_{\nu\mu} c_\nu^* \Bigg[\sum_{\substack{\nu_\lambda \leqq \nu_\nu + \nu \\ \nu_\lambda \leqq \nu_\mu + \nu}} \mathfrak{U}^+_{\nu\lambda}\,\mathfrak{U}^-_{\lambda\mu}\, e^{i\nu_{\nu\mu}\left(t-\frac{R_{II}}{c}\right)} \tag{1 \alpha}$$

$$+ \sum_{\substack{\nu_\lambda \leqq \nu_\nu \\ \nu_\lambda \leqq \nu_\mu}} \mathfrak{U}^\circ_{\nu\lambda}\,\mathfrak{U}^\circ_{\lambda\mu}\, e^{i\nu_{\nu\mu}\left(t-\frac{R_{II}}{c}\right)} \tag{2 \alpha}$$

$$+ \sum_{\substack{\nu_\lambda \leqq \nu_\nu - \nu \\ \nu_\lambda \leqq \nu_\mu - \nu}} \mathfrak{U}^-_{\nu\lambda}\,\mathfrak{U}^+_{\lambda\mu}\, e^{i\nu_{\nu\mu}\left(t-\frac{R_{II}}{c}\right)} \Bigg] c_\mu \tag{3 \alpha}$$

$$+ \frac{1}{R_P R_{II}} \sum_{\substack{\nu_n \geqq \nu_m - \nu \\ \nu_\mu > \nu_\nu - \nu}} \Bigg(c_n^* c_\nu^*\, \mathfrak{U}^+_{nm}\,\mathfrak{U}^-_{\nu\mu}\, c_m c_\mu\, e^{i\left[(\nu_{nm}+\nu_{\nu\mu})t-(\nu_{nm}+\nu)\frac{R_P}{c}-(\nu_{\nu\mu}-\nu)\frac{R_{II}}{c}\right]}$$

$$+ c_m^* c_\mu^*\, \mathfrak{U}^+_{\mu\nu}\,\mathfrak{U}^-_{mn}\, c_n\, c_\nu\, e^{-i[\ldots]}\Bigg) \tag{4}$$

$$+ \frac{1}{R_P R_{II}} \sum_{\substack{\nu_n \geqq \nu_m \\ \nu_\mu > \nu_\nu}} \Bigg(c_n^* c_\nu^*\, \mathfrak{U}^\circ_{nm}\,\mathfrak{U}^\circ_{\nu\mu}\, c_m c_\mu\, e^{i\left[(\nu_{nm}+\nu_{\nu\mu})t-\nu_{nm}\frac{R_P}{c}-\nu_{\nu\mu}\frac{R_{II}}{c}\right]}$$

$$+ c_m^* c_\mu^*\, \mathfrak{U}^\circ_{\mu\nu}\,\mathfrak{U}^\circ_{mn}\, c_n\, c_\nu\, e^{-i[\ldots]}\Bigg) \tag{5}$$

$$+ \frac{1}{R_P R_{II}} \sum_{\substack{\nu_n \geqq \nu_m + \nu \\ \nu_\mu > \nu_\nu + \nu}} \Bigg(c_n^* c_\nu^*\, \mathfrak{U}^-_{nm}\,\mathfrak{U}^+_{\nu\mu}\, c_m c_\mu\, e^{i\left[(\nu_{nm}+\nu_{\nu\mu})t-(\nu_{nm}-\nu)\frac{R_P}{c}-(\nu_{\nu\mu}+\nu)\frac{R_{II}}{c}\right]}$$

$$+ c_m^* c_\mu^*\, \mathfrak{U}^-_{\mu\nu}\,\mathfrak{U}^+_{mn}\, c_n\, c_\nu\, e^{-i[\ldots]}\Bigg). \tag{6}$$

Alle andern Kombinationen der $\mathfrak{U}$ geben bei der Mittelung keinen Beitrag. Wenn wir mitteln, bleiben überall nur jene Glie-

der stehen, für die $\nu_n = \nu_m$, $\nu_\nu = \nu_\mu$ oder $\nu_{nm} = \nu_{\mu\nu}$ ist. Die Atome sollen nun als gleichartig angenommen werden: $\mathfrak{U}_{nm} = \mathfrak{U}_{\nu\mu}$, ausserdem soll vorerst von Entartung abgesehen werden. Ich ändere jetzt die Bezeichnung und schreibe alle Grössen, die sich auf das zweite Atom beziehen, mit einem Akzent.

Ich behandle zunächst die Ramanstrahlung. Aus den Gliedern $1\,a$, $1\,\alpha$ und 4 erhalte ich die Intensität der Frequenz $\nu_{nm} + \nu$:

$$J(\nu_{nm}+\nu) = \mathfrak{U}^+_{nm}\,\mathfrak{U}^-_{mn}\left(\frac{c_n^* c_n}{R^2} + \frac{c_n'^* c_n'}{R'^2}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{R\,R'}\,c_n^* c_m'^*\, e^{-i(\nu_{nm}+\nu)\frac{R-R'}{c}}\, c_n' c_m + \frac{1}{R\,R'}\,c_m^* c_n'^*\, e^{i(\nu_{nm}+\nu)\frac{R-R'}{c}}\, c_m' c_n\right).$$

Wir führen die Abkürzungen ein:

$$c_n = c_n\, e^{-i\delta_n}, \quad \delta_n - \delta_m = \delta_{nm}, \quad \Delta = \frac{R-R'}{c}.$$

Damit wird

$$J(\nu_{nm}+\nu) =$$
$$\mathfrak{U}^+_{nm}\,\mathfrak{U}^-_{mn}\left[\frac{|c_n|^2}{R^2} + \frac{|c_n'|^2}{R'^2} + \frac{2}{R\,R'}\,|c_n||c_m||c_n'||c_m'|\cos\delta_{nm} - \delta'_{nm} - (\nu_{nm}+\nu)\Delta\right].$$

In analoger Weise bilden wir aus den Gliedern $2\,a$, 2α und 5 die Intensität der Frequenz ν_{nm}:

$$J(\nu_{nm}) =$$
$$|\mathfrak{U}^\circ_{nm}|^2\left[\frac{|c_n|^2}{R^2} + \frac{|c_n'|^2}{R'^2} + \frac{2}{R\,R'}\,|c_n||c_m||c_n'||c_m'|\cos(\delta_{nm} - \delta'_{nm} - \nu_{nm}\Delta)\right]$$

und aus $3\,a$, $3\,\alpha$ und 6 die der Frequenz $\nu_{nm} - \nu$

$$J(\nu_{nm}-\nu) =$$
$$|\mathfrak{U}^-_{nm}|^2\left[\frac{|c_n|^2}{R^2} + \frac{|c_n'|^2}{R'^2} + \frac{2}{R\,R'}\,|c_n||c_m||c_n'||c_m'|\cos(\delta_{nm} - \delta'_{nm} - (\nu_{nm}-\nu)\Delta)\right].$$

In allen drei Ausdrücken treten im Cosinus als Argument Phasen $\delta_{nm} - \delta'_{nm}$ auf, die unbestimmt sind und die bewirken, dass das Mass der Kohärenz verschwindet. Es tritt also keine Interferenz auf. Die Ramanstrahlung ist nicht kohärent.

Wichtig ist nun noch der Ausdruck für die Intensität der eigentlichen Streustrahlung (Strahlung der Frequenz ν). Um diesen zu bilden, gehen wir zweckmässigerweise wieder zu unsern frühern Bezeichnungen über. Aus den Gliedern $1\,a$, $1\,\alpha$ und 4 erhalten wir, wenn wir $m = n = l$ und $\mu = \nu = \lambda$ setzen und über n und ν summieren, den gesuchten Ausdruck

$$J(\nu) = \sum_n \frac{|c_n|^2}{R_P^2} |\mathfrak{U}_{nn}^+|^2 + \sum_\nu \frac{|c_\nu|^2}{R_H^2} |\mathfrak{U}_{\nu\nu}|^2$$
$$+ \sum_{n\nu} \frac{|c_n|^2 |c_\nu|^2}{R_P R_H} (\mathfrak{U}_{nn}^+ \mathfrak{U}_{\nu\nu}^- e^{-i\nu\Delta} + \mathfrak{U}_{\nu\nu}^+ \mathfrak{U}_{nn}^- e^{i\nu\Delta}).$$

Mit den Abkürzungen

$$\mathfrak{U}_{nn}^+ = |\mathfrak{U}_{nn}|\, e^{if_{nn}}, \quad \mathfrak{U}_{\nu\nu}^+ = |\mathfrak{U}_{\nu\nu}|\, e^{if_{\nu\nu}}$$

wird dies:

$$J(\nu) = \sum_n \frac{|c_n|^2}{R_P^2} |\mathfrak{U}_{nn}|^2 + \sum_\nu \frac{|c_\nu|^2}{R_H^2} |\mathfrak{U}_{\nu\nu}|^2$$
$$+ 2 \sum_{n\nu} \frac{|c_n|^2 |c_\nu|^2}{R_P R_H} |\mathfrak{U}_{nn}||\mathfrak{U}_{\nu\nu}| \cos(-\nu\Delta + f_{nn} - f_{\nu\nu}).$$

Die $\mathfrak{U}_{nn}$ und $\mathfrak{U}_{\nu\nu}$ hängen von $u_n u_n^*$ und $u_\nu u_\nu^*$ ab. Sie enthalten daher keine unbestimmten Phasen. Es ist $f_{nn} - f_{\nu\nu}$ eine feste Differenz für bestimmte n und ν. Hier erhalten wir also Interferenz, und zwar sogar für verschiedene Atome. Das Mass für die Kohärenz ist:

$$D = \frac{2\sqrt{\left[\sum_{n\nu} |c_n|^2 |c_\nu|^2 |\mathfrak{U}_{nn}||\mathfrak{U}_{\nu\nu}| \cos(f_{\nu\nu} - f_{nn})\right]^2 + \left[\mathrm{B}\right]^2}}{R_P R_H \left(\sum_n \frac{|c_n|^2}{R_P^2} |\mathfrak{U}_{nn}|^2 + \sum_\nu \frac{|c_\nu|^2}{R_H^2} |\mathfrak{U}_{\nu\nu}|^2\right)}$$

$$\mathrm{B} = \sum_{n\nu} |c_n|^2 |c_\nu|^2 |\mathfrak{U}_{nn}||\mathfrak{U}_{\nu\nu}| \sin(f_{\nu\nu} - f_{nn}).$$

Daraus geht hervor, dass die Kohärenz schlecht wird, wenn viele verschiedene Zustände vorkommen.

Entartung: Wir haben bisher von der Entartung abgesehen; nun wollen wir auch diese berücksichtigen. Die Quantenzahlen im entarteten Fall werden wir durch einen einfachen Index bezeichnen, die der Entartung setzen wir als zweiten Index zu dem ersten. Es soll also $\nu_{n_i m_j} = \nu_{nm}$ sein für alle i und j. Das Matrixelement hat jetzt die Gestalt:

$$\mathfrak{E}_{n_i m_j} = \frac{\mathfrak{U}_{n_i m_j}^+}{R} e^{i(\nu_{nm} + \nu)\left(t - \frac{R}{c}\right)} + \ldots$$

Bei der Berechnung der Intensitäten können wir nun nur auf die Formeln (1—6) zurückgreifen. Da die Ramanstrahlung nicht kohärent ist, werden wir diese hier nicht weiter verfolgen, sondern untersuchen nur die eigentliche Streustrahlung. Wir erhalten:

$$J(\nu) = \frac{1}{R_P^2} \sum_n \sum_{rks} c^*_{n_r} \mathfrak{U}^+_{n_r n_k} \mathfrak{U}^-_{n_k n_s} c_{n_s}$$

$$+ \frac{1}{R_H^2} \sum_\nu \sum_{\varrho\varkappa\sigma} c^*_{\nu_\varrho} \mathfrak{U}^+_{\nu_\varrho \nu_\varkappa} \mathfrak{U}^-_{\nu_\varkappa \nu_\sigma} c_{\nu_\sigma}$$

$$+ \frac{1}{R_P R_H} \sum_{n\nu} \sum_{rs\varrho\sigma} \Big(c^*_{n_r} c^*_{\nu_\varrho} \mathfrak{U}^+_{n_r n_s} \mathfrak{U}^-_{\nu_\varrho \nu_\sigma} c_{n_s} c_{\nu_\sigma} e^{-i\nu \frac{R_P - R_H}{c}}$$

$$+ c^*_{n_s} c^*_{\nu_\sigma} \mathfrak{U}^+_{\nu_\sigma \nu_\varrho} \mathfrak{U}^-_{n_s n_r} c_{n_r} c_{\nu_\varrho} e^{+i\nu \frac{R_P - R_H}{c}} \Big).$$

Nach dem Mitteln über viele Atome bleiben noch die Glieder stehen:

$$J(\nu) = \frac{1}{R_P^2} \sum_n \sum_{rk} |c_{n_r}|^2 \, |\mathfrak{U}_{n_r n_k}|^2$$

$$+ \frac{1}{R_H^2} \sum_\nu \sum_{\varrho k} |c_{\nu_\varrho}|^2 \, |\mathfrak{U}_{\nu_\varrho \nu_k}|^2$$

$$+ \frac{2}{R_P R_H} \sum_{n\nu} \sum_{r\varrho} |c_{n_r}|^2 \, |c_{\nu_\varrho}|^2 \, |\mathfrak{U}_{n_r n_r}| |\mathfrak{U}_{\nu_\varrho \nu_\varrho}| \cos(-\nu \Delta + f_{n_r n_r} - f_{\nu_\varrho \nu_\varrho}).$$

Das Mass der Kohärenz wird hier:

$$D = \frac{2 \sqrt{\Big[\sum_{n\nu} \sum_{r\varrho} |c_{n_r}|^2 \, |c_{\nu_\varrho}|^2 \, |\mathfrak{U}_{n_r n_r}| \, |\mathfrak{U}_{\nu_\varrho \nu_\varrho}| \cos(f_{n_r n_r} - f_{\nu_\varrho \nu_\varrho}) \Big]^2 + \Big[\mathrm{B} \Big]^2}}{R_P R_H \Big(\frac{1}{R_P^2} \sum_n \sum_{rk} |c_{n_r}|^2 \, |\mathfrak{U}_{n_r n_k}|^2 + \frac{1}{R_H^2} \sum_\nu \sum_{\varrho\varkappa} |c_{\nu_\varrho}|^2 \, |\mathfrak{U}_{\nu_\varrho \nu_\varkappa}|^2 \Big)}$$

$$\mathrm{B} = \sum_{n\nu} \sum_{r\varrho} |c_{n_r}|^2 \, |c_{\nu_\varrho}|^2 |\mathfrak{U}_{n_r n_r}| |\mathfrak{U}_{\nu_\varrho \nu_\varrho}| \sin(f_{n_r n_r} - f_{\nu_\varrho \nu_\varrho}).$$

Wenn wir diese Grösse D mit derjenigen im nichtentarteten Fall vergleichen, so sehen wir, dass diese immer kleiner sein wird als jene. Es treten ja hier im Nenner noch Zusatzglieder ($\mathfrak{U}_{n_r n_k}$, $k \neq r$) auf, die im Zähler nicht erscheinen. Die Entartung bewirkt also allgemein eine Verschlechterung der Kohärenz.

Hierzu soll ein Beispiel zur Illustration dienen. Wir betrachten die Richtungsentartung. Beide Atome sollen von gleicher Art sein ($\mathfrak{U}_{\nu_\varrho \nu_\varkappa} = \mathfrak{U}_{n_r n_k}$); sie seien im Grundzustand und haben je einen

gesamten Drehimpuls, der zur Quantenzahl $j = \frac{1}{2}$ gehört. Die Quantenzahl der Entartung m (die magnetische Quantenzahl) kann hier nur die Werte $m = \frac{1}{2}$ und $m = -\frac{1}{2}$ annehmen. Der Einfachheit halber schreiben wir statt $\pm\frac{1}{2}$ bloss $+$ oder $-$. Ausserdem wollen wir annehmen, die Phasen $f_{n_r n_r} - f_{\nu_\varrho \nu_\varrho}$ seien alle null. Ferner handle es sich in unserem Fall um „natürliche Anregung", also $c_{n-} = c_{n+} = c_{\nu-} = c_{\nu+} = c$. Die Spektroskopie lehrt, dass die $\mathfrak{U}$ folgenden Proportionen genügen:

$$|\mathfrak{U}_{n-n-}|^2 : |\mathfrak{U}_{n-n+}|^2 : |\mathfrak{U}_{n+n-}|^2 : |\mathfrak{U}_{n+n+}|^2 = 1:2:2:1.$$

Wir erhalten für D:

$$D = \frac{2\sqrt{c^4(1+1+1+1)^2 + c^4 \cdot 0}}{R_P R_{II}\left[\frac{c^2}{R_P^2}(1+2+2+1) + \frac{c^2}{R_{II}^2}(1+2+2+1)\right]} =$$

$$D = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\, R_P \cdot R_{II}^2}{R_P^2 + R_{II}^2}.$$

Im nichtentarteten Fall wäre:

$$D = \frac{2\, R_P \cdot R_{II}}{R_P^2 + R_{II}^2}.$$

Würden wir noch die Phasen berücksichtigen, so wäre D im nichtentarteten Fall noch kleiner.

Die Strahlung eines Atoms nach verschiedenen Richtungen wurde bereits von Prof. Pauli in solcher Allgemeinheit behandelt, dass es hier nicht nötig ist wieder darauf zurückzukommen. Dagegen verdient folgender Fall noch Beachtung: Es wird gestreutes Licht mit der einfallenden Welle zur Interferenz gebracht.

2. *Die gestreute Strahlung und die einfallende Welle.*

Die elektrische Feldstärke der ebenen einfallenden Welle sei gegeben:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{F}^+ e^{i\nu\left(t - \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{r}}{c}\right)} + \mathfrak{F}^- e^{-i\nu\left(t - \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{r}}{c}\right)}$$

$\mathfrak{e}$ = Einheitsvektor in der Fortschreitungsrichtung der Welle.

$$\mathfrak{F}^- = (\mathfrak{F}^+)^* \qquad \mathfrak{e}\,\mathfrak{F} = 0.$$

Wir schreiben nun, um die Ausrechnungen von vorhin beibehalten zu können:

$$\mathfrak{E}_{n\nu m\mu} = \delta_{\nu\mu}\left[\frac{\mathfrak{U}^{+}_{nm}}{R} e^{i(\nu_{nm}+\nu)\left(t-\frac{R}{c}\right)} + \frac{\mathfrak{U}^{\circ}_{nm}}{R} e^{i\nu_{nm}\left(t-\frac{R}{c}\right)}\right.$$

$$\left. + \frac{\mathfrak{U}^{-}_{nm}}{R} e^{i(\nu_{nm}-\nu)\left(t-\frac{R}{c}\right)}\right] + \delta_{nm}\left(\mathfrak{F}^{+} e^{i\nu\left(t-\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{r}}{c}\right)} + \mathfrak{F}^{-} e^{-i\nu\left(t-\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{r}}{c}\right)}\right).$$

Jetzt bilden wir den Ausdruck für die Intensität des Lichtes in einem Punkte, der von beiden Arten Licht empfängt, und zwar interessiert uns nur die der Frequenz ν

$$J(\nu) = \sum_n \frac{|\mathfrak{U}^{+}_{nn}|^2}{R^2} |c_n|^2 + \mathfrak{F}^{+}\mathfrak{F}^{-} + 2\sum_n \frac{|c_n|^2}{R} |\mathfrak{U}^{+}_{nn}||\mathfrak{F}| \cos(-\nu\Delta + f_{nn} - f)$$

wo

$$\mathfrak{U}^{+}_{nn} = |\mathfrak{U}_{nn}| e^{if_{nn}}, \quad \mathfrak{F}^{+} = |\mathfrak{F}| e^{if}, \quad \Delta = \frac{R - \mathfrak{e}\mathfrak{r}}{c}$$

gesetzt wurde.

Das Mass der Kohärenz ist:

$$D = \frac{2R\sqrt{\left[\sum_n |c_n|^2 |\mathfrak{U}_{nn}||\mathfrak{F}| \cos(f_{nn}-f)\right]^2 + \left[\sum_n |c_n||^2 \mathfrak{U}_{nn}||\mathfrak{F}| \sin(f_{nn}-f)\right]^2}}{\sum_n |c_n|^2 |\mathfrak{U}_{nn}|^2 + R^2 \mathfrak{F}^{+}\mathfrak{F}^{-}}$$

Liegt Entartung vor, so erhalten wir:

$$J(\nu) = \sum_n \sum_{rk} \frac{|\mathfrak{U}_{n_r n_k}|^2}{R^2} |c_{n_r}|^2 + \mathfrak{F}^{+}\mathfrak{F}^{-}$$

$$+ 2\sum_n \sum_r \frac{|c_{n_r}|^2}{R} |\mathfrak{U}_{n_r n_r}||\mathfrak{F}| \cos(-\nu\Delta + f_{n_r n_r} - f)$$

und

$$D = \frac{2R\sqrt{\left[\sum_n \sum_r |c_{n_r}|^2 |\mathfrak{U}_{n_r n_r}| |\mathfrak{F}| \cos(f_{n_r n_r} - f)\right]^2 + \left[\mathrm{B}\right]^2}}{\sum_n \sum_{rk} |c_{n_r}|^2 |\mathfrak{U}_{n_r n_k}|^2 + R^2 \mathfrak{F}^{+}\mathfrak{F}^{-}}$$

$$\mathrm{B} = \sum_n \sum_r |c_{n_r}|^2 |\mathfrak{U}_{n_r n_r}||\mathfrak{F}| \sin(f_{n_r n_r} - f)$$

Die Mittelung über viele Atome ist in allen diesen Formeln schon ausgeführt. Aus den Ausdrücken für das Mass der Kohärenz ersieht man, dass die einfallende Welle mit der gestreuten Strahlung kohärent ist; es sei denn, die Phasen $f_{n_r n_r} - f$ liegen zufälligerweise so, dass die Glieder unter der Wurzel verschwinden, was sehr unwahrscheinlich ist.

Physikalisch bedeutsam ist nun dies: Wir haben oben gesehen, dass die eigentliche Streustrahlung zweier Atome kohärent ist; die gestreuten Wellen zweier Atome werden sich also in bekannter Weise superponieren. Es wird sich aber auch die gestreute Welle mit der einfallenden Welle zusammensetzen. Die gestreute Strahlung verhält sich also genau so wie die Huygen'schen Elementarwellen, sie wird sich daher in einem Strahl vereinigen, der die Fortsetzung des Primärstrahls ist. Bei der Ramanstrahlung werden wir dies nicht erwarten dürfen, da diese ja nicht kohärent ist.

II. Teil.

Im zweiten Teil dieser Arbeit sollen nun noch spezielle Fälle untersucht werden, mit Berücksichtigung der Strahlungsdämpfung und des Dopplereffektes.

A. Die emittierte Strahlung.

1. Einführung.

Die Dämpfung entsteht bekanntlich dadurch, dass das vom Atom selbst erzeugte Strahlungsfeld auf dieses zurückwirkt. Die emittierte wie auch die gestreute Strahlung ist dann nicht mehr rein monochromatisch; die Spektrallinien besitzen eine endliche natürliche Breite. Herr Casimir hat in einer Arbeit, die in der Zeitschrift für Physik, Bd. 81, S. 496, erschienen ist, für einige spezielle Fälle die natürliche Linienbreite berechnet. Ich entnehme dieser Arbeit den Ausdruck für das Matrixelement der Feldstärke für ein Atom, das zur Zeit $t = 0$ zu strahlen anfängt und sich im ersten angeregten Zustand befindet.

$$\mathfrak{E}_{10} = \frac{\mathfrak{U}_{10}}{R}\, e^{-(\Gamma - i\nu_{10})\left(t - \frac{R}{c}\right)}.$$

Hierin ist $\mathfrak{U}_{10}$ das Matrixelement, das die Ausstrahlung bestimmt; für lange Wellen gilt: $\mathfrak{U}_{10} = \mathfrak{D}_{10}$ = Dipolmoment zur Zeit $t = 0$. Γ ist die Dämpfungskonstante:

$$\Gamma = |\mathfrak{D}_{10}|^2 \frac{1}{6\pi h}\left(\frac{\nu_{10}}{c}\right)^3.$$

Um nun aus dem Matrixelement $\mathfrak{E}_{10}$ die Intensität der Aus-

strahlung zu berechnen, müssen wir, wie im I. Teil dargelegt wurde, $\mathfrak{E}_{10}$ nach FOURIER zerlegen.

$$\mathfrak{E}_{10}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \mathfrak{F}_{10}(\omega)\, e^{i\omega t}\, d\omega + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \mathfrak{F}_{10}(-\omega)\, e^{-i\omega t}\, d\omega.$$

Die Intensität der Strahlung eines Atoms, das sich zur Zeit $t = 0$ im Zustand 1 befindet, ist dann gegeben durch:

$$J = \int_0^\infty \mathfrak{F}_{10}(\omega)\, \mathfrak{F}_{01}(-\omega)\, d\omega.$$

Aus der Fourier'schen Integralformel geht hervor:

$$\mathfrak{F}_{10}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{E}_{10}(t)\, e^{-i\omega t}\, dt.$$

Nun fängt das Atom erst zur Zeit $t = 0$ zu strahlen an. $\mathfrak{E}_{10}(t, R)$ ist also null für alle $t < \frac{R}{c}$, so dass sich für $\mathfrak{F}_{10}(\omega)$ ergibt:

$$\mathfrak{F}_{10}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{t=\frac{R}{c}}^{\infty} \mathfrak{E}_{10}(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathfrak{U}_{10}}{R} \frac{e^{-i\omega\frac{R}{c}}}{\Gamma + i(\omega - \nu_{10})}.$$

Allgemein gilt

$$\mathfrak{F}_{01}(-\omega) = (\mathfrak{F}_{10}(\omega))^*.$$

Für freie Atome erhalten wir wie früher:

$$\mathfrak{E}_{10}(t\, Q\, Q') = \frac{\mathfrak{U}_{10}}{R}\, e^{(i\nu_{10}-\Gamma)\left(t-\frac{R}{c}+\frac{\mathfrak{r}_Q \mathfrak{n}}{c}\right)}\, \delta(Q - Q')$$

und

$$\mathfrak{F}_{10}(\omega\, Q\, Q') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathfrak{U}_{10}}{R} \frac{e^{-i\omega\left(\frac{R}{c}-\frac{\mathfrak{r}_Q \mathfrak{n}}{c}\right)}}{\Gamma + i(\omega - \nu'_{10})}\, \delta(Q - Q')$$

mit

$$\nu'_{10} = \nu_{10}\left(1 + \frac{\mathfrak{v}}{c}\,\mathfrak{n}\right) \quad \text{(Dopplereffekt)}.$$

2. *Zur Berechnung der Intensität im Aufpunkte.*

Bei der Bildung der Intensität werden wir immer wieder auf das Integral:

$$J = \int_0^\infty \frac{e^{i\omega\Delta}\, d\omega}{[\Gamma + i(\omega - \nu)]\,[\Gamma' - i(\omega - \nu)]}$$

stossen.

Wir wollen daher hier einige allgemeine Betrachtungen darüber vorausschicken.

Ist $\Delta \neq 0$, so lässt sich das Integral nicht explizite streng lösen. In unsern Fällen aber, wo $\frac{\nu}{\Gamma}, \frac{\nu'}{\Gamma'}$ sehr gross sind, kann man folgendermassen vorgehen:

Wir betrachten das Integral

$$\mathfrak{J} = \int \frac{e^{\Delta z}\, dz}{[z - C]\,[z - C']}$$

in der komplexen Ebene. Die C sollen folgende Zahlen bedeuten:

$$\begin{aligned} C &= -\Gamma + i\nu \\ C' &= \Gamma' + i\nu' \end{aligned} \qquad \Gamma, \Gamma', \nu, \nu' \text{ pos. reell.}$$

Wir integrieren längs der imaginären Achse und, wenn Δ pos. um die linke Halbebene, wenn Δ neg. um die rechte Halbebene. Nach dem Integralsatz von Cauchy ist das Integral

$$\mathfrak{J}^+ = 2\pi i \frac{e^{\Delta C}}{C - C'}, \qquad \text{wenn } \Delta > 0$$

$$\mathfrak{J}^- = -2\pi i \frac{e^{\Delta C'}}{C' - C}, \qquad \text{wenn } \Delta < 0.$$

Die Durchrechnung zeigt, dass das Integral über den Halbkreis gegen null geht, wenn der Radius dieses Kreises nach ∞ strebt; ausserdem zeigt sich, dass für unsern Fall, wo ν und ν' sehr gross sind, der Beitrag der neg. imaginären Achse vernachlässigt werden darf. Der Hauptbeitrag zu unserem Integral kommt von der positiven imaginären Achse her.

$$\mathfrak{J} \sim \int_0^\infty \frac{e^{i\Delta y}\, i\, dy}{(iy - C)\,(iy - C')}.$$

Dies ist aber genau das $-i$-fache unseres ursprünglichen Integrals; so dass wir schreiben dürfen, wenn wir unter Δ jetzt den absoluten Betrag verstehen:

$$J_+ = \int_0^\infty \frac{e^{i\Delta\omega}\, d\omega}{[\Gamma + i(\omega - \nu)][\Gamma' - i(\omega - \nu')]} \sim 2\pi \frac{e^{-\Delta\Gamma + i\Delta\nu}}{\Gamma + \Gamma' + i(\nu' - \nu)}$$

$$J_- = \int_0^\infty \frac{e^{-i\Delta\omega}\, d\omega}{[\Gamma + i(\omega - \nu)][\Gamma' - i(\omega - \nu')]} \sim 2\pi \frac{e^{-\Delta\Gamma' - i\Delta\nu'}}{\Gamma + \Gamma' + i(\nu' - \nu)}.$$

Wie die direkte Rechnung zeigt, dürfen wir diese Formeln auch verwenden für $\Delta = 0$

$$J_0 = \int_0^\infty \frac{d\omega}{[\Gamma + i(\omega - \nu)][\Gamma' - i(\omega - \nu')]} \sim 2\pi \frac{1}{\Gamma + \Gamma' + i(\nu' - \nu)}.$$

Für unsere weiteren Rechnungen ist es bequem, die Abkürzung

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\nu - \nu'}{\Gamma + \Gamma'}$$

einzuführen, damit lassen sich die Integrale schreiben:

$$J_+ = \frac{2\pi}{\Gamma + \Gamma'} \cos\varphi\, e^{-\Delta\Gamma + i(\Delta\nu + \varphi)}$$

$$J_0 = \frac{2\pi}{\Gamma + \Gamma'} \cos\varphi\, e^{i\varphi}$$

$$J_- = \frac{2\pi}{\Gamma + \Gamma'} \cos\varphi\, e^{-\Delta\Gamma' - i(\Delta\nu' - \varphi)}.$$

3. *Die emittierte Strahlung zweier Atome.*

a) *Feste Atome.* Wie oben, bezeichnen wir alle Grössen des einen Atoms ohne Akzent, die des andern Atoms mit Akzent. R und R' seien die Abstände der Atome vom Aufpunkt; wir wollen annehmen $R > R'$. Die Atome sollen gleichartig sein. Es ist dann:

$$\mathfrak{F}_{10}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathfrak{U}_{10}}{R} \frac{e^{-i\omega\frac{R}{c}}}{\Gamma + i(\omega - \nu_{10})}$$

$$\mathfrak{F}_{10}'(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathfrak{U}_{10}}{R'} \frac{e^{-i\omega\frac{R'}{c}}}{\Gamma + i(\omega - \nu_{10})}$$

$$\mathfrak{F}_{01}(-\omega) = (\mathfrak{F}_{10}(\omega))^* \qquad \mathfrak{F}_{01}'(-\omega) = (\mathfrak{F}_{10}'(\omega))^*$$

Die Intensität im Aufpunkt berechnet sich nach der Formel

$$J = \int_0^\infty d\omega \,[\, c_1^* \mathfrak{F}_{10}(\omega)\mathfrak{F}_{01}(-\omega) c_1 + c_1'^* \mathfrak{F}'_{10}(\omega)\mathfrak{F}'_{01}(-\omega) c_1'$$

$$+ c_1^* c_0'^* \mathfrak{F}_{10}(\omega)\mathfrak{F}'_{01}(-\omega) c_1' c_0 + c_1'^* c_0^* \mathfrak{F}'_{10}(\omega)\mathfrak{F}'_{01}(-\omega) c_0' c_1].$$

Wenn wir die Grössen von oben einsetzen und über ω integrieren, so ergibt sich mit

$$\Delta = \frac{R - R'}{c} > 0; \qquad c_k = |c_k| e^{-i\delta_k}$$

$$J = \frac{|\mathfrak{U}_{10}|^2}{2\Gamma}\left[\frac{|c_1|^2}{R^2} + \frac{|c_1'|^2}{R'^2} + \frac{2 e^{-\Delta\Gamma}}{R R'} |c_1||c_0||c_1'||c_0'| \cos(\Delta \nu_{10} - \delta_{10} + \delta'_{10})\right].$$

Wenn zwischen δ_{10} und δ'_{10} eine feste Beziehung besteht, was im allgemeinen nicht der Fall sein dürfte, so haben wir hier Kohärenz, und das Mass der Kohärenz ist:

$$D = \frac{2 e^{-\Delta\Gamma}}{R R'} \frac{|c_1||c_0||c_1'||c_0'|}{\frac{|c_1|^2}{R^2} + \frac{|c_1'|^2}{R'^2}}.$$

Das Mass der Kohärenz nimmt exponentiell mit der Differenz der Lichtwege ab, für einige Meter Wegdifferenz fällt es auf den e-ten Teil. Man nennt $R - R' = \frac{c}{\Gamma}$ die Kohärenzlänge.

b) *Freie Atome.* Die Matrixelemente sind hier:

$$\mathfrak{F}_{10}(\omega Q_1 Q_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathfrak{U}_{10}}{R} \frac{e^{-i\omega\left(\frac{R}{c} - \frac{\mathfrak{r}_Q \mathfrak{n}}{c}\right)}}{\Gamma + i(\omega - \nu_{10})} \delta(Q_1 - Q_2)$$

$$\mathfrak{F}'_{10}(\omega Q_1' Q_2') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\mathfrak{U}_{10}}{R'} \frac{e^{-i\omega\left(\frac{R'}{c} - \frac{\mathfrak{r}'_Q \mathfrak{n}'}{c}\right)}}{\Gamma + i(\omega - \nu'_{10})} \delta(Q_1' - Q_2')$$

$$\mathfrak{F}_{01}(-\omega Q_1 Q_2) = (\mathfrak{F}_{10}(\omega Q_1 Q_2))^*$$

Wir berücksichtigen den Dopplereffekt $\nu_{10} \neq \nu'_{10}$, und zwar ist $\nu_{10} - \nu'_{10} = (\mathfrak{n}\mathfrak{v} - \mathfrak{n}'\mathfrak{v}')\frac{\nu_{10}}{c}$, wo $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ die Geschwindigkeiten der Atome bedeuten. Wir bilden:

$$J(\nu_{10}) = \int d\omega \Big[\int c_1^*(Q_1)\mathfrak{F}_{10}(\omega Q_1 Q'')\mathfrak{F}_{01}(-\omega Q'' Q_2) dQ'' c_1(Q_2) dQ_1 dQ_2$$

$$+ \int c_1'(Q_1)\mathfrak{F}'_{10}(\omega Q_1 Q'')\mathfrak{F}'_{01}(-\omega Q'' Q_2) dQ'' c_1'(Q_2) dQ_1 dQ_2$$

$$+ \int c_1^*(Q_1) c_0'^*(Q_1')\mathfrak{F}_{10}(\omega Q_1 Q_2)\mathfrak{F}'_{01}(-\omega Q_1' Q_2') c_1'(Q_2') c_0(Q_2) dQ_1 dQ_2 dQ_1' dQ_2'$$

$$+ \int c_0^*(Q_1) c_1'^*(Q_1')\mathfrak{F}'_{10}(\omega Q_1' Q_2')\mathfrak{F}_{01}(-\omega Q_1 Q_2) c_1(Q_2) c_0'(Q_2') dQ_1 dQ_2 dQ_1' dQ_2'$$

Dies ergibt mit

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\nu_{10} - \nu'_{10}}{2\,\Gamma}$$

und

$$C_{10} = |C_{10}|\, e^{i\,\delta_{10}} = \int c_1^*\,(Q)\; e^{r_Q \frac{n}{c}\,(\Gamma + i\,\nu'_{10})}\; c_0\,(Q)\; d\,Q$$

$$C'_{10} = |C'_{10}|\, e^{i\,\delta'_{10}} = \int c_1'^*\,(Q)\; e^{r_Q \frac{n}{c}\,(\Gamma + i\,\nu'_{10})}\; c'_0\,(Q)\; d\,Q$$

$$J = \frac{|\mathfrak{U}_{10}|^2}{2\,\Gamma}\left[\frac{1}{R^2}\int |c_1\,(Q)|^2\; d\,Q + \frac{1}{R'^2}\int |c'_1\,(Q)|^2\; d\,Q\right.$$

$$\left. + \frac{2\cos\varphi\; e^{-\Delta\,\Gamma}}{R\,R'}\,|C_{10}||C'_{10}|\cos\left(-\Delta\,\nu'_{10} + \varphi + \delta_{10} - \delta'_{10}\right)\right].$$

Die Phasendifferenz $\delta_{10} - \delta'_{10}$ sei fest, damit lassen wir spontane Emission ausser Betracht. Dann ist das Mass der Kohärenz:

$$D = \frac{2\cos\varphi\; e^{-\Delta\,\Gamma}\,|C_{10}||C'_{10}|}{R\,R'\left(\frac{1}{R^2}\int |c_1\,(Q)|^2\; d\,Q + \frac{1}{R'^2}\int |c'_1\,(Q)|^2\; d\,Q\right)}.$$

Das Mass der Kohärenz verschwindet, wenn $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ ist, d. h. wenn $|\,\nu_{10} - \nu'_{10}\,|$ sehr gross ist. Für die Atome eines Gases kann φ alle Werte annehmen, die zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen. In diesem Fall haben wir noch über φ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ zu mitteln. Wir erhalten nach einer einfachen Rechnung:

$$J = \frac{|\mathfrak{U}_{10}|^2}{2\,\Gamma}\left[\frac{1}{R^2}\int |c_1\,(Q)|^2\; d\,Q + \frac{1}{R'^2}\int |c'_1\,(Q)|^2\; d\,Q\right.$$

$$\left. + \frac{1}{R\,R'}\,e^{-\Delta\,\Gamma}\,|C_{10}||C'_{10}|\cos\left(-\Delta\,\nu'_{10} + \delta_{10} - \delta'_{10}\right)\right].$$

$$D = \frac{e^{-\Delta\,\Gamma}\,|C_{10}||C'_{10}|}{R\,R'\left(\frac{1}{R^2}\int |c_1\,(Q)|^2\; d\,Q + \frac{1}{R'^2}\int |c'_1(Q)|^2\, d\,Q\right)}.$$

Die Kohärenz bleibt bestehen, allerdings ist sie, abgesehen vom Faktor $\cos\varphi$, schlechter geworden; das Mass der Kohärenz hat sich um die Hälfte verkleinert.

4. Die Strahlung eines Atoms in verschiedener Richtung.

Die Matrixelemente sind hier:

$$\mathfrak{F}_{10}(\omega\,\mathfrak{n}_1\,Q\,Q') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\mathfrak{U}_{10}(\mathfrak{n}_1)}{R}\,\frac{e^{-i\omega\left(\frac{R}{c}-\frac{\mathfrak{r}_Q\,\mathfrak{n}_1}{c}\right)}}{\Gamma + i\,(\omega - \nu_{10})}\,\delta\,(Q-Q')$$

$$\mathfrak{F}_{10}(\omega\,\mathfrak{n}_2\,Q\,Q') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\mathfrak{U}_{10}(\mathfrak{n}_2)}{R'}\,\frac{e^{-i\omega\left(\frac{R'}{c}-\frac{\mathfrak{r}_Q\,\mathfrak{n}_2}{c}\right)}}{\Gamma + i\,(\omega - \nu_{10}')}\,\delta\,(Q-Q').$$

Hier ist $\nu_{10} - \nu_{10}' = (\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2)\,\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\nu_{10}$. Die Abhängigkeit der Elemente von der Richtung der Ausstrahlung ist noch besonders hervorgehoben. Wie oben setzen wir

$$\Delta = \frac{R-R'}{c}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\mathfrak{n}_1 - \mathfrak{n}_2}{2\,\Gamma}\,\frac{\mathfrak{v}}{c}\,\nu_{10}, \quad \mathfrak{U}_{10}(\mathfrak{n}_1) = |\mathfrak{U}_{10}^1|e^{+i\delta_1}.$$

Damit bilden wir:

$$\begin{aligned} J = \int d\omega \Big[&\int c_1^*(Q)\,\mathfrak{F}_{10}(\omega\,\mathfrak{n}_1 Q Q'')\,\mathfrak{F}_{01}(-\omega\,\mathfrak{n}_1 Q'' Q')\,dQ''\,c_1(Q')\,dQ\,dQ' \\ &+ \int c_1^*(Q)\,\mathfrak{F}_{10}(\omega\,\mathfrak{n}_2 Q Q'')\,\mathfrak{F}_{01}(-\omega\,\mathfrak{n}_2 Q'' Q')\,dQ''\,c_1(Q')\,dQ\,dQ' \\ &+ \int c_1^*(Q)\,\mathfrak{F}_{10}(\omega\,\mathfrak{n}_1 Q Q'')\,\mathfrak{F}_{01}(-\omega\,\mathfrak{n}_2 Q'' Q')\,dQ''\,c_1(Q')\,dQ\,dQ' \\ &+ \int c_1^*(Q)\,\mathfrak{F}_{10}(\omega\,\mathfrak{n}_2 Q Q'')\,\mathfrak{F}_{01}(-\omega\,\mathfrak{n}_1 Q'' Q')\,dQ''\,c_1(Q')\,dQ\,dQ'. \end{aligned}$$

Nach der Integration über ω ergibt sich:

$$\begin{aligned} J = \frac{1}{2\,\Gamma}\Bigg[&\left(\frac{|\mathfrak{U}_{10}^1|^2}{R^2} + \frac{|\mathfrak{U}_{10}^2|^2}{R'^2}\right)\int |c_1(Q)|^2\,dQ \\ &+ 2\,\frac{|\mathfrak{U}_{10}^1||\mathfrak{U}_{10}^2|}{R\,R'}\cos\varphi\,e^{-\Delta\Gamma}\int |c_1(Q)|^2\,e^{\mathfrak{r}_Q\frac{\mathfrak{n}_1-\mathfrak{n}_2}{c}\Gamma}\cos\Big(-\Delta\,\nu + \varphi \\ &+ \mathfrak{r}_Q\,\frac{\mathfrak{n}_1-\mathfrak{n}_2}{c}\,\nu_{10} + \delta_1 - \delta_0\Big)\,dQ\Bigg]. \end{aligned}$$

Die Produkte $\mathfrak{U}_{10}(\mathfrak{n}_1)\,\mathfrak{U}_{01}(\mathfrak{n}_2)$ und $\mathfrak{U}_{10}(\mathfrak{n}_2)\,\mathfrak{U}_{01}(\mathfrak{n}_1)$ enthalten keine unbestimmten Phasen, da in ihnen die u_n nur in der Kombination $u_n u_n^*$ vorkommen. Nach der Mittelung über viele Atome

mit gleicher Geschwindigkeit werden wir für das Mass der Kohärenz erhalten:

$$D = \frac{2|\mathfrak{U}^1_{10}||\mathfrak{U}^2_{10}|\cos\varphi\, e^{-\Delta\Gamma}\sqrt{\left[\int dQ|c_1(Q)|^2 e^{\mathfrak{r}_Q\frac{n_1-n_2}{c}\Gamma}\cos\left(\varphi+\mathfrak{r}_Q\frac{n_1-n_2}{c}\nu_{10}+\delta_1-\delta_2\right)\right]^2+\left[\mathrm{B}\right]^2}}{R\,R'\int|c_1(Q)|^2\,dQ\left(\frac{|\mathfrak{U}^1_{10}|^2}{R^2}+\frac{|\mathfrak{U}^2_{10}|^2}{R'^2}\right)}$$

$$\mathrm{B} = \int|c_1(Q)|^2 e^{\mathfrak{r}_Q\frac{n_1-n_2}{c}\Gamma}\sin\left(\varphi+\mathfrak{r}_Q\frac{n_1-n_2}{c}\nu_{10}+\delta_1-\delta_2\right)dQ\,.$$

Wenn die Ausdehnung der c_i kleiner ist als $\frac{n_1-n_2}{c}\nu_{10}$, so kann D verschieden von null sein, andernfalls aber verschwinden die Glieder unter der Wurzel bei der Integration über Q. Das bedeutet nichts anderes als die Unverträglichkeit einer Rückstossbestimmung mit einer Interferenzmessung. Handelt es sich nun um Atome mit regelloser Geschwindigkeitsverteilung, so haben wir wieder über φ zu mitteln, die Kohärenz verschlechtert sich dabei um die Hälfte.

B. Die gestreute Strahlung.

5. *Einführung.*

Da wir in diesem Abschnitt die Dämpfung nicht vernachlässigen wollen, so ist es konsequent, der einfallenden Welle auch eine gewisse Breite zuzuschreiben; ihr Vektorpotential heisst dann also:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}^+ e^{(-\varepsilon+i\nu)\left(t-\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{e}}{c}\right)} + \mathfrak{a}^- e^{(-\varepsilon-i\nu)\left(t-\frac{\mathfrak{r}\mathfrak{e}}{c}\right)}.$$

Wir beschränken uns im folgenden darauf, das Atom zum Beginn der Störung im Grundzustand anzunehmen. Ausserdem soll durch die Störung nur der erste Zustand wesentlich angeregt werden. Das Matrixelement lautet dann, wie die Störungsrechnung zeigt:

$$\mathfrak{E}(t) = \frac{1}{R}\left(\mathfrak{U}^+_{00}\, e^{(i\nu-\varepsilon)\left(t-\frac{R}{c}\right)} + \mathfrak{U}_{10}\, e^{(i\nu_{10}-\Gamma)\left(t-\frac{R}{c}\right)}\right)$$

mit

$$\mathfrak{U}^-_{00} = (\mathfrak{U}^+_{00})^* \qquad \mathfrak{U}_{01} = (\mathfrak{U}_{10})^*.$$

Die Fourierzerlegung gibt nun:

$$\mathfrak{F}(\omega) = \frac{e^{-i\omega\frac{R}{c}}}{R}\left[\frac{\mathfrak{A}_{00}^{+}}{\varepsilon + i(\omega - \nu)} + \frac{\mathfrak{A}_{10}}{\Gamma + i(\omega - \nu_{10})}\right]$$

$$\mathfrak{F}(-\omega) = \frac{e^{+i\omega\frac{R}{c}}}{R}\left[\frac{\mathfrak{A}_{00}^{-}}{\varepsilon - i(\omega - \nu)} + \frac{\mathfrak{A}_{10}}{\Gamma - i(\omega - \nu_{10})}\right].$$

6. *Die Strahlung zweier gleichartiger Atome.*

$$J = \left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2}\right)\left[\frac{|\mathfrak{A}_{00}|^2}{2\varepsilon} + \frac{|\mathfrak{A}_{10}|^2}{2\Gamma} + \frac{\mathfrak{A}_{00}^{+}\mathfrak{A}_{01}}{\varepsilon + \Gamma}\cos\chi\, e^{i\chi} + \frac{\mathfrak{A}_{10}\mathfrak{A}_{00}^{-}}{\varepsilon + \Gamma}\cos\chi\, e^{-i\chi}\right]$$

$$+ \frac{1}{R\,R'}\left[\frac{|\mathfrak{A}_{00}|^2}{2\varepsilon}e^{(-\varepsilon - i\nu)\Delta} + \frac{\mathfrak{A}_{00}^{+}\mathfrak{A}_{01}}{\varepsilon + \Gamma}\cos\chi\, e^{-\Delta(\Gamma + i\nu_{10}) + i\chi}\right.$$

$$+ \frac{\mathfrak{A}_{10}\mathfrak{A}_{00}^{-}}{\Gamma + \varepsilon}\cos\chi\, e^{\Delta(-\varepsilon - i\nu) - i\chi} + \frac{\mathfrak{A}_{10}\mathfrak{A}_{01}}{2\Gamma}e^{-\Delta(\Gamma - i\nu_{10})}$$

$$+ \frac{|\mathfrak{A}_{00}|^2}{2\varepsilon}e^{\Delta(-\varepsilon + i\nu)} + \frac{\mathfrak{A}_{00}^{+}\mathfrak{A}_{01}}{\varepsilon + \Gamma}\cos\chi\, e^{\Delta(-\varepsilon - i\nu) + i\chi}$$

$$\left.+ \frac{\mathfrak{A}_{10}\mathfrak{A}_{00}^{-}}{\varepsilon + \Gamma}\cos\chi\, e^{-\Delta(\Gamma - i\nu_{10}) - i\chi} + \frac{\mathfrak{A}_{10}\mathfrak{A}_{01}}{2\Gamma}e^{-\Delta\Gamma(-i\nu_{10})}\right]$$

wo

$$\chi = \operatorname{arctg}\frac{\nu - \nu_{10}}{\varepsilon + \Gamma}.$$

Da zwischen $\mathfrak{A}_{00}$ und $\mathfrak{A}_{10}$ im allgemeinen, wenn keine Resonanz vorliegt, keine feste Phasenbeziehung besteht, verschwinden die Glieder in $\mathfrak{A}_{00}\mathfrak{A}_{10}$ bei der Mittelung über viele Atome, und wir erhalten:

$$J(\nu) = \frac{|\mathfrak{A}_{00}|^2}{2\varepsilon}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{2}{R\,R'}e^{-\Delta\varepsilon}\cos\nu\Delta\right)$$

$$D = \frac{2\,R\,R'}{R^2 + R'^2}e^{-\Delta\varepsilon}$$

$$J(\nu_{10}) = \frac{|\mathfrak{A}_{10}|^2}{2\Gamma}\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2} + \frac{2}{R\,R'}e^{-\Delta\Gamma}\cos\nu_{10}\Delta\right)$$

$$D = \frac{2\,R\,R'}{R^2 + R'^2}e^{-\Delta\Gamma}.$$

Daraus sehen wir, dass nicht nur die Strahlung der Frequenz ν kohärent ist, sondern dass es auch die der angeregten Emissionsstrahlung ist. Für freie Atome ergäben sich wieder die üblichen Veränderungen.

7. *Die einfallende Welle und die gestreute Strahlung.*

Die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle hat im Aufpunkt (Ortsvektor $\mathfrak{r}$) die Form:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{u}^+ e^{(-\varepsilon + i\nu)\left(t - \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{r}}{c}\right)} + \mathfrak{u}^- e^{(-\varepsilon - i\nu)\left(t - \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{r}}{c}\right)},$$

wo $\mathfrak{e}$ ein Einheitsvektor in der Fortschreitungsrichtung der Welle ist. Die Welle soll erst zur Zeit $t = 0$ das Atom treffen; legen wir nun den Koordinatenanfangspunkt so, dass er zur gleichen Zeit wie das Atom getroffen wird, so ergibt die Fourierzerlegung:

$$\mathfrak{F}(\omega) = \frac{\mathfrak{u}^+ e^{-i\omega\frac{\mathfrak{e}\mathfrak{r}}{c}}}{\varepsilon + i(\omega - \nu)}.$$

Das für uns wichtige Glied der Streustrahlung ist:

$$\mathfrak{F}_s(\omega) = \frac{\mathfrak{A}_{00}^+}{\varepsilon + i(\omega - \nu)} \frac{e^{-i\omega\frac{R}{c}}}{R}$$

damit bilden wir die Intensität in einem Punkte, der vom Atom die Entfernung R hat. Dies ergibt:

$$J = \frac{\mathfrak{u}^+ \mathfrak{u}^-}{2\varepsilon} + \frac{|\mathfrak{A}_{00}|^2}{2\varepsilon R^2} + \frac{2|\mathfrak{A}_{00}||\mathfrak{u}|}{2\varepsilon R} e^{-\varepsilon\Delta} \cos(-\Delta\nu + a_{00} - a),$$

wo

$$\Delta = \frac{R}{c} - \frac{\mathfrak{e}\mathfrak{r}}{c}, \quad \mathfrak{A}_{00} = |\mathfrak{A}_{00}| e^{-ia_{00}}, \quad \mathfrak{u} = |\mathfrak{u}| e^{-ia},$$

$$D = \frac{2|\mathfrak{u}^+||\mathfrak{A}_{00}| e^{-\varepsilon\Delta}}{R^2|\mathfrak{u}|^2 + |\mathfrak{A}_{00}|^2}.$$

Da $a_{00} - a$ für alle Atome gleicher Art gleich ist, so besteht auch hier Kohärenz.

8. *Die Resonanzstrahlung.*

Ich untersuche nun noch den Fall der Resonanz; $|\nu - \nu_{10}|$ klein. Dazu müssen wir die Struktur der $\mathfrak{U}$ besser kennen. Die Rechnung ergibt für die $\mathfrak{U}$:

$$\mathfrak{U}_{00}^{+} = i\left(\frac{u_{01}^{+}}{\Gamma + i(\nu_{10}+\nu)} - \frac{u_{10}^{-}}{\Gamma - i(\nu_{10}-\nu)}\right) + u_{00}^{+}$$

$$\mathfrak{U}_{10} = i\left(\frac{u_{10}^{+}}{\Gamma - i(\nu_{10}+\nu)} + \frac{u_{10}^{-}}{\Gamma - i(\nu_{10}-\nu)}\right).$$

Es ist

$$u_{00}^{-} = (u_{00}^{+})^* \qquad u_{01} = (u_{10})^*.$$

Wenn nun Resonanz vorliegt, so dürfen wir alle Glieder vernachlässigen, die nicht $\nu_{10} - \nu$ im Nenner enthalten. Wir erhalten dann:

$$\mathfrak{U}_{00}^{+} \sim -i\,\frac{u_{10}^{-}}{\Gamma - i(\nu_{10}-\nu)} \qquad \mathfrak{U}_{10} \sim i\,\frac{u_{10}^{-}}{\Gamma - i(\nu_{10}-\nu)},$$

daher

$$\mathfrak{U}_{10} = \mathfrak{U}_{00}\, e^{i\pi} = -\mathfrak{U}_{00}.$$

Die Fourierkomponente des Matrixelementes der Feldstärke wird nun:

$$\mathfrak{F}_{00}(\omega) = \frac{e^{-i\omega\frac{R}{c}}\,\mathfrak{U}_{00}}{R}\left[\frac{1}{\varepsilon + i(\omega-\nu)} - \frac{1}{\Gamma + i(\omega-\nu_{10})}\right].$$

Damit ergibt sich für die Intensität der Strahlung zweier Atome:

$$J = |\mathfrak{U}_{00}|^2 \left\{\left(\frac{1}{R^2} + \frac{1}{R'^2}\right)\left[\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\Gamma} - \frac{2}{\Gamma+\varepsilon}\cos^2\chi\right]\right.$$
$$+ \frac{2}{R\,R'}\left(\frac{e^{-\Delta\varepsilon}}{2\varepsilon}\cos\nu\Delta - \frac{e^{-\Delta\Gamma}}{\varepsilon+\Gamma}\cos\chi\cos(\chi+\nu_{10}\Delta)\right)$$
$$\left. - \frac{e^{-\varepsilon\Delta}}{\varepsilon+\Gamma}\cos\chi\cos(\chi-\nu\Delta) + \frac{e^{-\Delta\Gamma}}{2\Gamma}\cos\nu_{10}\Delta\right\}$$

mit

$$\chi = \operatorname{arctg}\frac{\nu-\nu_{10}}{\varepsilon+\Gamma}$$

$$D = \frac{2RR'\sqrt{\left[\frac{e^{-\Delta\varepsilon}}{2\varepsilon} + \frac{e^{-\Delta\Gamma}}{2\Gamma} - \frac{e^{-\Delta\Gamma}+e^{-\Delta\varepsilon}}{\varepsilon+\Gamma}\cos^2\chi\right]^2 + \left(\frac{e^{-\Delta\Gamma}-e^{-\Delta\varepsilon}}{\varepsilon+\Gamma}\right)^2\cos^2\chi\sin^2\chi}}{(R^2+R'^2)\left(\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\Gamma} - \frac{2}{\varepsilon+\Gamma}\cos^2\chi\right)}.$$

Zunächst geht aus dem Ausdruck für die Intensität hervor, dass die Gesamtstrahlung abnimmt, wenn χ gegen null geht, und verschwindet für $\chi = 0, \varepsilon = \Gamma$. Wir befinden uns in der Absorptionslinie. Hier hat es keinen Sinn, nach der Kohärenz zu fragen. Die Gesamtintensität verschwindet nicht 1, für $\chi = 0$, $\varepsilon \neq \Gamma$, wenn $\Delta \ll \varepsilon, \Gamma$, ist die Kohärenz sogar sehr gut, wie aus dem Ausdruck für D hervorgeht:

$$D = \frac{2 R R'}{R^2 + R'^2} \cdot \frac{\Gamma e^{-\Delta \varepsilon} - \varepsilon e^{-\Delta \Gamma}}{\Gamma - \varepsilon},$$

und 2. für $\varepsilon = \Gamma; \chi \neq 0$. Hier wird D:

$$D = \frac{2 R R'}{R^2 + R'^2} e^{-\Delta \Gamma};$$

wir haben also auch hier gute Kohärenz.

Für freie Atome ergibt sich mit den Abkürzungen:

$$d = \frac{1}{c} (\mathfrak{r}_Q \mathfrak{n} - \mathfrak{r}'_Q \mathfrak{n}'), \quad \varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{\nu - \nu'_{10}}{2\varepsilon}, \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{\nu_{10} - \nu'_{10}}{2\Gamma},$$

$$\chi = \operatorname{arctg} \frac{\nu - \nu_{10}}{\varepsilon + \Gamma} = \operatorname{arctg} \frac{\nu' - \nu'_{10}}{\varepsilon + \Gamma}; \quad \chi' = \operatorname{arctg} \frac{\nu - \nu_{10}'}{\varepsilon + \Gamma} = \operatorname{arctg} \frac{\nu' - \nu_{10}}{\varepsilon + \Gamma},$$

$$J = |\mathfrak{A}_{00}|^2 \left\{ \left(\frac{\int |c_0(Q)|^2 \, dQ}{R^2} + \frac{\int |c'_0(Q)|^2 \, dQ}{R'^2} \right) \left(\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\Gamma} - \frac{2\cos^2\chi}{\varepsilon + \Gamma} \right) \right.$$

$$+ \frac{2}{R R'} \left(\int |c_0(Q)|^2 |c'_0(Q')|^2 \frac{e^{-(\Delta - d)\varepsilon}}{2\varepsilon} \cos\varphi_1 \cos(\nu(\Delta - d) - \varphi_1) \right.$$

$$- \frac{e^{-(\Delta - d)\Gamma}}{\varepsilon + \Gamma} \cos\chi' \cos(\chi' + \nu_{10}(\Delta - d)) + \frac{e^{-\varepsilon(\Delta - d)}}{\varepsilon + \Gamma} \cos\chi' \cos(\chi' - \nu(\Delta - d))$$

$$\left. \left. + \frac{e^{-\Gamma(\Delta - d)}}{2\Gamma} \cos\varphi_2 \cos(\varphi_2 + \nu_{10}(\Delta - d)) \, dQ \, dQ' \right) \right\}.$$

Gegenüber den Ergebnissen für feste Atome tritt hier ausser den uns gewohnten Veränderungen nichts wesentlich Neues hinzu. Wieder verschwindet die Intensität, wenn $\varepsilon = \Gamma, \chi = 0$, da dann $\varphi_1 = \varphi_2 = \chi'$. Auch ist in der Umgebung der Absorptionslinie die Kohärenz gut. Dagegen ergeben sich interessante Folgerungen

für Atome, deren Geschwindigkeiten regellos verteilt sind. Wir haben dann noch in bekannter Weise über die φ und die χ zu mitteln.

$$J = |\mathfrak{U}_{00}|^2 \left\{ \left(\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\Gamma} - \frac{1}{\varepsilon+\Gamma} \right) \left[\frac{\int |c_0(Q)|^2}{R^2} dQ + \frac{\int |c_0'(Q)|^2 dQ}{R'^2} \right] \right.$$
$$+ \frac{1}{RR'} \int \cos \nu (\Delta - d\,|c_0(Q)|^2\,|c_0(Q')|^2 \left(\frac{e^{-\varepsilon(\Delta-d)}}{2\varepsilon} + \frac{e^{-\Gamma(\Delta-d)}}{2\Gamma} \right.$$
$$\left. \left. - \frac{e^{-\Gamma(\Delta-d)} + e^{-\varepsilon(\Delta-d)}}{\varepsilon+\Gamma} \right) dQ\, dQ' \right\}$$

$$D = \frac{1}{RR'} \frac{\sqrt{\left[\int \cos \nu d |c_0(Q)|^2 |c_0'(Q')|^2 \left(\frac{e^{-\varepsilon(\Delta-d)}}{2\varepsilon} + \frac{e^{-\Gamma(\Delta-d)}}{2\Gamma} - \frac{e^{-\Gamma(\Delta-d)} + e^{-\varepsilon(\Delta-d)}}{\varepsilon+\Gamma} \right) dQ\, dQ' \right]^2 + \left[\mathrm{B} \right]^2}}{\left(\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{1}{2\Gamma} - \frac{1}{\varepsilon+\Gamma} \right) \left(\frac{\int |c_0(Q)|^2 dQ}{R^2} + \frac{\int |c_0(Q)|^2 dQ}{R'^2} \right)}$$

$$\mathrm{B} = \int \sin \nu d\, |c_0(Q)|^2\, |c_0'(Q')|^2 \left(\frac{e^{-\varepsilon(\Delta-d)}}{2\varepsilon} + \frac{e^{-\Gamma(\Delta-d)}}{2\Gamma} - \frac{e^{-\Gamma(\Delta-d)} + e^{-\varepsilon(\Delta-d)}}{\varepsilon+\Gamma} \right) dQ\, dQ'$$

Die Gesamtintensität verschwindet hier nun nicht für $\varepsilon = \Gamma$. Für diesen Wert von ε besteht streng keine Kohärenz. Für andere Werte von ε ist nur schwache Kohärenz vorhanden.

Wir untersuchen nun noch die Resonanzstrahlung und die einfallende Welle. Wir erhalten hier:

$$J = \frac{|\mathfrak{u}|^2}{2\varepsilon} + \frac{|\mathfrak{U}_{00}|^2}{R^2} \left(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{2\cos^2\chi}{\varepsilon+\Gamma} + \frac{1}{2\Gamma} \right)$$
$$+ \frac{\mathfrak{u}^+ \mathfrak{U}_{00}}{R} \left[\frac{e^{-\Delta\varepsilon - i\Delta\nu}}{2\varepsilon} - \cos\chi \frac{e^{-\Delta\Gamma - i\Delta\nu_{10} + i\chi}}{\varepsilon+\Gamma} \right]$$
$$+ \frac{\mathfrak{U}_{00}\, \mathfrak{u}^-}{R} \left[\frac{e^{-\Delta\varepsilon + i\Delta\nu}}{2\varepsilon} - \cos\chi \frac{e^{-\Delta\Gamma + i\Delta_{10} - i\chi}}{\varepsilon+\Gamma} \right]$$

mit

$$\Delta = \frac{\mathfrak{e}\,\mathfrak{r}}{c} - \frac{R}{c}, \qquad \chi = \operatorname{arctg} \frac{\nu - \nu_{10}}{\varepsilon+\Gamma}.$$

Nun besteht zwischen $\mathfrak{U}_{00}$ und $\mathfrak{u}$ eine feste Phasenbeziehung: $\mathfrak{U}_{00} = \mathfrak{u}^+ C e^{i\alpha}$. C reell.

Mit Berücksichtigung dieser Beziehung ergibt sich:

$$J = |\mathfrak{u}|^2 \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{C^2}{R^2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{2\cos^2\chi}{\varepsilon+\Gamma} + \frac{1}{2\Gamma}\right) + \frac{2C}{R}\left[\frac{e^{-\Delta\varepsilon}}{2\varepsilon}\cos(\Delta\nu+\alpha) - \frac{e^{-\Delta\Gamma}}{\Gamma+\varepsilon}\cos\chi\cos(\chi-\Delta\nu_{10}-\alpha)\right]\right\}$$

$$D = \frac{2C\sqrt{\left[\frac{e^{-\Delta\varepsilon}}{2\varepsilon}\cos\alpha - \frac{e^{-\Delta\Gamma}}{\varepsilon+\Gamma}\cos\chi\cos(\chi-\alpha)\right]^2 + \left[\mathrm{B}\right]^2}}{\left[\frac{1}{2\varepsilon} + \frac{C^2}{R^2}\left(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{2\cos^2\chi}{\varepsilon+\Gamma} + \frac{1}{2\Gamma}\right)\right]}$$

$$\mathrm{B} = \frac{e^{-\Delta\varepsilon}}{2\varepsilon}\sin\alpha - \frac{e^{-\Delta\Gamma}}{\varepsilon+\Gamma}\cos\chi\sin(\chi-\alpha).$$

Die Kohärenz ist hier ziemlich schwach, speziell wenn ε sehr gross ist. Sie verschwindet wieder für $\varepsilon = \Gamma, \chi = 0$. Ausserdem bewirkt nun noch die Grösse C schwache Kohärenz. $\frac{C^2}{R^2}$ ist nämlich annähernd (wenn $\varepsilon \ll \Gamma$) das Intensitätsverhältnis der Resonanzstrahlung zur Primärstrahlung; und dieses ist im allgemeinen sehr klein. Wenn $C < R$, geht D mit C monoton gegen null.

Ist das Atom frei und hat dieses eine bestimmte Geschwindigkeit, so ergibt sich

$$J = |\mathfrak{u}|^2 \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{C^2}{R^2}\int |c_0(Q)|^2\, dQ \left(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{2\cos^2\chi}{\varepsilon+\Gamma} + \frac{1}{2\Gamma}\right) + \frac{2C}{R}\int |c_0(Q)|^2 \left[\frac{e^{-\Delta\varepsilon}}{2\varepsilon}\cos\varphi\cos(\Delta\nu+\alpha-\varphi) - \frac{e^{-\Delta\Gamma}}{\Gamma+\varepsilon}\cos\chi'\cos(\chi'-\Delta\nu_{10}-\alpha)\right] dQ\right\},$$

wo jetzt

$$\Delta = \frac{\mathfrak{e}\,\mathfrak{r}}{c} - \frac{R}{c} + \frac{\mathfrak{r}_Q\,\mathfrak{n}}{c}, \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\nu-\nu'}{2\varepsilon}, \quad \chi' = \operatorname{arctg}\frac{\nu-\nu'_{10}}{\varepsilon+\Gamma}.$$

Auch hier wieder: schwache Kohärenz, die ganz verschwindet, wenn $\varepsilon = \Gamma$ und $\chi = 0$ ist.

Endlich erhalten wir für Atome mit regelloser Geschwindigkeitsverteilung

$$J = |\mathfrak{u}|^2 \left\{ \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{C^2}{R^2}\int |c_0(Q)|^2\, dQ \left(\frac{1}{2\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon+\Gamma} + \frac{1}{2\Gamma}\right) + \frac{C}{R}\int |c_0(Q)|^2\, dQ \left[\cos(\Delta\nu+\alpha)\left(\frac{e^{-\Delta\varepsilon}}{2\varepsilon} - \frac{e^{-\Delta\Gamma}}{\Gamma+\varepsilon}\right)\right]\right\},$$

wozu das Gleiche gesagt werden kann, wie zu der vorletzten Formel.

An Hand der Ergebnisse über die Resonanzstrahlung wollen wir uns kurz ein Beispiel überlegen. Wir bestrahlen ein Gas mit Licht der Resonanzfrequenz. Fragen wir nach der Zusammensetzung der Elementarwellen der Streustrahlung oder der einfallenden und der gestreuten Strahlung, so müssen wir das einfallende Licht so monochromatisch wie möglich machen, da sich ja nur monochromatische Elementarwellen gleicher Frequenz zusammensetzen können; d. h. wir müssen in den Ausdrücken D für die Kohärenz ε gegen Null streben lassen. Wir erhalten dann bei festen Atomen vollständige Kohärenz und bei Atomen mit regelloser Geschwindigkeitsverteilung schwächere Kohärenz im Gegensatz zum Resultat für $\varepsilon = \Gamma$. Wir müssen also auch im Resonanzfall eine Brechung des Lichts im Sinne der geometrischen Optik erwarten, wie es sich ja auch in den Versuchen über anomale Dispersion äussert. Neben der Brechung macht sich natürlich auch die allseitige starke Streuung des Lichts im Resonanzfall bemerkbar, die auf die Dichteschwankungen (regellose Geschwindigkeitsverteilung) zurückzuführen ist.

Zum Schlusse möchte ich den Herren Prof. Dr. W. Pauli und Dr. H. Casimir meinen besondern Dank aussprechen für die mir gestellte Aufgabe, und für die wertvollen Ratschläge und Hinweise, die sie mir gaben, sowie für das Interesse, das sie dieser Arbeit entgegenbrachten.

Zürich, Phys. Institut der E. T. H.