

Zeitschrift: Helvetica Physica Acta
Band: 64 (1991)
Heft: 8

Artikel: Zur Elektrodynamik von schwarzen Loechern
Autor: Straumann, Norbert
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-116336>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

ZUR ELEKTRODYNAMIK VON SCHWARZEN LOECHERN

Norbert Straumann

Institut für Theoretische Physik, Universität Zürich, Schönberggasse 9,
CH-8001 Zürich

(5. V. 1991)

ZUSAMMENFASSUNG

Nach einer kurzen Zusammenfassung der Eigenschaften von isolierten stationären Schwarzen Löchern wird am Beispiel der Elektrodynamik die Physik in der Nähe von Schwarzen Löchern behandelt. Im Unterschied zur traditionellen vierdimensionalen raumzeitlichen Beschreibung werden die Grundgesetze als Gleichungen eines "absoluten Raumes" geschrieben, über dem sich die dynamischen Variablen als Funktion einer "absoluten Zeit" ähnlich wie in der nichtrelativistischen Physik entwickeln. Gleichzeitig werden die Randbedingungen am Horizont als Eigenschaften einer fiktiven leitenden Membrane formuliert. In diesem "Membran Modell", welches von verschiedenen Autoren weit entwickelt wurde, lässt sich die Physik ausserhalb von Schwarzen Löchern intuitiv viel leichter verstehen. Dies gilt insbesondere für den Blandford-Znajek Prozess der magnetischen Energieextraktion aus einem Schwarzen Loch, welcher möglicherweise für ein Verständnis der Quasare und anderer aktiver Galaxien wesentlich ist.

EINLEITUNG

Dieser Aufsatz ist eine leicht erweiterte Fassung eines Referates, das der Autor anlässlich eines Kolloquiums zum Abschied von Jean-Pierre Blaser als Direktor des Paul Scherrer Instituts gehalten hat. Wie schon der ursprüngliche Vortrag, richtet er sich an ein allgemeines Publikum von Physikern und enthält - ausser vielleicht der Art der Darstellung - nichts wirklich Neues. Es geht mir dabei vor allem darum zu zeigen, dass die Elektrodynamik von Schwarzen Löchern ganz ähnlich ist wie die gewohnte Physik, etwa von Stromgeneratoren und Elektromotoren.

Um zu einem intuitiv leicht zugänglichen Verständnis der Physik in der Nähe von Schwarzen Löchern (SL) zu gelangen, werden die eleganten vierdimensionalen Grundgesetze der Allgemeinen Relativitätstheorie in Raum und Zeit zerspalten. In einer allgemeinen Situation ist dies auf vielerlei Arten möglich, aber für ein stationäres SL gibt es eine bevorzugte Zerlegung. Bezüglich dieser lassen sich die dynamischen Variablen - ähnlich wie in der nichtrelativistischen Physik - als Grössen eines "absoluten Raumes" auffassen, die sich als Funktionen einer "absoluten Zeit" entwickeln. Bei dieser 3+1 - Zerlegung erhalten z.B. die Gleichungen der Elektrodynamik eine ähnliche Form wie die gewohnten Maxwellschen Gleichungen für bewegte Leiter. Dies erleichtert das Studium von physikalischen Prozessen ausserhalb des SL ganz erheblich, da wir auf die Bilder und Erfahrungen der uns gewohnten Physik zurückgreifen können.

Im ersten Abschnitt gebe ich eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Eigenschaften von isolierten SL. Danach wird im zweiten Abschnitt die oben angedeutete 3+1 - Zerlegung der Raumzeit eines SL und der elektrodynamischen Grundgesetze vorgenommen und es wird das sog. "Membran - Modell" eines SL formuliert. Als wichtiges Beispiel eines physikalischen Prozesses in der Nähe eines SL behandeln wir in Abschnitt 3 die magnetische Energieextraktion von einem SL. Diese spielt möglicherweise für das Verständnis der Quasare und anderer aktiver Galaxien eine wichtige Rolle, worauf zuerst Blandford und Znajek hingewiesen haben (Abschnitt 4).

1. SCHWARZE LOECHER (allgemeine Eigenschaften)

In einem 'Scientific American' Artikel schrieb Kip Thorne anfangs der 70er Jahre [1]:

"Eines der phantastischsten Dinge, die sich der Mensch ausgedacht hat - angefangen von Einhörnern und Gorgonen bis hin zur Wasserstoffbombe - ist wohl das Schwarze Loch: ein Loch im Raum, in das alles hineinfallen kann, über dessen Rand jedoch von innen nichts mehr herauskommt; ein Loch mit einem extrem starken Schwerefeld, das sogar Licht einfängt und in seinem Griff behält; ein Loch, das den Raum krümmt und die Zeit verzehrt. Aehnlich wie Einhörner und Gorgonen scheinen Schwarze Löcher eher in den Bereich von Mythos oder Science Fiction zu gehören als zur wirklichen Welt. Und doch fordern die Gesetze der modernen Physik ihre Existenz. Allein in unserer Milchstrasse könnte es Millionen Schwarzer Löcher geben."

Inzwischen haben wir uns an diese bizarren Objekte gewöhnt und es gibt kaum noch Zweifel, dass SL existieren. Freilich ist die Evidenz dafür immer noch indirekt und nicht vollständig schlüssig.

Nicht alle von Ihnen werden möglicherweise wissen, dass die Existenz von SL sogar noch vor Laplace im Jahre 1783 von Referend John Michell (1724-1793) vorausgesagt wurde. Michell war zunächst Lehrer in Cambridge und wurde später Rektor in Thornhill (Yorkshire). Seine Arbeit [2] wurde am 27.Nov.1783 der Royal Society durch seinen Freund Cavendish unterbreitet und löste in Londoner Kreisen enorme Aufregung aus. Sogar Neuigkeiten von Ampère aus Paris wurden dadurch in den Hintergrund gedrängt. Michell benutzte nicht nur dieselben Argumente wie später Laplace [3] im Jahre 1796, welche bekanntlich auf Newtons universeller Gravitation und der Korpuskulartheorie des Lichtes beruhen, sondern er schlug auch vor, wie Sterne, deren Entweichgeschwindigkeit grösser als die Lichtgeschwindigkeit ist, entdeckt werden könnten:

"If there should really exist in nature any bodies whose density is not less than that of the sun, and whose diameters are more than 500 times the diameter of the sun, since their light could not arrive at us... we could have no information from sight; yet, if any other luminous bodies should happen to revolve about them we might still perhaps from the motions of these revolving bodies infer the existence of the central ones with some degree of probability, as this might afford a clue to some of the apparent irregularities of the revolving bodies...: but as the consequences of such a supposition are very obvious, and the consideration of them somewhat beside my present purpose, I shall not prosecute them any further."

Ich möchte Sie zuerst an einige Eigenschaften von isolierten Schwarzen Löchern erinnern. Deren Bildung bei Zusammenbrüchen von hinreichend massereichen Sternen am Ende ihrer thermonuklearen Evolution erscheint uns deshalb als unvermeidlich, weil kalte Sterne - Weisse Zwerge und Neutronensterne - nur unterhalb von etwa $3M_{\odot}$ existieren können (siehe dazu Fig.1).

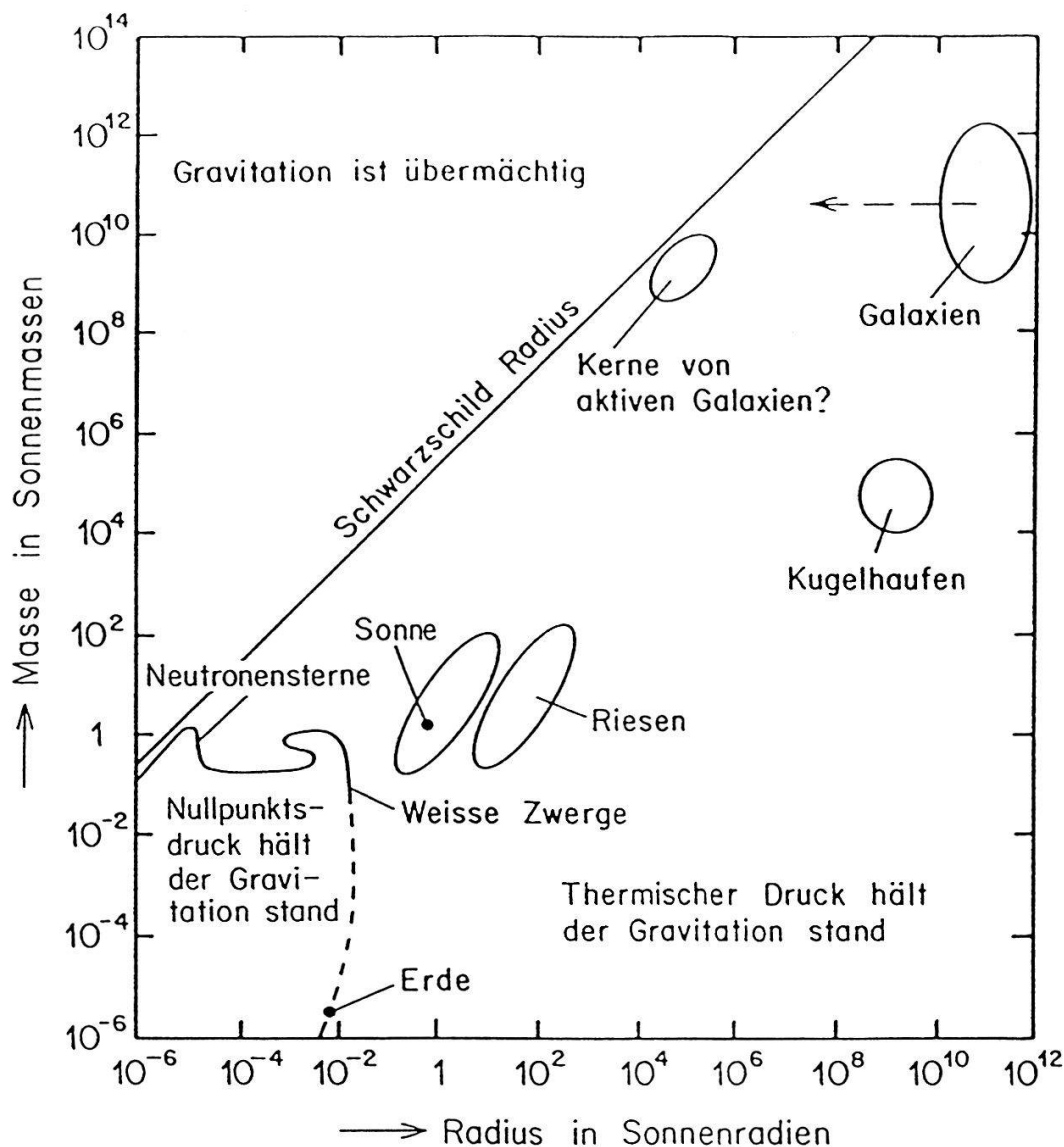


Fig.1. Masse-Radius-Diagramm für einige astronomische Objekte [4]. In dieser Ebene gibt es drei verschiedene Gebiete:

1. Die Hauptreihensterne (z.B. unsere Sonne), die Riesen, die Kugelsternhaufen und die grosse Vielfalt der Galaxien sind Assoziationen, bei denen der thermische Druck oder makroskopische Bewegungen der Gravitation standhalten. Dies ist ein temporärer Zustand, der freilich bei den Galaxien sehr lange dauert.
2. In einem kleinen Bereich kann die Materie auch in einem "kalten" Zustand existieren. Dazu gehört die alltägliche Materie (Steine, Berge, Meere, etc.), der Mond, die Planeten und am oberen Ende der Massenskala die Weissen Zwerge und die Neutronensterne. Die maximale Masse ist aber nicht grösser als zwei bis drei Sonnenmassen.
3. Jenseits der Linie $R = 2GM/c^2$ gewinnt die Gravitation immer. Keine Kräfte können dann ein Gleichgewicht aufrechterhalten. Sehr massive Objekte werden früher oder später dort enden, wodurch sie zu Schwarzen Löchern werden.

SPHAERISCH SYMMETRISCHER KOLLAPS AUF EIN SL

Fig.2 stellt den sphärisch symmetrischen Kollaps auf ein SL dar. Dieser ist besonders einfach, weil das Gravitationsfeld ausserhalb des Sternes unabhängig ist von den Einzelheiten der Implosion und durch die statische Schwarzschild-Lösung gegeben ist (Birkhoff-Theorem).

Besonders wichtig ist die Struktur der Lichtkegel, aus welcher sich die merkwürdigen Kausalitätsverhältnisse ablesen lassen. Eine entscheidende Rolle spielt die als Horizont bezeichnete lichtartige Fläche, bildet sie doch den Rand des Gebietes, das kausal mit einem weit entfernten Beobachter verbunden ist. Dieser Ereignishorizont verhält sich wie eine einseitige Membrane, durch welche Energie und Information nach innen, aber nicht nach aussen treten können.

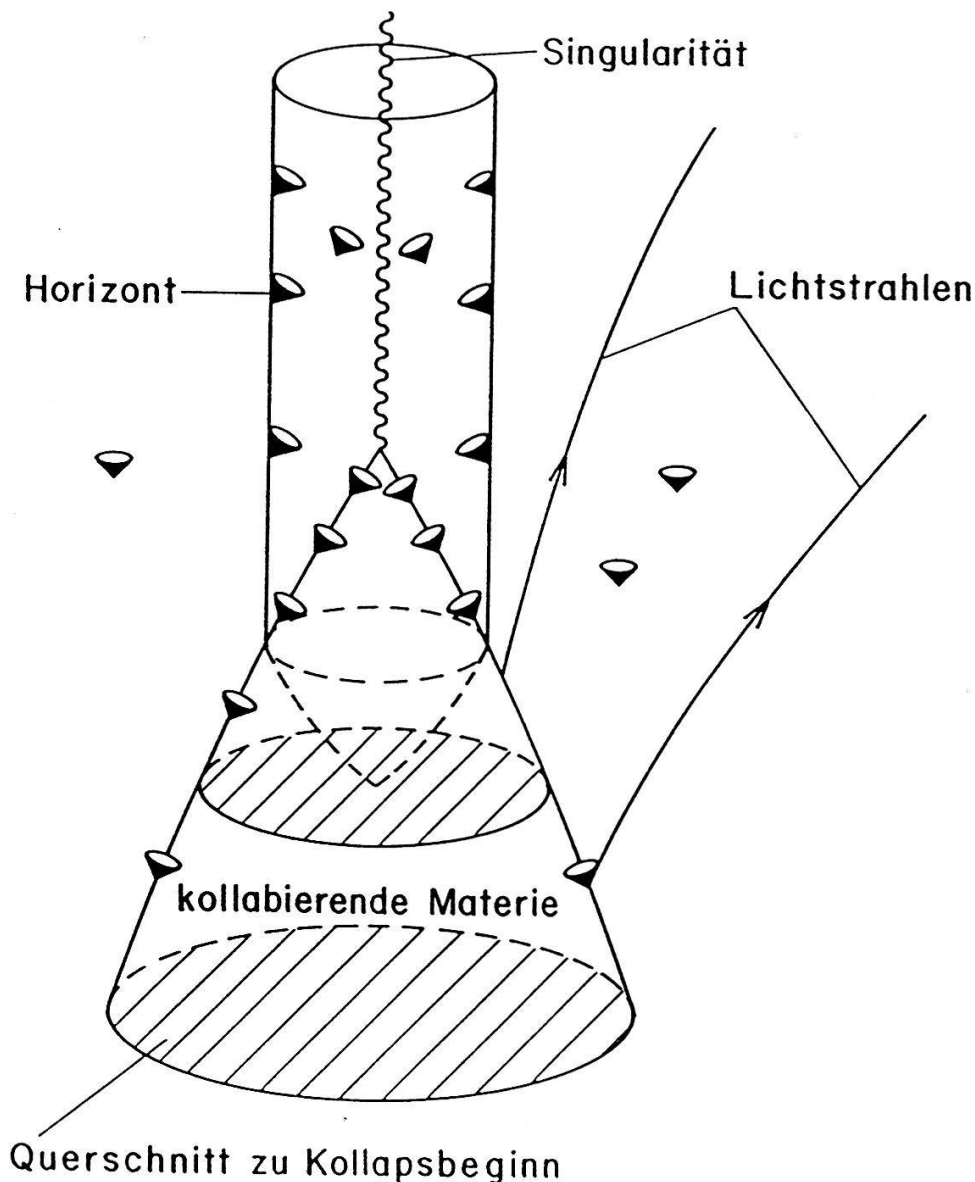


Fig.2. Raum-Zeit Diagramm eines kollabierenden Sterns und Entstehung eines Schwarzen Loches.

Wir beschäftigen uns im folgenden nur mit der Physik ausserhalb des Horizonts, denn über das, was jenseits des Horizonts geschieht, können wir ebenso wenig in Erfahrung bringen wie über Himmel und Hölle. Für uns aussenstehende Beobachter erstarrt der kollabierende Stern beim Schwarzschild-Radius. Dabei wird er plötzlich unsichtbar, da die Rotverschiebung kurz vor Erreichen des Horizonts exponentiell ansteigt und die Leuchtkraft entsprechend abnimmt. Die charakteristische Zeit dafür ist $\tau \sim R_S/c \simeq 10^{-5} M/M_\odot \text{ sec}$, also ausserordentlich kurz für eine stellare Masse. Ein auf ein SL kollabierter Stern ist also für uns nicht sehr viel kompakter als ein Neutronenstern. Der Horizont zieht aber völlig andere Randbedingungen nach sich als die Oberfläche eines Neutronensternes.

DER "GLATZENSATZ"

Beim realistischen Kollaps auf ein SL wird sich zunächst ein nichtstationärer Horizont bilden (Fig.3). Durch Emission von Gravitationswellen nähert sich aber dieses angeregte SL sehr rasch (in Bruchteilen einer Sekunde) einem stationären Zustand. Deshalb wollen wir uns im folgenden mit den stationären SL beschäftigen.

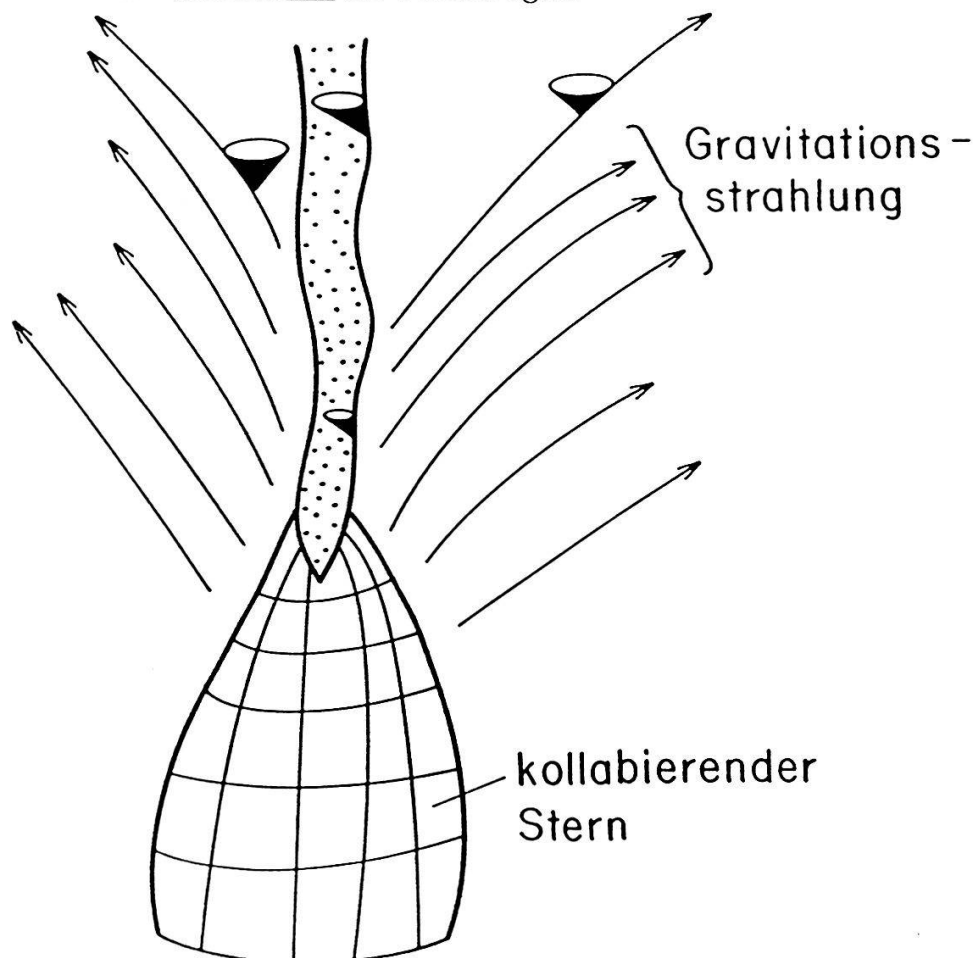


Fig.3. Nichtsphärischer Kollaps eines Sterns und Bildung eines dynamischen Schwarzen Loches, welches sich durch Gravitationsstrahlung sehr rasch einem stationären Zustand nähert.

Stationäre SL sind die einfachsten makroskopischen Objekte, die man sich überhaupt vorstellen kann; die elektrisch neutralen sind durch Masse und Drehimpuls völlig charakterisiert. Wenn also die Materie hinter einem Horizont verschwindet, so sieht man von ihren mannigfaltigen Besonderheiten nichts mehr als deren Gesamtmasse und Drehimpuls; die Vorgeschichte geht fast völlig verloren und ist jenseits des Horizonts verborgen.

Keinerlei Messungen oder Versuche an einem Schwarzen Loch können uns eine Antwort auf die Frage geben, ob es aus Wasserstoff oder Eisen, aus Materie oder Antimaterie, usw., entstanden ist. Dieser enorme Informationsverlust, dieses "Vergessen" aller Kennzeichen der Materie, beruht natürlich wesentlich darauf, dass keinerlei Signale aus dem SL in den äusseren Raum dringen können.

Ich wiederhole: Alle SL mit gleicher Masse und gleichem Drehimpuls sind genaue Kopien voneinander. (Von elektrischer Ladung wird abgesehen.) Diese "Gesichtslosigkeit" hat J.A. Wheeler zur Feststellung veranlasst: "Schwarze Löcher haben keine Haare", und seither spricht man vom "No Hair Theorem", oder auf deutsch vom "Glatzensatz".¹ Dieser ist eine Konsequenz der Einsteinschen Feldgleichungen, welche aber nicht an der Oberfläche liegt [5].

ROTIERENDE SCHWARZE LOECHER

Rotierende SL haben bemerkenswerte Eigenschaften. Das Gravitationsfeld hat einen wirbelförmigen Anteil, welcher in der Nähe des Horizonts anwächst und übermächtige Wirkungen ausübt. Dies wird im folgenden eine zentrale Rolle spielen.

Innerhalb der sog. Ergosphäre zwingt das Gravitationsfeld alle Körper, unaufhaltsam um das SL zu kreisen. Diese Tatsache geht aus der Figur 4 hervor. In dieser sind die Wellenfronten für verschiedene Emissionspunkte zu einer etwas späteren Zeit eingezeichnet. Innerhalb der Ergoregion liegen diese immer ausserhalb der Emissionspunkte.

Aus einem rotierenden SL kann - auf Kosten des Drehimpulses - eine beträchtliche Energie extrahiert werden. Diese wird durch den 2. Hauptsatz von S. Hawking begrenzt, nach welchem die Oberfläche eines SL nicht abnehmen kann.

Dieser Energiegewinn spielt vermutlich für die Erklärung der Quasare eine entscheidende Rolle; ich komme darauf später zurück.

Neben dem 2. Hauptsatz haben auch die anderen Hauptsätze der Thermodynamik enge Entsprechungen in der Physik der SL. Dies ist in der folgenden Tabelle angedeutet.

¹In jüngster Zeit hat sich gezeigt, dass die "No Hair Vermutung" nicht mehr gilt, wenn die Gravitation an nicht-Abelsche Eichfelder ankoppelt [14]. Zhi-hong Zhou und ich konnten allerdings beweisen [15], dass die gefundenen Gegenbeispiele instabile Lösungen sind.

Tabelle: Die vier Hauptsätze

In der rechten Kolonne sind folgende Bezeichnungen benutzt: M = Masse des SL, A = Oberfläche des Horizonts, J = Drehimpuls des SL, Ω_H = Winkelgeschwindigkeit des Horizonts, $T_H = (2\pi k)^{-1} \hbar g_H$ = Hawking-Temperatur, $S = (4\hbar)^{-1} k A$.

Hauptsatz	Thermodynamik	Physik der SL
0.	$T = \text{const}$ über den ganzen Körper im thermischen Gleichgewicht	Oberflächengravitation g_H ist für ein stationäres SL überall gleich
1.	$dE = TdS + \text{reversible Arbeit}$	$dM = (8\pi)^{-1} g_H dA + \Omega_H dJ$ $= T_H dS + \Omega_H dJ$
2.	$\delta S \geq 0$ in jedem Prozess	$\delta A \geq 0$ in jedem Prozess
3.	Unerreichbarkeit von $T = 0$	Unerreichbarkeit von $g_H = 0$ (extremes SL)

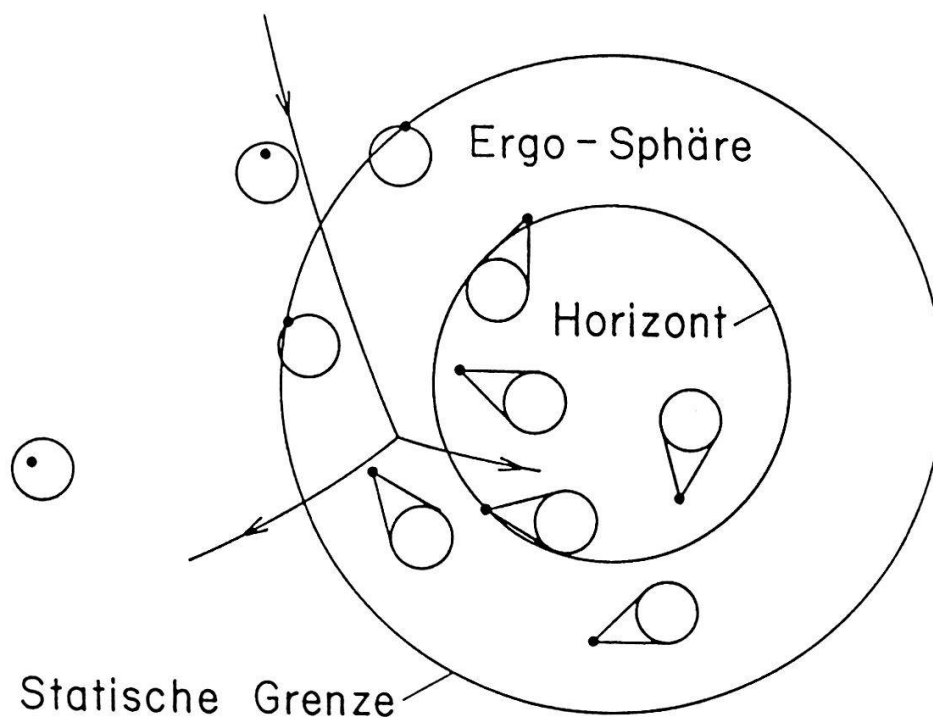


Fig.4. Struktur der Lichtkegel in der Äquatorebene eines rotierenden Schwarzen Loches.

Gezeigt ist ferner der Penrose-Prozess. Bei diesem fällt ein Stück Materie von weit weg in die Ergosphäre und zerfällt dort in zwei Bruchstücke, wobei folgendes möglich ist. Der eine Teil fällt in das SL, und das zweite Bruchstück verlässt die Ergosphäre und trägt dabei eine grössere Energie weg, als sie das einfallende Stück Materie hatte [6]. (Dieser Prozess löst ein für allemal gleichzeitig das Energie- und das Abfallproblem.)

2. (3+1) - SPALTUNG DER RAUMZEIT EINES SL

Ein wichtiger Zweig der Physik der SL befasst sich mit dem Studium von physikalischen Prozessen (elektromagnetischen Feldern, Plasmen, etc.) ausserhalb von SL. Solche Untersuchungen haben z.B. gezeigt, dass die Rotationsenergie eines SL mit Hilfe von magnetischen Feldern angezapft werden kann. Es ist sehr wohl möglich, dass auf diese Weise die enorme Helligkeit eines Quasars und seine energiereichen Jets erklärt werden können (Blandford und Znajek [13]).

Für ein Verständnis dieser magnetischen Energieextraktion und verwandter Prozesse ist es ausserordentlich hilfreich, zunächst die allgemein-relativistischen Grundgesetze in einer Weise umzuformen, welche viel näher an unserer Intuition ist. Wir sind es gewohnt, uns Prozesse im 3-dimensionalen Raum vorzustellen. Zur Veranschaulichung zeichnen wir z.B. Feldlinien von elektrischen und magnetischen Feldern oder die Strömungslinien von Plasmabewegungen. Es fällt uns sicher sehr schwer, etwa die Funktionsweise eines Tokamaks in 4-dimensionalen Raumzeit-Diagrammen darzustellen, obschon die Grundgleichungen in ihrer 4-dimensionalen relativistischen Form unvergleichlich eleganter sind als deren Zerspaltung in Raum und Zeit. (Man denke nur etwa an die Maxwell'schen Gleichungen.)

Im sog. 3+1-Formalismus [7] werden die allgemein-relativistischen Grundgleichungen als Gleichungen eines "absoluten Raumes" geschrieben, in dem sich die dynamischen Variablen (Felder, etc.) als Funktionen einer "absoluten Zeit" ähnlich wie in der nichtrelativistischen Physik entwickeln. Man zerlegt also die Raumzeit in $\text{Raum} \times \text{Zeit}$.

In einer allgemeinen Situation ist dies auf vielerlei Arten möglich, aber für stationäre SL gibt es eine bevorzugte Zerlegung. Diese ist besonders einfach für ein Schwarzschild-Loch, da das Gravitationsfeld ausserhalb des Horizonts statisch ist. Es gibt dann eine ausgezeichnete Zeit (die Schwarzschild-Zeit), deren Richtungen senkrecht auf dem "absoluten Raum" sind. Dementsprechend zerfällt die Metrik gemäss

$$g = -\alpha^2 dt^2 + \alpha^{-2} dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta d\varphi^2). \quad (1)$$

Dabei ist α die sog. "Lapsefunktion"

$$\alpha = \sqrt{1 - 2M/r}, \quad (G = c = 1). \quad (2)$$

[Alle metrischen Koeffizienten sind t-unabhängig und es gibt keine Komponenten g_{ti} ($i = r, \vartheta, \varphi$).]

Für rotierende stationäre SL hat man immer noch eine ausgezeichnete Zeit und aufgrund der Axialsymmetrie auch eine ausgezeichnete azimutale Winkelkoordinate φ . Da aber der absolute Raum nach dem Lense-Thirring-Effekt mitgeschleppt wird, verschwindet nun die gemischte Komponente $g_{t\varphi}$ nicht. (Letztere hat eine invariante Bedeutung [8].) In der

folgenden Formel schreiben wir den Anteil der Metrik, der die Koordinaten t und φ enthält in einer passenden Form explizite aus:

$$g = -\alpha^2 dt^2 + g_{\varphi\varphi}(d\varphi + \beta^\varphi dt)^2 \oplus \text{Metrik in } (r, \vartheta). \quad (3)$$

Neben der Lapsefunktion taucht nun auch noch der "Shift" β^φ auf. Offensichtlich gilt ² $g_{t\varphi} = \beta^\varphi g_{\varphi\varphi}$, d.h.

$$\beta^\varphi = \frac{g_{t\varphi}}{g_{\varphi\varphi}} \equiv -\omega. \quad (4)$$

Die 4er-Geschwindigkeit

$$u = \frac{\partial_t - \vec{\beta}}{\alpha}, \quad \vec{\beta} \equiv \beta^\varphi \vec{\partial}_\varphi \in \text{absolutem Raum}, \quad (5)$$

ist dann senkrecht auf dem absoluten Raum (mit Koordinaten r, ϑ, φ). Beobachter mit dieser 4er-Geschwindigkeit nennen wir auch HIBOs (für Hilfsbeobachter). Für diese ist insbesondere $u_\varphi \equiv (u, \partial_\varphi) = 0$, d.h. der Drehimpuls (pro Masseneinheit) verschwindet. Man nennt diese Beobachter nach Bardeen deshalb oft auch "zero-angular-momentum observers" (ZAMOs). Das orthonormierte 3-Bein des absoluten Raumes bezüglich den drei üblichen (Boyer-Lindquist-) Koordinaten nennen wir

$$\vec{e}_r, \vec{e}_\vartheta, \vec{e}_\varphi = \frac{1}{\tilde{\omega}} \vec{\partial}_\varphi, \quad (6)$$

($2\pi\tilde{\omega}$ = Umfang einer φ -Linie).

Auf dem Horizont nimmt ω überall den gleichen Wert

$$\Omega_H = \frac{a}{2Mr_H} \quad (a \equiv \frac{J}{M}, \quad r_H = M + \sqrt{M^2 - a^2}) \quad (7)$$

an [8]. (Diese Grösse ist uns schon früher begegnet.) Das SL rotiert als ganzes wie ein starrer Körper mit der Winkelgeschwindigkeit Ω_H . (Alle Beobachter in der Nähe des Horizonts müssen mit dieser Winkelgeschwindigkeit das SL umkreisen.)

Damit Sie für α und $\vec{\beta}$ ein Gefühl bekommen, schreibe ich die Einsteinschen Feldgleichungen in der post-Newtonschen Näherung mit Hilfe dieser Potentiale auf.

Definieren wir die Felder

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\alpha, \quad \vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{\beta}, \quad (8)$$

so lauten die genäherten Feldgleichungen [9]:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{g} &= -4\pi\rho_m, & \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{g} &= 0, & \vec{\nabla} \times \vec{H} &= 4(-4\pi\rho_m \vec{v}_m + \partial_t \vec{g}). \end{aligned} \quad (9)$$

(ρ_m ist die Dichte der Materie und $\vec{v}_m$ deren Geschwindigkeitsfeld.) Diese sehen offensichtlich fast gleich aus wie die Maxwell-Gleichungen. Für einen Testkörper haben wir ausserdem die Bewegungsgleichung

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \times \vec{H} + \vec{g}. \quad (10)$$

²Ferner ist $g_{tt} = -\alpha^2 + \omega^2 g_{\varphi\varphi}$.

Daraus dürfte klar hervorgehen, warum man $\vec{H} = \vec{\nabla} \times \vec{\beta}$ das "gravitomagnetische" Feld nennt. Dieses Feld spielt im folgenden eine wesentliche Rolle. (Die Gravitationsbeschleunigung $\vec{g}$ nennt man manchmal auch das "gravitoelektrische" Feld.) Die Gleichungen (8)-(10) gelten (für $\rho_m = 0$, $\vec{v}_m = 0$) auch weit weg von einem SL.

Die vollen Maxwell'schen Gleichungen in der Umgebung eines rotierenden SL (und auch für allgemeinere Situationen) kann man ebenfalls in Raum und Zeit aufspalten und findet [7]:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho_e, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \\ \vec{\nabla} \times (\alpha\vec{E}) &= -(\partial_t - L_{\vec{\beta}})\vec{B}, \\ \vec{\nabla} \times (\alpha\vec{B}) &= (\partial_t - L_{\vec{\beta}})\vec{E} + 4\pi\alpha\vec{j}.\end{aligned}\quad (11)$$

Für uns besonders wichtig ist die Kopplung an das gravitomagnetische Potential $\vec{\beta}$, entsprechend der Substitution

$$\partial_t \rightarrow \partial_t - L_{\vec{\beta}}, \quad (12)$$

wobei $L_{\vec{\beta}}$ die Liesche Ableitung³ bezeichnet. (Natürlich berücksichtigen die Operationen *div*, *grad* und *rot* den Umstand, dass der absolute Raum gekrümmt ist, wie man dies auch von krummlinigen Koordinaten gewohnt ist.) In den Gleichungen (11) sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ die Felder, die von HIBOs gemessen werden.

DER HORIZONT ALS LEITENDE MEMBRAN

Die Randbedingungen, welche durch die Existenz eines Horizonts bedingt sind, lassen sich auf sehr anschauliche Weise formulieren, wenn man letzteren als eine leitende Membrane mit Oberflächenladungsdichte σ_H , Oberflächenstromdichte $\vec{J}_H$ und spezifischem Oberflächenwiderstand R_H auffasst. Auf eine nähere Begründung muss ich hier verzichten. (Siehe dazu Ref. [10]-[12].)

Genauer gelten die folgenden Beziehungen:

$$\begin{aligned}\text{Gauss'sches Gesetz:} \quad E_{\perp} &\rightarrow 4\pi\sigma_H, \\ \text{Ampère'sches Gesetz:} \quad \alpha\vec{B}_{\parallel} &\rightarrow \vec{B}_H = 4\pi\vec{J}_H \times \vec{n}, \\ \text{Ladungserhaltung:} \quad \alpha j_{\perp} &\rightarrow -\partial_t\sigma_H - {}^{(2)}\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_H, \\ \text{Ohmsches Gesetz:} \quad \alpha\vec{E}_{\parallel} &\rightarrow \vec{E}_H = R_H\vec{J}_H.\end{aligned}\quad (13)$$

Dabei ist der spezifische Widerstand R_H gleich der Impedanz des Vakuums:

$$R_H = 4\pi/[c] = 377 \text{ Ohm}. \quad (14)$$

Für die Horizontfelder $\vec{E}_H$ und $\vec{B}_H$ gilt somit

$$\vec{B}_H = \vec{E}_H \times \vec{n}. \quad (15)$$

³ $L_{\vec{\beta}}\vec{B} = (\vec{\beta} \cdot \vec{\nabla})\vec{B} - (\vec{B} \cdot \vec{\nabla})\vec{\beta}.$

Damit sind die Grundlagen für ein anschauliches Verständnis der Elektrodynamik von SL gelegt.

3. MAGNETISCHE ENERGIEEXTRAKTION AUS EINEM SL

Ich zeige nun, dass es mit Hilfe von äusseren magnetischen Feldern grundsätzlich möglich ist, eine enorme Leistung aus einem rotierenden SL zu extrahieren. Wir werden anschliessend ein Gedankenexperiment dazu genauer diskutieren. Viel schwieriger ist die Entwicklung eines realistischen astrophysikalischen Szenarios, in welchem die magnetische Extraktion die gewaltigen Energiemengen deckt, welche in Quasaren und aktiven galaktischen Kernen (AGN's) ausgestossen werden. Ich werde aber auch dazu einige Bemerkungen machen.

Ausgangspunkt der Ueberlegungen ist das Faradaysche Induktionsgesetz ausserhalb des SL:

$$\vec{\nabla} \times (\alpha \vec{E}) + (\partial_t - L_{\vec{\beta}}) \vec{B} = 0. \quad (16)$$

(Der letzte Term beschreibt die Kopplung von $\vec{B}$ an das gravitomagnetische Feld.) Dieses integrieren wir über eine geschlossene zeitunabhängige Kurve $\mathcal{C}$ des absoluten Raumes. Gegenüber dem integralen Gesetz der gewöhnlichen ED ergibt sich hier ein charakteristischer Zusatz:

$$\oint_{\mathcal{C}} \alpha \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{A}} \vec{B} \cdot d\vec{A} - \oint_{\mathcal{C}} (\vec{\beta} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}, \quad (17)$$

wobei $\mathcal{C} = \partial\mathcal{A}$ ist. Der letzte Term ist ähnlich wie im Faradaygesetz der ED für bewegte Leiter. Er ist ein Ausdruck für die Kopplung von $\vec{B}$ an das gravitomagnetische Feld und spielt im folgenden eine entscheidende Rolle. Für stationäre Situationen haben wir insbesondere

$$EMK(\mathcal{C}) \equiv \oint_{\mathcal{C}} \alpha \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \oint_{\mathcal{C}} (\vec{\beta} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}. \quad (18)$$

Dies wenden wir auf die Situation in der Fig.5. an:

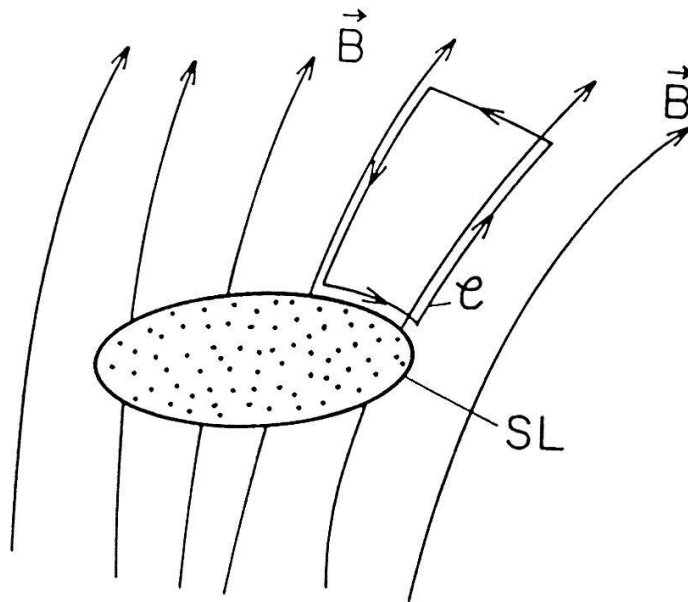


Fig.5. Anordnung für Gleichung (19)

Das Integral längs den Feldlinien gibt keinen Beitrag und weit weg fällt $\vec{\beta}$ rasch ab ($\sim 1/r^2$). Es bleibt damit nur der Beitrag vom Horizont ($\mathcal{C}_H$):

$$EMK = - \int_{\mathcal{C}_H} (\vec{\beta}_H \times \vec{B}_\perp) \cdot d\vec{l} \quad (19)$$

Dabei ist

$$\vec{\beta}_H = -\Omega_H \tilde{\omega} \vec{e}_\varphi \quad (20)$$

($2\pi\tilde{\omega}$ = Umfang, $\Omega_H = a(2Mr_H)^{-1}$, $r_H = M + \sqrt{M^2 - a^2}$, $a \equiv J/M$.) Durch geeignete Impedananzanpassung kann man einen Generator konstruieren, so dass die Leistungsübertragung

$$\frac{1}{4} \frac{(EMK)^2}{R(\mathcal{C}_H)} \quad (21)$$

resultiert, wobei der "innere Widerstand" $R(\mathcal{C}_H)$ des Generators gleich dem Horizontwiderstand

$$R(\mathcal{C}_H) = \int_{\mathcal{C}_H} R_H \frac{dl}{2\pi\tilde{\omega}}, \quad R_H = 377 \text{ Ohm}, \quad (22)$$

ist. Die andere Hälfte wird in Form von Verlustheizung des (gedehnten) Horizonts vernichtet. Dies werde ich später vorführen.

Für die weitere Auswertung betrachten wir ein axialsymmetrisches Magnetfeld. Mit Hilfe der Flussfunktion ψ (s. Fig.6) lässt sich der poloidale Anteil von $\vec{B}$ so darstellen:

$$\vec{B}^p = \frac{\vec{\nabla}\psi \times \vec{e}_\varphi}{2\pi\tilde{\omega}}.$$

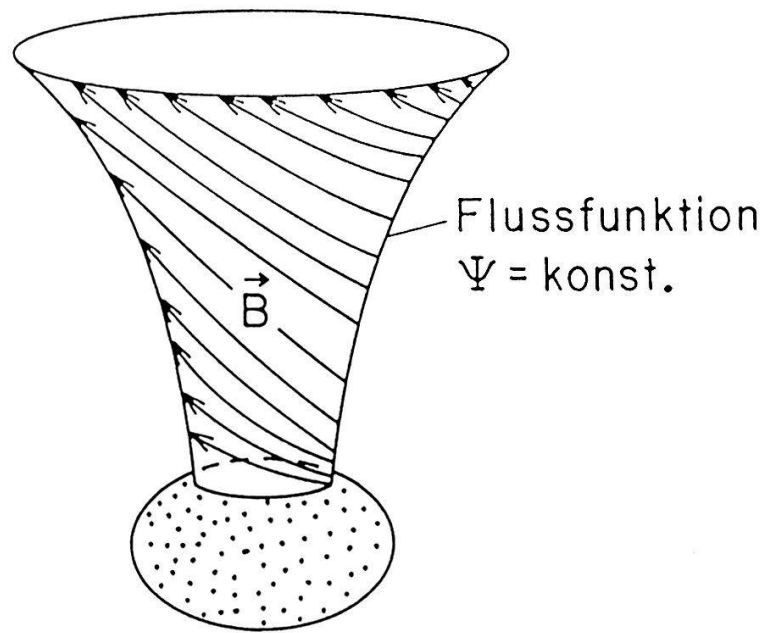


Fig.6. Axialsymmetrisches $\vec{B}$ -Feld.

Für die Situation in Fig.7 haben wir für die *EMK* des geschlossenen Weges

$$\Delta V = \frac{1}{2\pi} \Omega_H \Delta\psi . \quad (23)$$

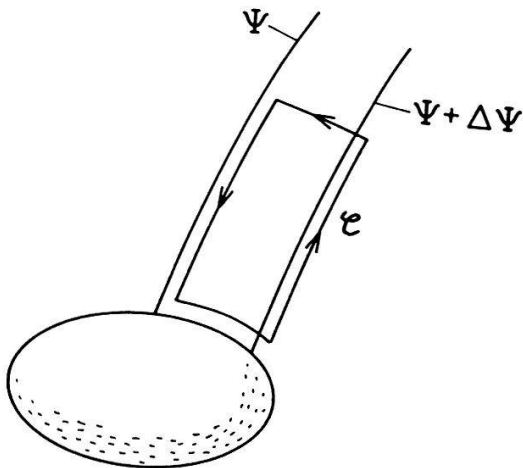


Fig.7. Integrationsweg für die Spannung in (23)

Der innere Widerstand ist

$$\Delta R_H = R_H \frac{\Delta\psi}{4\pi^2 \tilde{\omega}^2 B_\perp} . \quad (24)$$

Die zugehörige optimale Energieextraktionsrate ist damit

$$\frac{1}{4} \frac{(\Delta V)^2}{\Delta R_H} = \frac{\Omega_H^2}{16\pi} \tilde{\omega}^2 B_\perp \Delta\psi . \quad (25)$$

Dies müssen wir vom Pol des SL bis zu einer gewissen tieferen Breite integrieren. (Siehe dazu Fig.8.)

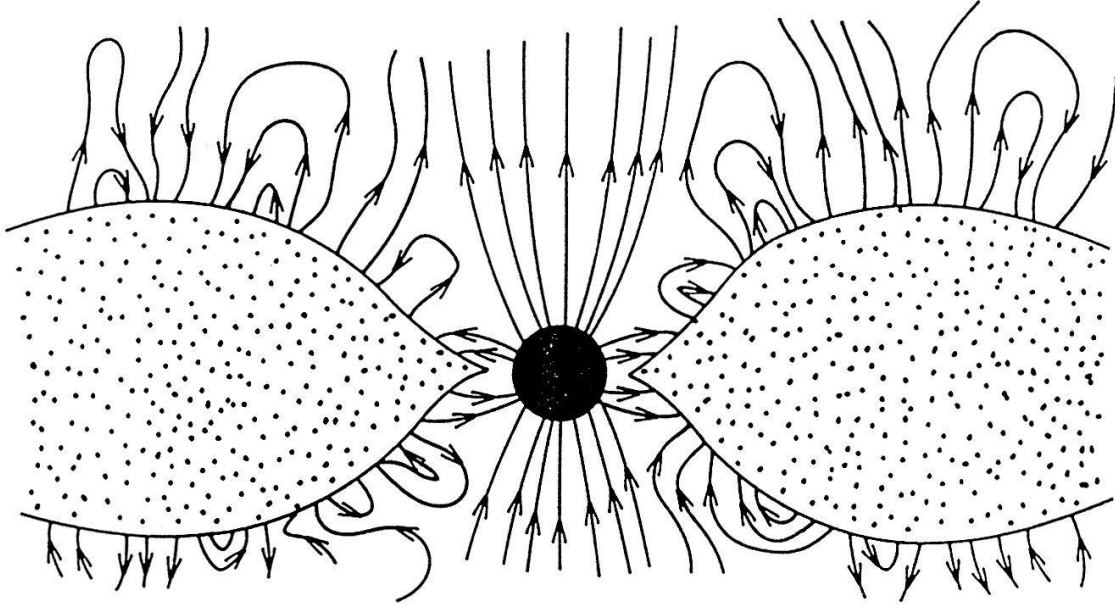


Fig.8. Plausible Magnetfeldstruktur in der Nähe eines supermassiven SL, welches von einer Akkretionsscheibe umgeben ist (zentrale Maschine eines Quasars). (Adaptiert von Ref. [12].)

Größenordnungsmässig setzen wir

$$\Sigma \Delta\psi = \psi \sim B_{\perp} \pi r_H^2, \quad \tilde{\omega}^2 \sim \langle \tilde{\omega}^2 \rangle \sim r_H^2/2$$

und erhalten für die Leistung

$$\begin{aligned} P &\sim \frac{1}{128} \left(\frac{a}{M}\right)^2 B_{\perp}^2 r_H^2 \\ &\sim (10^{45} \text{ erg/sec}) \left(\frac{a}{M}\right)^2 \left(\frac{M}{10^9 M_{\odot}}\right)^2 \left(\frac{B_{\perp}}{10^4 G}\right)^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Für die gesamte EMK finden wir

$$\begin{aligned} V &\sim \frac{1}{2\pi} \Omega_H \psi \sim \frac{1}{2\pi} \frac{a}{2Mr_H} B_{\perp} \pi r_H^2 \\ &\simeq \frac{1}{2} \left(\frac{a}{M}\right) M B_{\perp} \\ &\sim (10^{20} \text{ Volt}) \left(\frac{a}{M}\right) \frac{M}{10^9 M_{\odot}} \frac{B_{\perp}}{10^4 G}. \end{aligned} \quad (27)$$

Für vernünftige astrophysikalische Parameter erhalten wir also magnetosphärische Spannungen $V \sim 10^{20} \text{ Volt}$ und einen Leistungsausstoss der Grösse $\sim 10^{45} \text{ erg/sec}$, was man bei den aktiven galaktischen Kernen etwa beobachtet.

EIN GEDANKENEXPERIMENT ZUR MAGNETISCHEN ENERGIEEXTRAKTION

Als Gedankenexperiment diskutiere ich jetzt eine konkrete Anordnung zur Energieextraktion, bei der man alles im Detail untersuchen kann. Diese ist in Fig.9 gezeigt.

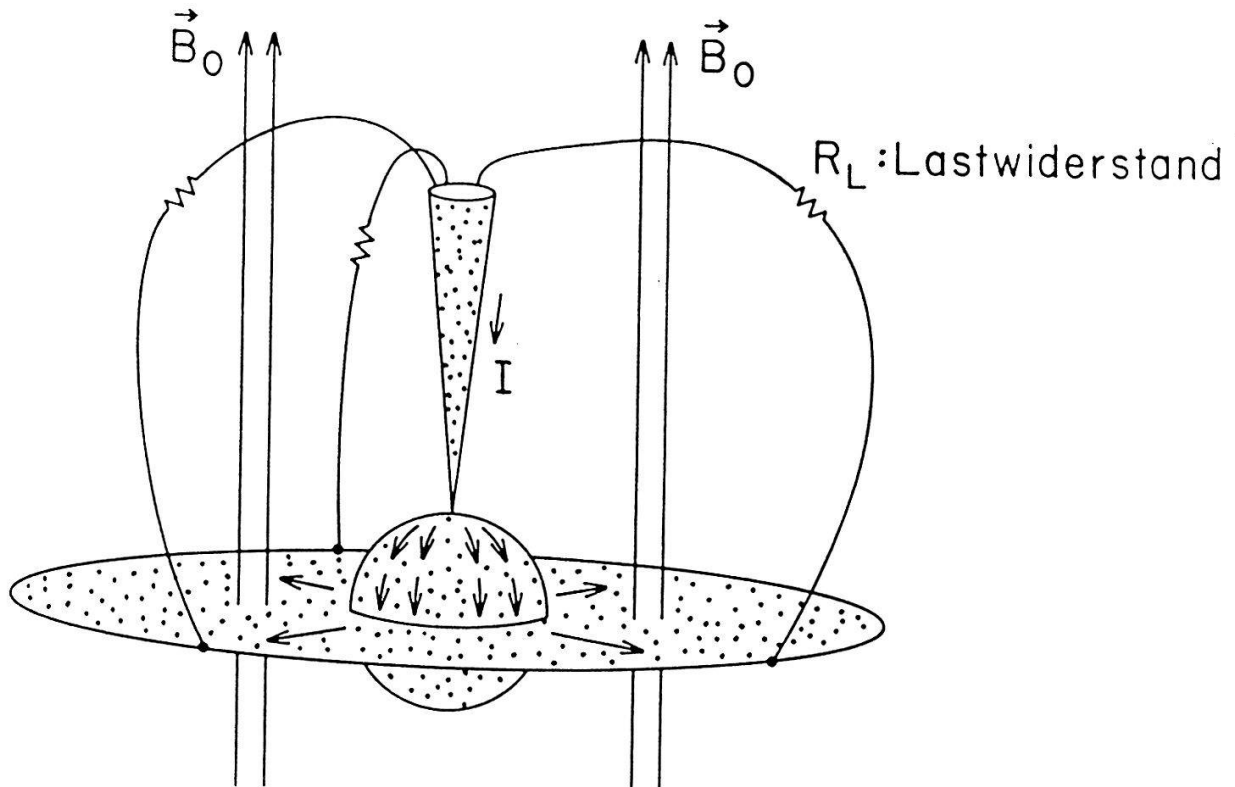


Fig.9. Rotierendes Schwarzes Loch als Stromgenerator (adaptiert von Ref. [12])

Wir betrachten darin die *EMK* eines geschlossenen Weges, ausgehend vom Äquator des SL längs einer ideal leitenden Scheibe zu einem Draht weit weg, von dort längs des Drahtes durch einen Ohmschen Widerstand R_L , der durch einen Draht mit einer ideal leitenden konischen Fläche verbunden ist und entlang dieser in die Gegend des Nordpols des SL (bei $\vartheta = \vartheta_0$) und von dort poloidal längs des SL zum Ausgangspunkt. (Die konische Fläche wird an Stelle eines unendlich dünnen Drahtes verwendet, weil sonst später ein divergentes Integral für den Widerstand auftreten würde. Es ist dies ein Ersatz für einen Draht endlicher Dicke.)

Wieder erhält die *EMK* nur Beiträge vom Horizont⁴:

$$V = \Omega_H \int_{\vartheta_0}^{\pi/2} B_{\perp} \tilde{\omega}_H \rho_H d\vartheta \quad \left(\tilde{\omega}_H = \frac{r_H^2 + a^2}{\sqrt{r_H^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}} \sin \vartheta \right). \quad (28)$$

Der Strom fließt als Oberflächenstrom poloidal durch die nördliche Hemisphäre des Horizonts mit der Stromdichte

$$\vec{J} = \frac{I}{2\pi\tilde{\omega}_H} \vec{e}_{\vartheta}, \quad (29)$$

⁴ $\rho = g_{\vartheta\vartheta} = \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \vartheta}$

wobei I die Stromstärke längs des geschlossenen Weges ist. (N.B.: Aus den Gesetzen von Faraday und Ohm folgt, dass es keine toroidale Komponente gibt.)

Der Teil der EMK längs des Horizonts gibt die Horizontspannung

$$V_H = \int \underbrace{\alpha_H E_{\hat{\vartheta}}}_{E_{H\hat{\vartheta}}} \rho_H d\vartheta \stackrel{Ohm}{=} \int_{\vartheta_0}^{\pi/2} R_H \mathcal{J}_{\hat{\vartheta}} \rho_H d\vartheta$$

$$\stackrel{(29)}{=} I \int_{\vartheta_0}^{\pi/2} R_H \frac{\rho_H d\vartheta}{2\pi\tilde{\omega}_H} = I R_{HT} . \quad (30)$$

Im letzten Gleichheitszeichen haben wir die übliche Definition des totalen Widerstandes verwendet.

Daneben gibt es nun noch einen Beitrag V_L vom Lastwiderstand R_L . Da dieser weit weg vom Loch ist, gilt die übliche Beziehung

$$V_L = I R_L . \quad (31)$$

Wir haben damit

$$V = V_H + V_L = I (R_{HT} + R_L) . \quad (32)$$

Der Strom I ist somit durch die "Batteriespannung" V des Horizonts, dessen Widerstand R_{HT} und durch den Ohmschen Widerstand R_L bestimmt.

Es ist nun ganz instruktiv näher zu sehen, wie die Joulesche Wärme

$$P_L = I^2 R_L \quad (33)$$

des Ohmschen Widerstandes aus dem Loch abgezapft wird.

Dazu berechnen wir zuerst noch die Ohmsche Wärme, welche durch den Strom durch die nördliche Hemisphäre (n.H.) des SL erzeugt wird. Diese ist gleich

$$\int_{n.H.} \vec{E}_H \cdot \vec{\mathcal{J}}_H dA = \int_{\vartheta_0}^{\pi/2} E_{H\hat{\vartheta}} \mathcal{J}_{H\hat{\vartheta}} 2\pi\tilde{\omega} \rho_H d\vartheta$$

$$= I \int_{\vartheta_0}^{\pi/2} E_{H\hat{\vartheta}} \rho_H d\vartheta \stackrel{\text{siehe (30)}}{=} I^2 R_{HT} . \quad (34)$$

Man kann nun allgemein zeigen [12], dass diese Joulesche Wärme gleich $T_H dS_H/dt$ ist. Es ist also

$$I^2 R_{HT} = T_H \frac{dS_H}{dt} . \quad (35)$$

Andererseits ist die Änderung der Rotationsenergie des Loches

$$-\Omega_H \frac{dJ}{dt} = -\Omega_H \int (\vec{\mathcal{J}}_H \times \vec{B}_\perp) \cdot \tilde{\omega}_H \vec{e}_\varphi \underbrace{dA}_{2\pi\tilde{\omega} \rho_H d\vartheta}$$

$$= \Omega_H \int_{\vartheta_0}^{\pi/2} \mathcal{J}_{H\hat{\vartheta}} B_\perp \tilde{\omega}_H 2\pi\tilde{\omega}_H \rho_H d\vartheta$$

$$\stackrel{(29)}{=} I \Omega_H \int_{\vartheta_0}^{\pi/2} B_\perp \tilde{\omega}_H \rho_H d\vartheta \stackrel{(28)}{=} I V$$

$$\stackrel{(32)}{=} I^2 (R_{HT} + R_L) . \quad (36)$$

Nun gilt aber nach dem 1. Hauptsatz für die Aenderung der Masse eines stationären rotierenden Loches

$$dM = T_H dS_H + \Omega_H dJ \quad (37)$$

und diese ist pro Zeiteinheit nach (35) und (36) gerade $-I^2 R_L$, was natürlich sein muss.

Wir haben also das folgende Ergebnis:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{dM}{dt} & = & T_H \frac{dS_H}{dt} & + & \Omega_H \frac{dJ}{dt} \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ -I^2 R_L & & I^2 R_{HT} & - & I^2 (R_{HT} + R_L) \end{array} \quad (38)$$

Es ist instruktiv, diese Energieerhaltung mittels eines verallgemeinerten Poynting-Theorems zu verfolgen. In unserer stationären Situation findet man eine Formel von der Art [12]

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial \mathcal{D}} \underbrace{\alpha \vec{S}_{E\infty}} \cdot d\vec{A} \\ &\quad \alpha^2 \vec{S} - \alpha \vec{\beta} \cdot \vec{T} = \alpha (\alpha \vec{S} + \omega \vec{S}_{Lz}) . \end{aligned} \quad (39)$$

Der Rand $\partial \mathcal{D}$ des Gebietes $\mathcal{D}$ setzt sich aus dem Horizont und einer Fläche um den Lastwiderstand zusammen. Vom Beitrag über den Horizont findet man leicht den Anteil

$$\begin{array}{ccc} I^2 R_{HT} + \Omega_H \frac{dJ}{dt} & = & T_H \frac{dS_H}{dt} + \Omega_H \frac{dJ}{dt} \stackrel{(37)}{=} \frac{dM}{dt} \\ \uparrow & & \uparrow \\ [\vec{S}] & & [\vec{S}_{Lz}] \end{array} \quad (40)$$

Diese Energie (bei ∞) fliesst also in das SL; sie ist natürlich negativ, da die Energieänderung durch die Verlangsamung der Rotation des Loches die Entropieänderung (Vergrösserung) des Loches durch Ohmsche Dissipation überwiegt. Diese freigesetzte Energie wird ohne Verluste durch die elektromagnetischen Felder nach aussen in den Widerstand getragen. Dort wird sie mit der Rate

$$\int_{\partial \mathcal{D}_L} \alpha \vec{S}_{E\infty} \cdot d\vec{A} = \int_{\partial \mathcal{D}_L} \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = I^2 R_L \quad (41)$$

im Widerstand deponiert. Wir erhalten damit wieder

$$-\frac{dM}{dt} = -\Omega_H \frac{dJ}{dt} - I^2 R_{HT} = I^2 R_L . \quad (42)$$

Schliesslich sei noch festgestellt, dass

$$P_L = V^2 \frac{R_L}{(R_{HT} + R_L)^2} \quad (43)$$

maximal wird für

$$R_H = R_L \quad (\text{Impedanzanpassung}) ; \quad (44)$$

dann ist

$$P_L^{max} = \frac{V^2}{4R_{HT}}, \quad (45)$$

was wir früher benutzt haben.

Natürlich kann man das Gedankenexperiment auch umdrehen. Durch Anlegen einer Spannung können wir ein SL als Rotor eines Elektromotors benutzen (s.Fig.10).

Sie sehen: Die Physik der SL ist sehr ähnlich wie diejenige, die auch für den Generator in der Fig. 11 massgebend ist.

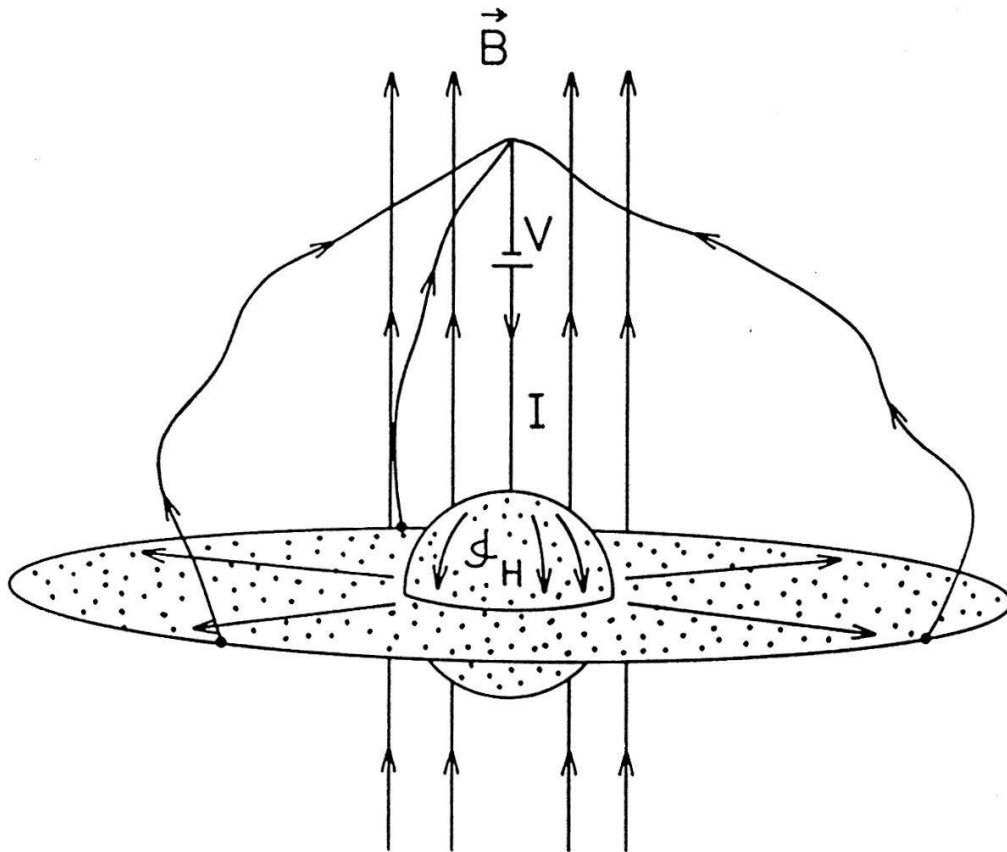


Fig.10. Schwarzes Loch als Rotor eines Elektromotors (adaptiert von Ref. [12])

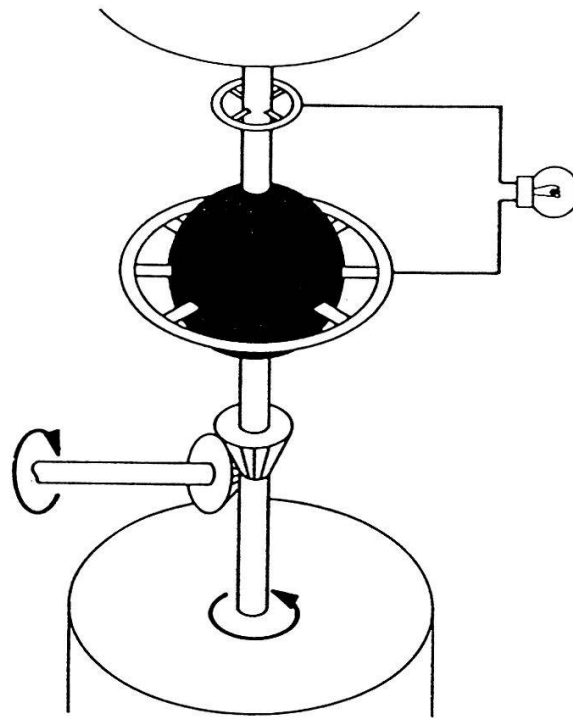


Fig.11. Elektrischer Generator

Statt die Spannung des Loches in einem Widerstand zu verheizen, könnte man sie natürlich auch für eine *B*-Mesonen-Fabrik benutzen. Mit einem anständigen SL könnte man sogar ganz in der Tradition des *PSI* mit seinen vielen Sekundärstrahlen - gleich mehrere Maschinen betreiben. Ich möchte hier eine Anlage vorschlagen (Fig.12), die später einmal sicher den Namen

"BLASER – KOMPLEX"

tragen wird. Im Moment wäre allerdings aus politischen Gründen der Name

"URSPRUNG"

hilfreicher. Natürlich müsste Ralph Eichler die Projektleitung übernehmen. Hans Hofer hat seine Begeisterung für das *SSSC* bereits angemeldet und deshalb würde ich ihm die Finanzen übergeben, ausserdem die nicht triviale Lochbeschaffung. In einer ersten Stufe müsste das Loch ja noch nicht allzu massiv sein. Für die weitere Lochvergrößerung wäre aber Wilfred Hirt der richtige Mann mit der nötigen Erfahrung in der Vergrößerung von Löchern.

Ich weiss, dass Walti Fischer sehr daran interessiert wäre, parasitär Neutroneninterferenzversuche um das SL herum auszuführen. Er ist bereits daran, die allgemein-relativistischen Korrekturen für die relevanten Phasenverschiebungen zu berechnen.

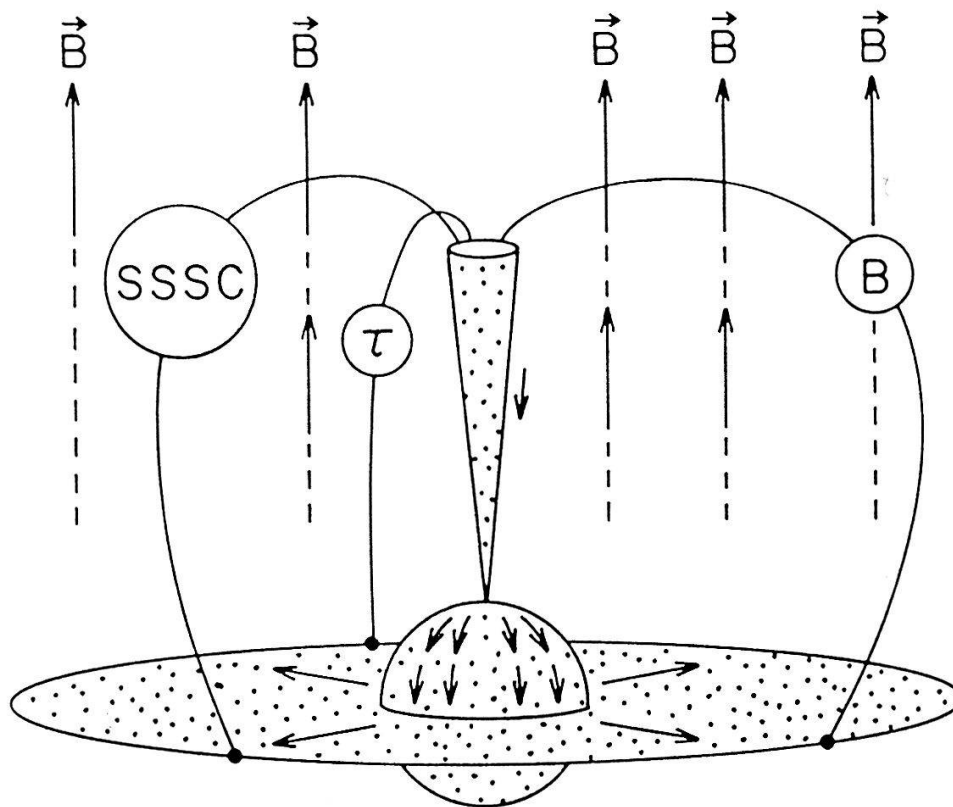


Fig.12. Vorschlag für die Zukunft des *PSI*

4. DER BLANDFORD-ZNAJEK-Prozess

Wir gehen nun nochmals auf das Bild 9 zurück, in welchem eine plausible Magnetfeld-Struktur um ein supermassives SL im Zentrum einer aktiven Galaxie skizziert ist. Rotation und Turbulenz in der Akkretionsscheibe können Magnetfelder von bis zu einem Tesla erzeugen.

In der Nähe des Loches erwartet man ein kräftefreies Elektron-Positron-Plasma, welches wie folgt zustande kommt. Stellen wir uns zunächst vor, in der Umgebung des Loches seien keine geladenen Teilchen vorhanden. In diesem Fall wird durch Unipolarinduktion ein elektrisches quadrupolähnliches Feld erzeugt. (Dieses kann man sogar analytisch bestimmen.) In der Nähe des Loches ist der Betrag dieses elektrischen Feldes von der Grössenordnung $E \sim Ba/M \sim (3 \cdot 10^6 \text{ Volt/cm})(a/M)$. Zwischen dem Horizont und einigen Gravitationsradien gibt dieses längs den $\vec{B}$ -Feldlinien Anlass zu einer Spannung $V \sim Er_H \sim Ba \sim 10^{20} \text{ Volt}$ für ein SL von $10^9 M_\odot$. In diesem enormen Potential werden nun Elektronen, welche von der Scheibe oder dem interstellaren Raum stammen, längs den $\vec{B}$ -Feldlinien auf relativistische Energien beschleunigt und dabei mit weichen Photonen aus der Scheibe zusammenstossen. Durch "inverse Comptonstreuung" werden letztere in energetische γ -Quanten verwandelt, welche ihrerseits durch Zusammenstösse mit weichen Photonen aus der Scheibe Elektron-

Positron-Paare erzeugen. Durch Wiederholung dieser Prozesse entsteht ein Elektron-Positron-Plasma, welches genügend dicht werden kann, um die Komponente des elektrischen Feldes in Richtung von $\vec{B}$ zu annihilieren. Das elektrische Feld steht dann im wesentlichen senkrecht auf $\vec{B}$, bis auf eine genügend grosse Komponente, welche von Zeit zu Zeit zu Elektron-Positron-Entladungen führt und dabei die Magnetosphäre mit Plasma anfüllt. (Verwandte Prozesse wurden auch für die Magnetosphäre eines Neutronensterns vorgeschlagen. Es scheint, dass alle aktiven Pulsare $e^+ - e^-$ - Paarwinde haben.)

Felder mit $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$ nennt man entartet. Wir nehmen im folgenden an, dass in der Nähe des Loches, wo das $\vec{B}$ -Feld stark ist, die Felder kräftefrei sind, d.h. es gelte

$$\rho_e \vec{E} + \vec{j} \times \vec{B} \simeq 0$$

(ideale MHD-Bedingung). In einem kräftefreien Plasma ist $\vec{E}$ senkrecht auf $\vec{B}$. Ueberdies hat $\vec{E}$ in einer axialsymmetrischen und stationären Situation keine toroidale Komponente⁵. (Dies ist eine unmittelbare Folge des Faradayschen Induktionsgesetzes.) Deshalb hat $\vec{E}$ die Form

$$\vec{E} = -\vec{v}_F \times \vec{B}^p, \quad (46)$$

wo $\vec{v}_F$ toroidal ist und also so dargestellt werden kann

$$\vec{v}_F = \frac{1}{\alpha} (\Omega_F - \omega) \tilde{\omega} \vec{e}_\varphi, \quad (47)$$

Ω_F ist die Winkelgeschwindigkeit ($d\varphi/dt$) der magnetischen Feldlinien.

Ferner kann man leicht einsehen, dass Ω_F auf den magnetischen Flächen konstant ist, d.h. Ω_F ist eine Funktion von ψ .

Auf dem Horizont finden wir

$$\vec{E}_H = -(\Omega_F - \Omega_H) \tilde{\omega} \vec{e}_\varphi \times \vec{B}_\perp, \quad (\vec{\beta}_H \cdot \vec{E}_H = 0). \quad (48)$$

Nun gehen wir ähnlich vor wie in Abschnitt 3 und betrachten wieder den geschlossenen Weg der Fig. 13.

⁵Ferner erhält man die toroidale Komponente $\vec{B}^T$ sofort aus dem Ampèreschen Gesetz zu $\vec{B}^T = -(2I/\alpha\tilde{\omega})\vec{e}_\varphi$, $I(\psi)$: Gesamtstrom (nach unten).

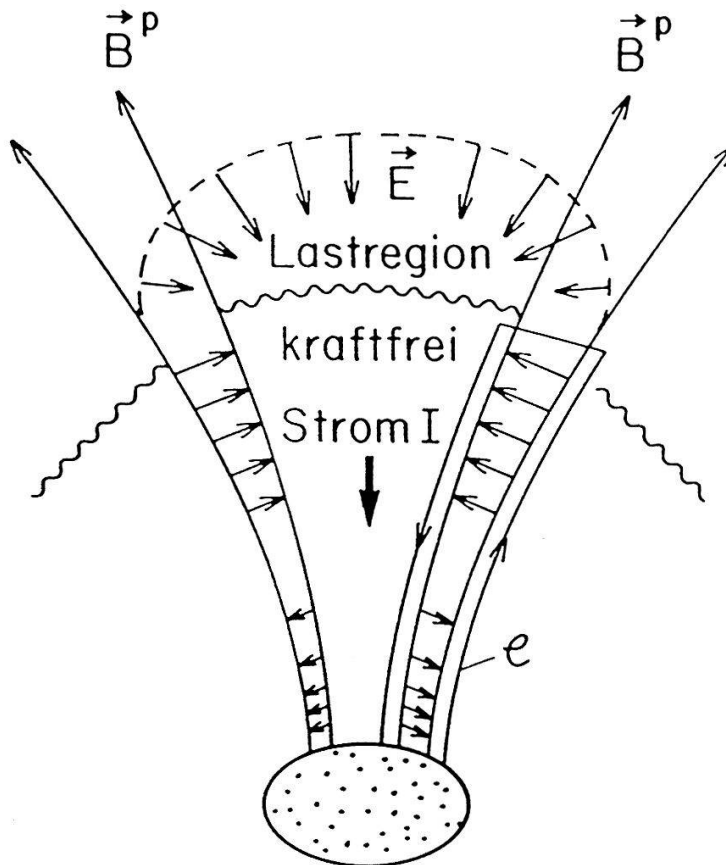


Fig.13. Rotierendes Schwarzes Loch in einer Magnetosphäre (adaptiert von Ref. [12])

Wir hatten bereits die Beziehungen (siehe (23), (24)):

$$\Delta V = \frac{1}{2\pi} \Omega_H \Delta \psi, \quad (49)$$

$$\Delta R_H = R_H \frac{\Delta \psi}{4\pi^2 \tilde{\omega}^2 B_\perp}. \quad (50)$$

Wie in (30) erhalten wir für die Horizontspannung

$$\Delta V_H = I \Delta R_H. \quad (51)$$

Diesen Spannungsabfall können wir auch mit (48) berechnen:

$$\Delta V_H = \int_{c_H} \alpha \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2\pi} (\Omega_H - \Omega_F) \Delta \psi. \quad (52)$$

Die gesamte Spannung ΔV setzt sich aus ΔV_H und dem Spannungsabfall ΔV_L in der astrophysikalischen Lasterregion (vgl. Fig.14) zusammen. Für letztere haben wir wie in (49) (benutze (46) und (47))

$$\Delta V_L = \frac{1}{2\pi} \Omega_F \Delta \psi, \quad (53)$$

und natürlich gilt auch

$$\Delta V_L = I \Delta R_L, \quad (54)$$

wo ΔR_L der Widerstand der Lastregion ist. Aus diesen Gleichungen und

$$\Delta V = \Delta V_H + \Delta V_L \quad (55)$$

ergeben sich sofort die folgenden Beziehungen

$$\frac{\Delta V_L}{\Delta V_H} = \frac{\Omega_F}{\Omega_H - \Omega_F} = \frac{\Delta R_L}{\Delta R_H}, \quad (56)$$

$$I = \frac{\Delta V}{\Delta R_H + \Delta R_L} = \frac{1}{2}(\Omega_H - \Omega_F)\tilde{\omega}^2 B_\perp. \quad (57)$$

Die Ohmsche Dissipation beim Horizont ist wie in (35)

$$\begin{aligned} T_H \frac{d\Delta S_H}{dt} &= I^2 \Delta R_H = I \Delta V_H \\ &= \frac{(\Omega_H - \Omega_F)^2}{4\pi} \tilde{\omega}^2 B_\perp \Delta \psi. \end{aligned} \quad (58)$$

Die in der Lastregion deponierte Leistung ΔP_L ist damit

$$\begin{aligned} \Delta P_L &= I^2 \Delta R_L = I \Delta V_L \\ &\stackrel{(53),(57)}{=} \frac{\Omega_F(\Omega_H - \Omega_F)}{4\pi} \tilde{\omega}^2 B_\perp \Delta \psi. \end{aligned} \quad (59)$$

ΔP_L wird wie in (44) maximal für $\Delta R_H = \Delta R_L$, was nach (52) und (53) für

$$\Omega_F = \frac{1}{2}\Omega_H \quad (60)$$

der Fall ist. Dann gelten die in (26) und (27) gemachten Abschätzungen. Ob diese Bedingung in realistischen astrophysikalischen Situationen annähernd erfüllt wird, ist ein schwieriges Problem für Modellbauer. Die Einzelheiten der astrophysikalischen "Last" sind überhaupt nicht klar.

Mit dieser offenen Frage zum Energieproblem der Quasare und anderer aktiver galaktischer Kerne möchte ich schliessen.

Literatur

- [1] K.S. Thorne, The Search for Black Holes, Scientific American, December 1974.
- [2] J. Michell, Phil.Trans.Roy.Soc.London LXXIV, 35 (1784).
- [3] P.S. Laplace, Expos. du Système du Monde II, 305, Paris (1796).
- [4] N. Straumann, Weisse Zwerge, Neutronensterne und Schwarze Löcher, Vierteljahrschrift der Naturf. Ges. Zürich 129, 246 (1984).
- [5] B. Carter, Mathematical Foundations of the Theory of Relativistic Black Hole Configurations, in "Gravitation in Astrophysics", Cargèse 1986, Plenum Press 1987.
- [6] Näheres dazu z.B. in N. Straumann, Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik, Lecture Notes in Physics, Vol. 150, 2. Auflage, Springer Verlag 1988.
- [7] R. Durrer und N. Straumann, Some Applications of the 3+1 Formalism of General Relativity, Helv.Phys.Acta 61, 1027 (1988).
- [8] Siehe z.B. Ref. [6], Kapitel VII.
- [9] Einzelheiten findet man in Ref. [6], Kapitel V.
- [10] T. Damour, Phys.Rev.D18, 3598, (1978); Ph.D.diss., Université de Paris (1979).
- [11] K.S. Thorne and D.A. Macdonald, Mon.Not.Roy. Astron.Soc. 198, 339 (1982).
- [12] K.S. Thorne, R.H. Price and D.A. Macdonald, Black Holes: The Membran Paradigm, Yale Univ. Press (1986).
- [13] R.D. Blandford and R.L. Znajek, Mon.Not.Roy.Astron.Soc. 179, 433 (1977)
- [14] H.P. Künzle and A.K.M. Masood-ul-Alam, J.Math.Phys.31, 928 (1990); P. Bizon, Phys.Rev.Lett. 64, 2844 (1990); M.S. Volkov and D.V. Gal'tsov, Sov.J.Nucl.Phys.51, 1171 (1990).
- [15] N. Straumann and Z.H. Zhou, Phys.Lett. B243, 33 (1990); N. Straumann and Z.H. Zhou, to be published in Nuclear Physics B (1991).