Die Streuung schneller Elektronen an Kernen

Autor(en): **Jauch, J.M.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **13 (1940)**

Heft VI

PDF erstellt am: **27.04.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-111074

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Die Streuung schneller Elektronen an Kernen

von **J. M. Jauch**, Zürich.

(26. X. 40.)

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, dass es nicht möglich ist, die anomale elastische Streuung von schnellen Elektronen an Atomkernen, wie sie z. B. für den Stickstoffkern vorliegt, zu erklären, entweder durch die Annahme einer zur Coulomb'schen Anziehung hinzukommenden statischen Zusatzkraft zwischen schweren Teilchen und Elektronen, oder durch die magnetische Streuung der Elektronen durch das magnetische Moment des Kernes. Die Möglichkeiten für eine Zusatzkraft sind beschränkt durch die Bedingung, dass die Spektralterme dadurch nahezu unbeobachtbar beeinflusst werden sollen.

§ 1. Einleitung.

Die Versuche über die Einzelstreuung schneller Elektronen (d. h. mit Energien $> 0{,}5$ MV.) an Atomkernen zeigen fast durchwegs Resultate, welche mit der bisherigen Theorie nicht übereinstimmen. Die relativistisch-wellenmechanische Theorie für die Streuung schneller Elektronen an Kernen stammt von MOTT[1]). MOTT findet für die Streuung in einem Coulombfeld den differentiellen Wirkungsquerschnitt

$$I(\vartheta) = \left(\frac{Ze^2}{2mv^2}\right)^2 (1-\beta^2)\left(1-\beta^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)\frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}} \qquad (1)$$

worin m, v die Ruhemasse bzw. Geschwindigkeit des Elektrons bezeichnet und $\beta = v/c$ gesetzt ist. In dieser Formel sind zwar Grössen von der Ordnung α $\left(\alpha = \frac{Ze^2}{\hbar c} = \frac{Z}{137}\right)$ gegen 1 vernachlässigt, doch beträgt der Fehler für die leichten Elemente, etwa bis Aluminium weniger als 1%. Bei schweren Elementen muss der nächste Term in α noch mitberücksichtigt werden.

KLARMANN und BOTHE[2]) fanden aus Einzelstreuversuchen an Xenon und Krypton etwa dieselbe Winkelverteilung, wie sie aus der MOTT'schen Formel folgt. Dagegen finden sie für die Absolutwerte der Streuung im Energiebereich 0,5—2,6 MV. bei Xenon

[1]) N. F. MOTT, Proc. Roy. Soc. **124**, 425 (1929); Proc. Roy. Soc. **135**, 429 (1932). Siehe auch F. SAUTER, Ann. d. Phys. **18**, 61 (1933).

[2]) KLARMANN und BOTHE, Zs. f. Phys. **101**, 489 (1936).

etwa fünfmal weniger und bei Krypton etwa sechsmal weniger als nach MOTT. Ähnliche Diskrepanzen finden BARBER und CHAMPION[1]) an Hg, wo die Streuung für den Energiebereich 0,4—1,6 MV etwa ein Sechstel des MOTT'schen Wertes betragen soll. Jod streut nach denselben Autoren etwa $^2/_5$ des theoretischen Wertes. Neuerdings sind von BOTHE und RATZEL[2]) sehr sorgfältige Versuche über Elektronenstreuung an Aluminium- und Nickelfolien unter konstantem Streuwinkel gemacht worden. Darnach streut z. B. Aluminium 2,4 MV Elektronen zweimal so stark, wie nach der Theorie zu erwarten wäre.

Bei weitem das krasseste Beispiel liefert jedoch der Stickstoff. Im Jahre 1936 berichteten SKOBELZYN und STEPANOWA[3]) zum ersten Male über Streuversuche an Stickstoff in der Wilsonkammer. Nach diesen Autoren ist die Gesamtstreuung für Elektronen des Bereiches 0,2—1,1 MV etwa 1,5 mal für 1,1—3,0 MV etwa 30 mal die theoretische Streuung. Besonders stark ist die Abweichung bei grossen Streuwinkeln. Im Widerspruch dazu findet CHAMPION[4]) die Streuung an Stickstoff im Energiebereich 0,4—1,1 MV. etwa entsprechend der Theorie[5]). Die Versuche an Stickstoff sind von BOSSHARD[6]) mit der Wilsonkammermethode wiederholt worden, und es ergab sich, dass der Stickstoffkern tatsächlich eine starke Anomalie aufweist. Für kleinere Energien ist die Streuung unternormal, während sie für grosse Energien und grosse Streuwinkel bis zum 10—20fachen des theoretischen Wertes ansteigt.

Ausser bei der elastischen Streuung zeigen sich auch noch Anomalien bei der unelastischen Streuung und bei Doppelstreuung. So fanden bereits KLARMANN und BOTHE[7]) eine sechsmal zu grosse unelastische Streuung an Xenon und Krypton. Dieses Resultat ist von andern Autoren bestätigt[8]) und auch bei andern Kernen gefunden worden[9]). Dies ist besonders schwerwiegend, da die überschüssige Energie nicht einfach in der Bremsstrahlung wieder-

[1]) BARBER und CHAMPION, Proc. Roy. Soc **168**, 159 (1938).

[2]) BOTHE und RATZEL, Zs. f. Phys. **115**, 497 (1940).

[3]) SKOBELZYN und STEPANOWA, Nature **137**, 456 (1936); Phys. Zs. d. Sovjetunion **12**, 550 (1937).

[4]) CHAMPION, Proc. Roy. Soc. **153**, 353 (1936).

[5]) Die Ursache dieses Widerspruches ist uns nicht bekannt.

[6]) BOSSHARD, Helv. Phys. Acta, in Vorbereitung.

[7]) KLARMANN und BOTHE l. c.

[8]) SEN GUPTA, Phys. Soc. Proc. **51**, 355 (1939).

[9]) SKOBELZYN und STEPANOWA, Nature **137**, 234 (1936). — BARBER and CHAMPION, Proc. Roy. Soc. **168**, 159 (1939). — LEPRINCE-RINGUET, Ann. de phys. **7**, 5 (1937). — LASLETT und HURST, Phys. Rev. **52**, 1035 (1937). — RUHLIG and CRANE, Phys. Rev. **53**, 618 (1938).

gefunden wird. Vielmehr ist die Intensität der Bremsstrahlung ungefähr nach der BETHE-HEITLER'schen Formel gefunden worden[1]).

Ebenfalls hierher gehört vielleicht die Abwesenheit einer Asymmetrie bei Doppelstreuung infolge Elektronenpolarisation. Nach der MOTT'schen Theorie sollte nämlich ein Elektronenstrahl nach einer elastischen Streuung unter 90^0 teilweise polarisiert sein, so dass bei einer zweiten Streuung die Streuintensität vom Azimuthwinkel abhängen würde. Experimente von DYMOND[2]) und RICHTER[2]) ergaben jedoch negative Resultate.

Alle diese Abweichungen deuten auf einen Einfluss des Kernes auf die Bewegung der Elektronen, der von anderer Art ist als die COULOMB'sche Anziehungskraft. Es fragt sich nun, ob zwischen Elektronen und schweren Teilchen eine statische Zusatzkraft von kurzer Reichweite wirksam ist, etwa von der Art der Kernkräfte zwischen Protonen und Protonen, wobei aber relativistische Effekte mitberücksichtigt werden müssen, weil sie hier ganz wesentlich sind. Als Ausgangspunkt dient die relativistische Wellengleichung von DIRAC, welche in der bekannten Weise in radiale und Winkelbestandteile aufgespalten wird. Für das Zusatzpotential führen wir die vereinfachende Annahme eines Kastenpotentials ein, mit der Tiefe $V_0 = \mu m c^2$ und der Reichweite $r_0 = \sigma \frac{e^2}{m c^2}$. Ein anderes Potential im Innern würde unsere Resultate quantitativ, jedoch nicht qualitativ verändern. Insbesondere bleibt unsere Schlussfolgerung über die Unzulänglichkeit eines Potentials mit kurzer Reichweite zur Erklärung der Diskrepanz zwischen Theorie und Experiment bestehen.

Da wir für unsere Untersuchung nur die elastische Streuung an leichten Kernen ins Auge fassen wollen, werden wir im Laufe der Rechnung alle Formeln nach Potenzen von α entwickeln und nach der ersten Potenz abbrechen. Das entspricht der Genauigkeit der Formel (1) und wir werden deshalb für unsere Resultate denselben Gültigkeitsbereich erwarten wie für (1).

Ein ähnliches Problem ist vor kurzem von M. E. ROSE[4]) behandelt worden. Jedoch sind die dort erhaltenen Formeln für unsern Fall nicht anwendbar ($\alpha^2 \ll 1$), da der Ausdruck (20) bei ROSE für $\alpha \longrightarrow 0$ unendlich wird. Ausserdem sind bei ROSE die

---

[1]) STAHEL und KIPFER, Helv. Phys. Acta **8**, 508 (1935); **9**, 492 (1936).
[2]) DYMOND, Proc. Roy. Soc. **136**, 638 (1932); **145**, 657 (1934).
[3]) H. RICHTER, Ann. d. Phys. **28**, 533 (1937).
[4]) M. E. ROSE, Phys. Rev. **57**, 285 (1940).

Funktionen χ und $\overline{\chi}$ nicht richtig bestimmt, indem diese nicht die DIRAC'sche Differentialgleichung erster Ordnung befriedigen[1]).

Im § 2 werden wir die radialen Eigenfunktionen und ihr asymptotisches Verhalten für grosse und kleine r bestimmen. Im § 3 werden wir die Streuung berechnen und abschätzen. Der § 4 enthält die Berechnung der Energie für die 1 S- und 2 S-Zustände im Coulombfeld mit Zusatzpotential. Der § 5 enthält die Diskussion der Resultate. Schliesslich werden wir im § 6 noch die Grösse der magnetischen Streuung berechnen.

§ 2. Die radialen Eigenfunktionen.

Wir führen die folgenden Abkürzungen ein:

$\varepsilon = \dfrac{E}{mc^2} > 1$, wobei E die gesamte Energie des Elektrons ist.

$\mu = \dfrac{V}{mc^2}$, V ist das Potential.

$$\lambda = \frac{\hbar}{mc}\,; \quad \alpha = \frac{Ze^2}{\hbar c}\,; \quad \varrho = \frac{r}{\lambda}(\varepsilon^2-1)^{1/2}$$

$$r_0 = \tau\lambda = \sigma\frac{e^2}{mc^2}\,; \quad a = \frac{\alpha\varepsilon}{(\varepsilon^2-1)^{1/2}} = \frac{\alpha}{\beta}\,;$$

$$b = \frac{\alpha}{(\varepsilon^2-1)^{1/2}} = a(1-\beta^2)^{1/2}\,; \quad \tau \ll 1, \quad \mu \gg 1.$$

In den erwähnten Arbeiten hat MOTT gezeigt, dass es eine Lösung der DIRAC'schen Gleichung in einem Coulombfeld gibt, deren dritte und vierte Komponente das asymptotische Verhalten

$$\left.\begin{aligned} \psi_3(\varrho,\vartheta) &\sim e^{i[\varrho\cos\vartheta + a\ln(1-\cos\vartheta)\varrho]} + \frac{1}{\varrho}f(\vartheta)\,e^{i(\varrho + a\ln 2\varrho)} \\ \psi_4(\varrho,\vartheta) &\sim \frac{1}{\varrho}g(\vartheta)\,e^{i(\varrho + a\ln 2\varrho)}\,e^{i\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

haben. Es entspricht dies dem asymptotischen Verhalten einer einfallenden (durch das Coulombfeld gestörten) ebenen Welle und einer ausgehenden gestreuten Kugelwelle. Der differentielle Streuquerschnitt ist dann gegeben durch

$$I(\vartheta) = \frac{1}{|\vec{k}|^2}\{|f(\vartheta)|^2 + |g(\vartheta)|^2\} \tag{3}$$

[1]) Auf diesen Punkt hat mich Herr Prof. PAULI freundlichst aufmerksam gemacht.

worin $\vec{k}$ den Wellenzahlvektor bezeichnet. Die Lösung mit dem asymptotischen Verhalten (2) wird dargestellt durch die Reihen

$$\left.\begin{aligned}\psi_3 &= i\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\varkappa}(\varkappa+1)\,e^{i\eta_\varkappa}\,G_\varkappa P_\varkappa(\cos\vartheta)\\ \psi_4 &= -i\sum_{\varkappa=-\infty}^{+\infty}(-1)^{\varkappa}e^{i\eta_\varkappa}\,G_\varkappa P_\varkappa^1(\cos\vartheta)\,.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die $G_\varkappa$ sind die quadratisch integrierbaren Lösungen des Gleichungspaares

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{d}{d\varrho}-\frac{\varkappa}{\varrho}\right)G_\varkappa &= -\frac{\varepsilon-\mu+1}{(\varepsilon^2-1)^{1/2}}F_\varkappa\\ \left(\frac{d}{d\varrho}+\frac{2+\varkappa}{\varrho}\right)F_\varkappa &= \frac{\varepsilon-\mu-1}{(\varepsilon^2-1)^{1/2}}G_\varkappa\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

mit dem asymptotischen Verhalten

$$G_\varkappa \sim \frac{1}{\varrho}\cos(\varrho + a\ln 2\varrho + \eta_\varkappa) \qquad \varrho \gg 1 \tag{6}$$

wobei die Phasenverschiebung $\eta_\varkappa$ für ein Coulombfeld gegeben ist durch

$$\eta_\varkappa = e^{-i\pi\gamma_\varkappa}\,\frac{\varkappa+1+ib}{\gamma_\varkappa+ia}\,\frac{\Gamma(\gamma_\varkappa-ia)}{\Gamma(\gamma_\varkappa+ia)} \tag{7}$$

mit $\gamma_\varkappa = [(\varkappa+1)^2-\alpha^2]^{1/2}$.

Die $P_\varkappa(\cos\vartheta)$ sind die LEGENDRE'schen Polynome

$$\left.\begin{aligned}P_\varkappa(\cos\vartheta) &= \frac{1}{2^\varkappa}\left(\frac{d}{d(\cos\vartheta)}\right)^{\varkappa}(\cos^2\vartheta-1)^{\varkappa}\\ P_\varkappa^1(\cos\vartheta) &= \sin\vartheta\,\frac{d}{d(\cos\vartheta)}\,P_\varkappa(\cos\vartheta)\end{aligned}\right\}\ \text{für}\ \varkappa\geqq 0$$

$$\left.\begin{aligned}P_\varkappa &= P_{-\varkappa-1}\\ P_\varkappa^1 &= P_{-\varkappa-1}^1\end{aligned}\right\}\ \text{für}\ \varkappa<0$$

Der Wert des Bahndrehimpulses l und des totalen Drehimpulses $j = l \pm 1/2$ für die verschiedenen Werte von $\varkappa$ ergibt sich aus der folgenden Tabelle.

	s	p		d		
l:	0	1	1	2	2	$\cdots$
j:	$1/2$	$1/2$	$3/2$	$3/2$	$5/2$	$\cdots$
$\varkappa$:	0	-2	$+1$	-3	$+2$	$\cdots$

Wir nennen diese durch (5) und (6) definierten $G_\varkappa$ die reguläre Lösung von (5). Wir nehmen nun an, der Einfluss des Kernes auf das Elektron lasse sich durch folgendes Potential beschreiben:

$$\text{Aussenraum:} \quad \mu(r) = -\frac{\alpha\lambda}{r} \left(V = -\frac{Ze^2}{r}\right) \text{für } r > r_0$$

$$\text{Innenraum:} \quad \mu(r) = \mu = \text{konstant für } r < r_0.$$

Die Lösungen von (5) im Innenraum wollen wir mit $f_\varkappa$ bzw. $g_\varkappa$ bezeichnen, während wir für die Lösung im Aussenraum die Bezeichnung $F_\varkappa'$ und $G_\varkappa'$ einführen. Die Lösungen $F_\varkappa', G_\varkappa'$ sind dann diejenigen irregulären Lösungen von (5), welche sich bei ϱ_0 stetig an $f_\varkappa, g_\varkappa$ anschliessen. In der DIRAC'schen Theorie setzt sich nämlich der Strom bilinear aus den Komponenten der Wellenfunktion zusammen. Es ist nun physikalisch notwendig, einen stetigen Strom zu verlangen. Das ist nur dann möglich, wenn beide Komponentenfunktionen an der Stelle ϱ_0 stetig verlaufen. Letzteres kann erreicht werden, wenn

$$f/g = F'/G' \tag{9}$$

Dann können nämlich die innern Wellenfunktionen mit einem gemeinsamen Faktor normiert werden, so dass sie sich bei ϱ_0 stetig anschliessen[1]).

---

[1]) ROSE verwendet in seiner erwähnten Arbeit eine andere Grenzbedingung:

$$\frac{dg}{d\varrho}\Big/ g = \frac{dG'}{d\varrho}\Big/ G' \tag{9'}$$

sofern das Potential am kritischen Radius ϱ_0 stetig verläuft, sind beide Bedingungen äquivalent. Es ist nämlich (Gl. 5):

$$\frac{dg}{d\varrho}\Big/ g = \left(\frac{\varkappa}{\varrho} - \frac{\varepsilon - \mu_- + 1}{(\varepsilon^2-1)^{1/2}}\right) f/g$$

$$\frac{dG'}{d\varrho}\Big/ G' = \left(\frac{\varkappa}{\varrho} - \frac{\varepsilon - \mu_+ + 1}{(\varepsilon^2-1)^{1/2}}\right) F'/G'$$

dabei haben wir mit μ_- und μ_+ den Wert des Potentials innerhalb bzw. ausserhalb des kritischen Radius bezeichnet. Falls nun μ_- und μ_+ für $\varrho \longrightarrow \varrho_0$ denselben Grenzwert haben, das Potential also stetig verläuft, folgt aus (9') sofort (9) und umgekehrt. Das ist jedoch nicht der Fall, wenn das Potential unstetig verläuft. (9') hat in diesem Falle zur Folge, dass f und g nie beide gleichzeitig stetig verlaufen können. Falls nämlich g stetig verläuft, dann ist wegen (9') auch die erste Ableitung von g stetig. In der ersten Gleichung von (5) verläuft dann die ganze linke Seite stetig, also muss auch die rechte Seite stetig sein. Nun erleidet aber μ und infolgedessen auch f bei ϱ_0 einen Sprung, d. h. f muss notwendig unstetig verlaufen*). Die Bedingung (9') ist deshalb in diesem Fall als physikalisch sinnlos zu verwerfen.

*) Ganz analog schliesst man aus der Stetigkeit von f auf die Unstetigkeit von g.

Wir werden verlangen, dass das asymptotische Verhalten von $G_\varkappa'$ für $\varrho \gg 1$ gegeben ist durch

$$G_\varkappa' \sim \frac{e^{i\eta_\varkappa'}}{\varrho} \cos\,(\varrho + a \ln 2\,\varrho + \eta_\varkappa + \eta_\varkappa'). \tag{6'}$$

Der Phasenfaktor $e^{i\eta_\varkappa'}$ muss dazu gefügt werden, damit die Lösungen, die man formal mittels der Beziehung (4) aus den $G_\varkappa'$ bildet, wieder dasselbe asymptotische Verhalten (2) zeigen.

$$\left.\begin{aligned} \psi_3'(\varrho,d) &\sim e^{i\,[\varrho\cos\vartheta + \alpha \ln(1-\cos\vartheta)\,\varrho]} + \frac{1}{\varrho} f'(\vartheta)\; e^{i\,(\varrho + \alpha \ln 2\,\varrho)} \\ \psi_4'(\varrho,\vartheta) &\sim \frac{1}{\varrho} g'(\vartheta)\; e^{i\,(\varrho + \alpha \ln 2\,\varrho)}\, e^{i\varrho} \end{aligned}\right\} \tag{2'}$$

mit den neuen Funktionen $f'(\vartheta)$ und $g'(\vartheta)$.

Es wird sich zeigen, dass wegen der kurzen Reichweite unserer Kräfte ($\sigma \sim 1$) nur η_{-2}' und η_0' wesentlich von Null verschieden sind. Unter dieser Annahme lassen sich die $f'(\vartheta)$ und $g'(\vartheta)$ leicht durch die η_0', η_{-2}' ausdrücken. Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} f'(\vartheta) &= f(\vartheta) + \Phi_f(\vartheta) \\ g'(\vartheta) &= g(\vartheta) + \Phi_g(\vartheta) \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

und erhalten dann vermöge (4) für Φ_f und Φ_g:

$$\left.\begin{aligned} \Phi_f(\vartheta) &= e^{2i\eta_0}\frac{\xi_0}{1+i\,\xi_0} - e^{2i\eta_{-2}}\frac{\xi_{-2}}{1+i\,\xi_{-2}}\cos\vartheta \\ \Phi_g(\vartheta) &= -\,e^{2i\eta_{-2}}\frac{\xi_{-2}}{1+i\xi_{-2}}\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

dabei ist $\xi_\varkappa = -\operatorname{tg}\eta_\varkappa'$ gesetzt. Für das Verhältnis $R = I'/I$ des Streuquerschnittes zum Mott'schen Wert findet man dann

$$R(\vartheta) = \frac{|f+\Phi_f|^2 + |g+\Phi_g|^2}{|f|^2 + |g|^2} \tag{12}$$

Um die oben definierten irregulären Lösungen $F_\varkappa', G_\varkappa'$ zu bestimmen, ist es nötig, zuerst die richtig normierten Lösungen $F_\varkappa$, $G_\varkappa$ für das Coulombfeld allein aufzustellen. Man setzt in bekannter Weise[1]):

$$\begin{aligned} F &= N\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2}\frac{e^{-i\varrho}}{\varrho}(\varphi_2 - \varphi_1) \\ G &= N\frac{e^{-i\varrho}}{i\varrho}(\varphi_2 + \varphi_1) \end{aligned} \tag{13}$$

[1]) Vgl. z. B. Bethe, Handb. d. Phys., Bd. 24/1, S. 313.

wobei φ_1, φ_2 das System

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{d\varrho} &= (i+a)\varphi_1 + \left(\frac{\varkappa+1}{\varrho} + b\right)\varphi_2 \\ \frac{d\varphi_2}{d\varrho} &= \left(\frac{\varkappa+1}{\varrho} - b\right)\varphi_1 - a\varphi_2 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

befriedigt. Die Lösungen sind:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= (\gamma + ia)(2i\varrho)^\gamma F(\gamma + ia + 1;\ 2\gamma + 1;\ 2i\varrho) \\ \varphi_2 &= (\varkappa + 1 - ib)(2i\varrho)^\gamma F(\gamma + ia;\ 2\gamma + 1;\ 2i\varrho) \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

γ ist eine der beiden Wurzeln $\gamma = \pm[(\varkappa+1)^2 - \alpha^2]^{1/2}$. $F(\alpha, \beta, x)$ steht für die konfluente hypergeometrische Funktion, definiert durch die Reihe

$$F(\alpha,\beta,x) = 1 + \frac{\alpha}{\beta}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\beta(\beta+1)}x^2 + \cdots \tag{16}$$

Sie befriedigt die Differentialgleichung[1])

$$x^2\frac{d^2F}{dx^2} - (x-\beta)\frac{dF}{dx} + \alpha F = 0 \tag{17}$$

Die zur negativen Wurzel γ gehörige Lösung schreiben wir dann explizite, indem wir immer $\gamma > 0$ festlegen:

$$\left.\begin{aligned} \bar{\varphi}_1 &= (-\gamma + ia)(2i\varrho)^{-\gamma} F(-\gamma + ia + 1;\ -2\gamma + 1;\ 2i\varrho) \\ \bar{\varphi}_2 &= (\varkappa + 1 - ib)(2i\varrho)^{-\gamma} F(-\gamma + ia;\ -2\gamma + 1;\ 2i\varrho) \end{aligned}\right\} \tag{$\overline{15}$}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \bar{F} &= \bar{N}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2}(\bar{\varphi}_2 - \bar{\varphi}_1)\frac{e^{-i\varrho}}{\varrho} \\ \bar{G} &= \bar{N}\frac{e^{-i\varrho}}{i\varrho}(\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}_1) \end{aligned}\right\} \tag{$\overline{13}$}$$

N und $\bar{N}$ sind Normierungsfaktoren, über die wir noch verfügen können. Um sie zu bestimmen, untersuchen wir das asymptotische Verhalten von F, G; $\bar{F}$, $\bar{G}$. Das asymptotische Verhalten dieser Funktionen ist bestimmt durch das Verhalten der Funktion $F(\alpha,\beta,x)$. Nach Gordon[2]) ist

$$F(\alpha,\beta,x) \sim \Gamma(\beta)\left\{\frac{(-x)^{-\alpha}}{\Gamma(\beta-\alpha)} + \frac{e^x x^{\alpha-\beta}}{\Gamma(\alpha)} + \cdots\right\} \text{für } |x| \gg 1 \tag{18}$$

---

[1]) Whittaker and Watson, Modern Analysis, 4th ed., p. 338.

[2]) Gordon, Zs. f. Phys. **48**, 187 (1928).

wenn wir setzen

$$N = \frac{1}{\Gamma(2\gamma+1)}\, i^{-\gamma+1}\, e^{\frac{\pi}{2}a-i\delta}\left|\frac{\Gamma(1+\gamma-ia)}{\varkappa+1-ib}\right|$$
$$\overline{N} = \frac{1}{\Gamma(-2\gamma+1)}\, i^{\gamma+1}\, e^{\frac{\pi}{2}a-i\overline{\delta}}\left|\frac{\Gamma(1-\gamma-ia)}{\varkappa+1-ib}\right| \qquad (19)$$
$$\operatorname{tg} 2\delta = \frac{a(\varkappa+1)-\gamma b}{\gamma(\varkappa+1)+ab};\quad \operatorname{tg} 2\overline{\delta} = \frac{a(\varkappa+1)+\gamma b}{-\gamma(\varkappa+1)+ab}$$

folgt aus (18)

$$\left.\begin{aligned} F_\varkappa &\sim \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2}\frac{1}{\varrho}\sin(\varrho + a\ln 2\varrho + \eta_\varkappa)\\ G_\varkappa &\sim \frac{1}{\varrho}\cos(\varrho + a\ln 2\varrho + \eta_\varkappa)\\ \overline{F}_\varkappa &\sim \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2}\frac{1}{\varrho}\sin(\varrho + a\ln 2\varrho + \overline{\eta}_\varkappa)\\ \overline{G}_\varkappa &\sim \frac{1}{\varrho}\cos(\varrho + a\ln 2\varrho + \overline{\eta}_\varkappa) \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

$$\left.\begin{aligned} e^{2i\eta_\varkappa} &= e^{-i\pi\gamma_\varkappa}\,\frac{\varkappa+1+ib}{\gamma_\varkappa+ia}\,\frac{\Gamma(\gamma_\varkappa-ia)}{\Gamma(\gamma_\varkappa+ia)}\\ e^{2i\overline{\eta}_\varkappa} &= e^{i\pi\gamma_\varkappa}\,\frac{\varkappa+1+ib}{-\gamma_\varkappa+ia}\,\frac{\Gamma(-\gamma_\varkappa-ia)}{\Gamma(-\gamma_\varkappa+ia)} \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

Wenn wir einführen

$$\left.\begin{aligned} \Delta_\varkappa &= \overline{\eta}_\varkappa - \eta_\varkappa\\ \underline{G}_\varkappa &= \operatorname{cotg}\Delta_\varkappa\cdot G_\varkappa - \frac{1}{\sin\Delta_\varkappa}\,\overline{G}_\varkappa\\ \underline{F}_\varkappa &= \operatorname{cotg}\Delta_\varkappa\cdot G_\varkappa - \frac{1}{\sin\Delta_\varkappa}\,\overline{F}_\varkappa \end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

so wird für $|\varrho| \gg 1$

$$\left.\begin{aligned} \underline{G}_\varkappa &\sim \frac{1}{\varrho}\sin(\varrho + a\ln 2\varrho + \eta_\varkappa)\\ \underline{F}_\varkappa &\sim -\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2}\frac{1}{\varrho}\cos(\varrho + a\ln 2\varrho + \eta_\varkappa) \end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Definieren wir nun

$$\left.\begin{aligned} G_\varkappa' &= e^{i\eta_\varkappa'}\cdot(G_\varkappa - \xi_\varkappa\underline{G}_\varkappa)\\ F_\varkappa' &= \varepsilon^{i\eta_\varkappa'}(F_\varkappa - \xi_\varkappa\underline{F}_\varkappa) \end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

so haben die $G_\varkappa'$ das richtige asymptotische Verhalten (6'). $\eta_\varkappa'$ bzw. $\xi_\varkappa = -\operatorname{tg}\eta_\varkappa'$ bestimmt sich dann vermöge (9) durch

$$\xi_\varkappa = \left(\frac{F_\varkappa - \zeta_\varkappa G_\varkappa}{\underline{F_\varkappa} - \zeta_\varkappa \underline{G_\varkappa}}\right)_{r=r_0} \tag{25}$$

wo $\zeta_k = \frac{f_\varkappa}{g_\varkappa}$ und $f_\varkappa$, $g_\varkappa$ die noch anzugebenden Eigenfunktionen für das Innengebiet sind.

§ 3. Berechnung der Streuung.

Mittelst der Gleichungen (12), (11) und (25) ist die Streuung ausgedrückt durch ζ und den Wert der Funktionen F, G; $\underline{F}$, $\underline{G}$ am kritischen Radius $r = r_0$. Wir berechnen zuerst diese Werte. Wegen $\Delta_\varkappa = \bar{\eta}_\varkappa - \eta_\varkappa$ wären es komplizierte Funktionen von α. Wir werden deshalb an dieser Stelle die Entwicklung nach α einführen und mit dem linearen Term abbrechen. Da $\gamma_0 = \gamma_{-2} = \gamma$ folgt aus (21) auch $\Delta_0 = \Delta_{-2} = \Delta$; nach (21) ist nämlich

$$2\,\bar{\eta}_0 = \pi + b - \pi + a + \arg\frac{\Gamma(-\gamma - ia)}{\Gamma(-\gamma + ia)}$$

$$2\,\eta_0 = -\pi + b - a + \arg\frac{\Gamma(\gamma - ia)}{\Gamma(\gamma + ia)}$$

Also

$$2\,\Delta = 2\,a + \pi + \arg\frac{\Gamma(-\gamma - ia)\,\Gamma(\gamma+ia)}{\Gamma(-\gamma + ia)\,\Gamma(\gamma - ia)}$$

wobei γ, a, α, β die zu Beginn des § 2 angegebene Bedeutung haben.

$$\arg\frac{\Gamma(-\gamma - ia)\,\Gamma(\gamma+ia)}{\Gamma(-\gamma+ia)\,\Gamma(\gamma - ia)} = 2\arg\Gamma(-1+\tfrac{1}{2}\alpha^2 - ia)\,\Gamma(1-\tfrac{1}{2}\alpha^2+ia)$$

$$= 2\operatorname{arc\,tg}\frac{2\,a}{\alpha^2} - 2\,a = \pi - \alpha\beta - 2\,a$$

$$\Delta = -\frac{\alpha\beta}{2} + \cdots \tag{26}$$

Die Entwicklung der regulären Funktionen für kleine Kernabstände bietet keine Schwierigkeiten. Aus (13) (15) (16) und (19) folgt für

$$\varrho \ll 1,\ \alpha^2 \ll 1 \qquad\qquad N = 1$$

$$\left.\begin{aligned} G_0 &\sim 1 & G_{-2} &\sim \tfrac{1}{2}(a-b) + \frac{\varrho}{3} \\ F_0 &\sim \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2}\left\{\tfrac{1}{2}(b+a) + \frac{\varrho}{3}\right\} & F_{-2} &\sim -\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Dagegen muss man für die irregulären Funktionen in $\overline{N}$ einen Grenzübergang machen, da darin sowohl $\Gamma(-2\gamma+1)$ als auch $\Gamma(1-\gamma-ia)$ für $\alpha \longrightarrow 0$ singulär werden. Wir erhalten für

$$\overline{N} = \begin{cases} -i\alpha\beta & \text{für} \quad \varkappa = 0 \\ \alpha\beta & \text{für} \quad \varkappa = -2 \end{cases} \tag{28}$$

Vermöge (28) (16) (13) (22) ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} \overline{G}_0 &\sim -\frac{\alpha\beta}{2\varrho} + 1 + \cdots \\ \overline{F}_0 &\sim \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2} \frac{\alpha\beta}{2\varrho^2} + \cdots \\ \overline{G}_{-2} &\sim -\frac{\alpha\beta}{2\varrho^2} + \cdots \\ \overline{F}_{-2} &\sim \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2} \left\{\frac{\alpha\beta}{2\varrho} - 1\right\} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Schliesslich berechnen wir noch daraus die Funktionen $\underline{F}\,\underline{G}$ vermöge Gleichungen (22) und (26)

$$\left.\begin{aligned} \underline{G}_0 &\sim -\frac{1}{\varrho} \\ \underline{F}_0 &\sim -\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2} \frac{1}{\varrho^2} \\ \underline{G}_{-2} &\sim -\frac{1}{\varrho^2} \\ \underline{F}_{-2} &\sim \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2} \frac{1}{\varrho} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Wir haben darin nur die niedersten Potenzen von α und ϱ beibehalten.

Wir wollen jetzt weiter den Wert von ζ berechnen. Zu dem Zweck müssen wir diejenigen Lösungen der Gleichungen (5) für das Innengebiet bestimmen, welche die Eigenschaft haben für, $\varrho = 0$ regulär zu sein. Diese Lösungen sind

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{f}_0 &= (\varepsilon-\mu-1)^{1/2}\, \varrho'^{-1/2}\, J_{3/2}(\varrho') \\ g_0 &= (\varepsilon-\mu+1)^{1/2}\, \varrho'^{-1/2}\, J_{1/2}(\varrho') \\ f_{-2} &= (\varepsilon-\mu-1)^{1/2}\, \varrho'^{-1/2}\, J_{1/2}(\varrho') \\ g_{-2} &= -(\varepsilon-\mu+1)^{1/2}\, \varrho'^{-1/2}\, J_{3/2}(\varrho') \\ \varrho' &= [(\varepsilon-\mu)^2-1]^{1/2}\frac{r}{\lambda} \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Also wird

$$\left.\begin{aligned}\zeta_0 &\equiv \left(\frac{f_0}{g_0}\right)_{\varrho'=\varrho_0'} = \left(\frac{\varepsilon-\mu-1}{\varepsilon-\mu+1}\right)^{1/2}\left(\frac{J_{3/2}}{J_{1/2}}\right)_{\varrho'=\varrho_0'} \\ \zeta_{-2} &\equiv \left(\frac{f_{-2}}{g_{-2}}\right)_{\varrho'=\varrho_0'} = -\left(\frac{\varepsilon-\mu-1}{\varepsilon-\mu+1}\right)^{1/2}\left(\frac{J_{1/2}}{J_{3/2}}\right)_{\varrho'=\varrho_0'}\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Die halbzahligen Besselfunktionen, welche hier auftreten, sind elementare Funktionen. Wir schreiben

$$\zeta(x) = \frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x = \frac{J_{3/2}(x)}{J_{1/2}(x)}. \tag{31}$$

Wenn wir (27) (27) und (30) in (25) einsetzen, so wird schliesslich nach einiger Umformung, solange $|\mu| \gg 1$ ist:

$$\left.\begin{aligned}\xi_0 &= -\tau^2(\varepsilon^2-1)\,\frac{\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{3}\tau(\varepsilon^2-1)^{1/2}+\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)^{1/2}\zeta(\mu\tau)}{1+(\varepsilon+1)\tau\zeta(\mu\tau)} \\ \xi_{-2} &= -\tau^2(\varepsilon^2-1)\,\frac{\frac{1}{2}(a-b)+\frac{1}{3}\tau(\varepsilon^2-1)^{1/2}+\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^{1/2}\zeta(\mu\tau)}{1+(\varepsilon-1)\tau\zeta(\mu\tau)}\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Wenn wir in Gleichung (31) von dem Term $1/x$ absehen, so verläuft $\zeta(x)$ periodisch mit der Periode π. Es folgt daraus, dass auch ξ_0 und ξ_{-2} für veränderliches μ und konstantes τ periodisch verlaufen, und zwar unabhängig vom Vorzeichen von μ. Wir werden später sehen, dass die Streuung jedesmal für $|\mu\tau| = n\pi$ durch ein ausgesprochenes Maximum geht. Dies ist anders als in der unrelativistischen Theorie, wo sich die Streuung für unbegrenzt wachsendes $\mu > 0$ einem endlichen Grenzwert, nämlich der Streuung durch eine kleine undurchdringliche Kugel nähert. Es ist dies darauf zurückzuführen, dass für grosse μ die DIRAC'schen Wellenfunktionen im Innengebiet nicht etwa exponentiell abklingen, wie das bei den unrelativistischen Schrödingerfunktionen der Fall ist, sondern wie man aus (29) ersieht, oszillatorisch verlaufen. Nach dem KLEIN'schen Paradoxon[1]) ist nämlich ein sehr hoher Potentialsprung ($\mu > mc^2$) für ein DIRAC'sches Elektron nicht undurchdringlich, sondern es besteht eine endliche Durchdringungswahrscheinlichkeit, wobei das Elektron dann im Innengebiet in einem Zustand negativer Energie erscheint. Dass diese Zustände zur Streuung wesentlich beitragen, ist ein interessantes Resultat und gibt vielleicht eine prinzipielle Möglichkeit die physikalische Realität solcher Zustände experimentell zu prüfen. Die weitere Diskussion der Gleichungen (32) verschieben wir auf § 5.

[1]) O. KLEIN, Zs. f. Phys. **55**, 157 (1929).

§ 4. Die Eigenwerte der Energie für den 1S- und 2S-Zustand.

Die radialen Eigenfunktionen $\underline{F}, \underline{G}$ im Aussenraum $(r > r_0)$ sind bestimmt durch die „Randbedingung", dass sie im Unendlichen verschwinden sollen, damit sie quadratisch integrierbar werden. Die Eigenart der Energie ε tritt darin zunächst noch als ein unbestimmter Parameter auf. Ohne Zusatzpotential ist dieser Wert bestimmt durch die Forderung, dass die Funktionen für $r = 0$ regulär sein sollen. Diese Bedingung wird jetzt ersetzt durch

$$\zeta = \left(\frac{\underline{F}}{\underline{G}}\right)_{r=r_0} \tag{33}$$

wobei wieder $\zeta = \left(\frac{f}{g}\right)_{r=r_0}$ gesetzt ist. Die Bedingung (33) gibt dann die Bestimmungsgleichung für den Wert der Energie. Weil für den gebundenen Zustand $\varepsilon < 1$ ist, so setzen wir

$$\varrho = 2\,\frac{r}{\lambda}\,(1-\varepsilon^2)^{1/2}\,.$$

Wir wollen uns im Folgenden auf die Betrachtung von S-Zuständen beschränken. Für P-, D- usw. Zustände ist nämlich die Störung viel zu gering, um für die Spektren von Bedeutung zu sein. Die Quantenzahl $\varkappa$ hat dann den Wert 0. Ferner sei

$$K = 1 - ib$$
$$n_r = -\gamma - ia \qquad\qquad \gamma = (1-\alpha^2)^{1/2}$$

Genau wie früher setzen wir

$$\left.\begin{aligned} F &= \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{e^{-\frac{\varrho}{2}}}{\varrho}\,(\varphi_2 - \varphi_1) \\ G &= \frac{e^{-\frac{\varrho}{2}}}{\varrho}\,(\varphi_2 + \varphi_1) \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{F} &= \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{1/2} \frac{e^{-\frac{\varrho}{2}}}{\varrho}\,(\overline{\varphi}_2 - \overline{\varphi}_1) \\ \overline{G} &= \frac{e^{-\frac{\varrho}{2}}}{\varrho}\,(\overline{\varphi}_2 + \overline{\varphi}_1) \end{aligned}\right\} \tag{34a}$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= -\,n_r\,\varphi^{\gamma} F(-n_r+1;\quad 2\gamma+1;\quad \varrho) \\ \varphi_2 &= K\,\varrho^{\gamma} F(-n_r;\quad 2\gamma+1;\quad \varrho) \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{\varphi}_1 &= -\,(n_r+2\gamma)\,\varrho^{-\gamma} F(-n_r-2\gamma+1;\quad -2\gamma+1;\quad \varrho) \\ \overline{\varphi}_2 &= K\,\varrho^{-\gamma} F(-n_r-2\gamma;\quad -2\gamma+1;\quad \varrho) \end{aligned}\right\} \tag{35a}$$

Die überstrichene Lösung $\overline{F}, \overline{G}$ geht aus der nicht überstrichenen hervor durch Ersetzen von γ durch $-\gamma$.

Wir bilden jetzt

$$\underline{F} = F - \xi \overline{F} \qquad \underline{G} = G - \xi \overline{G} \tag{36}$$

und benutzen die asymptotische Entwicklung der F, G und $\overline{F}, \overline{G}$ für $\varrho \gg 1$ (siehe Formel 18):

$$\left.\begin{aligned} F &\sim -\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(2\gamma+1)K}{\Gamma(-n_r)} \varrho^{-\gamma-2-n_r} e^{\frac{\varrho}{2}} + \cdots \\ G &\sim \frac{\Gamma(2\gamma+1)K}{\Gamma(-n_r)} \varrho^{-\gamma-2-n_r} e^{\frac{\varrho}{2}} + \cdots \\ \overline{F} &\sim -\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(-2\gamma+1)}{\Gamma(-n_r-2\gamma)} \varrho^{-\gamma-2-n_r} + \cdots \\ \overline{G} &\sim \frac{\Gamma(-2\gamma+1)K}{\Gamma(-n_r-2\gamma)} \varrho^{-\gamma-2-n_r} e^{\frac{\varrho}{2}} + \cdots \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Sollen in $\underline{F}, \underline{G}$ die Glieder mit $e^{+\frac{\varrho}{2}}$ verschwinden, so muss

$$\xi = \frac{\Gamma(2\gamma+1)\,\Gamma(-n_r-2\gamma)}{\Gamma(-2\gamma+1)\,\Gamma(-n_r)} \text{ sein.} \tag{38}$$

Lösen wir Gleichung (33) vermöge (36) nach ξ auf und benutzen (38), so wird schliesslich

$$\frac{\Gamma(2\gamma+1)\,\Gamma(-n_r-2\gamma)}{\Gamma(-2\gamma+1)\,\Gamma(-n_r)} = \frac{F-\zeta G}{\overline{F}-\zeta\overline{G}} \tag{39}$$

Diese Formel enthält schon die Abhängigkeit der Energie ε von der Reichweite und der Tiefe des Potentials. Der Parameter ε ist darin jedoch noch sehr verwickelt enthalten. Um die Formel (39) praktisch brauchbar zu machen, müssen wir benutzen, dass die Änderung der Energie durch den Einfluss der Störung sehr gering ist, verglichen mit der Gesamtenergie. Für die ungestörten Zustände ist n_r eine ganze Zahl. Wir setzen also jetzt

$$n_r = n_r' + \delta$$

wobei n_r' eine ganze Zahl und $\delta \ll 1$ ist.

Ferner sei $\varepsilon = \varepsilon' + \eta$, worin ε' die ungestörte Energie ist und $\eta \ll \varepsilon'$ die Störung durch das Zusatzpotential darstellt. Die Beziehung zwischen n_r und ε ist gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} n_r &= -\gamma - i\alpha \\ a &= -\frac{i\alpha\,\varepsilon}{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

Wenn wir nach ε auflösen, erhalten wir die Feinstrukturformel.

$$\varepsilon = \left[1 + \frac{\alpha^2}{(n_r + \gamma)^2}\right]^{-1/2} \tag{41}$$

Durch Differentiation nach n_r wird

$$\eta = \alpha^2 [\alpha^2 + (n_r' + \gamma)^2]^{-3/2} \delta \tag{42}$$

Im besondern wird

$$\eta \begin{cases} = \alpha^2 \delta & \text{für 1 } S\text{-Zustand} \quad (n_r' = 0) \\ \approx \dfrac{\alpha^2}{8} \delta & \text{für 2 } S\text{-Zustand} \quad (n_r' = 1) \end{cases} \tag{43}$$

Wir berechnen jetzt δ für den 1 S- und den 2 S-Zustand gesondert. Es sei immer $\alpha^2 \ll 1$ vorausgesetzt.

a) 1 *S-Zustand*: Wir haben

$$\begin{aligned} \varkappa = 0 \qquad & \gamma \sim 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \qquad & n_r' = 0 \\ \varepsilon = (1 - \alpha^2)^{1/2} \qquad & (1 - \varepsilon^2)^{1/2} = \alpha . \end{aligned} \tag{44}$$

Die F und G sind nach α und ϱ zu entwickeln:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{2}\, \alpha e^{-\frac{\varrho}{2}} & G &= 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{\varrho}{2}} \\ \overline{F} &= \frac{\alpha}{\varrho} 2\sqrt{2}\, e^{-\frac{\varrho}{2}} & \overline{G} &= \sqrt{2}\, \frac{\alpha^2}{\varrho^2} e^{-\frac{\varrho}{2}} \end{aligned} \tag{45}$$

Ferner entwickeln wir die Γ-Funktionen in

$$\xi = \frac{\Gamma(2\gamma + 1)\, \Gamma(-n_r - 2\gamma)}{\Gamma(-2\gamma + 1)\, \Gamma(-n_r)} . \tag{46}$$

Wenn n eine ganze Zahl $\geqq 0$ ist und $\delta \ll 1$, dann gilt

$$\Gamma(-n + \delta) \sim \frac{1}{\delta} \frac{(-1)^n}{n!} . \tag{47}$$

Anwendung dieser Entwicklung in (46) liefert unter Benutzung von (44) das einfache Resultat:

$$\xi \approx \delta . \tag{48}$$

Durch Einsetzen von (45), (46), (48) in (39) wird endlich

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \varrho^2 \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \alpha + \sqrt{2}\, \zeta(\mu\tau)}{\sqrt{2} + \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \zeta(\mu\tau)} . \tag{49}$$

Dabei haben wir wiederum die Funktion ζ (Formel 31) eingeführt.

b) 2 *S-Zustand*$_f$

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= 0 \\ \gamma &= 1 - \tfrac{1}{2}\alpha^2 \\ n_r &= 1 \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} \varepsilon &= \left[1 + \frac{\alpha^2}{(1+\gamma^2)}\right]^{-\frac{1}{2}} \\ (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} &= \frac{\alpha}{(1+\gamma)} \end{aligned}\right| \tag{50}$$

Eine analoge Rechnung wie für den 1 *S*-Zustand ergibt

$$\delta = \frac{1}{\alpha}\varrho^2 \frac{\sqrt{2}\,\alpha + 2\sqrt{2}\,\zeta(\mu\tau)}{\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,\alpha\,\zeta(\mu\tau)} \tag{51}$$

Damit wir die Abhängigkeit von Z explizite studieren können, ersetzen wir in den Formeln (49) und (51) wieder α durch

$$Z\alpha = \frac{Z}{137}\left(\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}\right).$$

Ferner drücken wir die Reichweite und die Tiefe des Potentials durch μ und σ aus. Dann wird mit (43)

$$\left.\begin{aligned} \eta_{1S} &= 4Z^3\alpha^5\sigma^2 \frac{\frac{Z}{\sqrt{2}}\alpha + \sqrt{2}\,\zeta(\alpha\sigma\mu)}{\sqrt{2} + \frac{Z\alpha}{\sqrt{2}}\,\zeta(\alpha\sigma\mu)} \\ \eta_{2S} &= \frac{8}{Z^3}\alpha^5\sigma^2 \frac{\sqrt{2}\,Z\alpha + 2\sqrt{2}\,\zeta(\alpha\sigma\mu)}{\frac{3}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\,Z\alpha\,\zeta(\alpha\sigma\mu)} \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Wir unterscheiden die beiden Fälle $|\zeta| <$ | und $|\alpha\zeta| \sim 1$ und stellen für jeden eine Näherungsformel für die Energiestörung durch das Zusatzpotential auf.

1. Fall, $|\zeta| < 1$. Das zweite Glied im Nenner ist dann sehr viel kleiner als das erste.

$$\left.\begin{aligned} \eta_{1S} &\approx 2Z^4\alpha^6\sigma^2\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{\sigma\mu}{Z}\right\} \\ \eta_{2S} &\approx \frac{Z^4\alpha^6\sigma^2}{12}\left\{1 + \frac{2}{3}\frac{\sigma\mu}{Z}\right\} \end{aligned}\right\} \tag{52'}$$

2. Fall, $|\alpha\zeta| \ll 1$. In diesem Fall können wir in den Zählern der Formel (52) das erste Glied neben dem zweiten vernachlässigen. Die beiden Glieder im Nenner dagegen sind von derselben Grössenordnung. Wenn wir aber von einem Faktor von der Grössenordnung 1 absehen, können wir auch das erste Glied in den Nennern

weglassen, d. h. wir ersetzen den tatsächlichen Wert von η für $|\alpha\zeta| \sim 1$ durch seinen Grenzwert für $\zeta \longrightarrow \infty$. Unter diesen Voraussetzungen wir dann

$$\left.\begin{aligned} \eta_{1\,S} &\approx 8\,Z^2\alpha^4\sigma^2 \\ \eta_{2\,S} &\approx \frac{Z^2\alpha^4\sigma^2}{4} \end{aligned}\right\} \qquad (52'')$$

§ 5. Diskussion der Resultate.

Damit die Streuung durch das Zusatzpotential vergleichbar wird mit der Coulombstreuung, müssen Φ_f und Φ_g in (12) von der Grössenordnung $f(\vartheta)$ oder $g(\vartheta)$ werden. Nun sind $f(\vartheta)$ und $g(\vartheta)$ von der Grössenordnung a und wegen (11) müssen also auch die ξ von der Grössenordnung a werden.

Wir unterscheiden nun auch bei der Streuung die beiden Fälle $|\tau\zeta(\mu\tau)| \ll 1$ und $|\tau\zeta(\mu\tau)| \sim 1$. ε wollen wir von der Grössenordnung 1 annehmen, d. h. die Energie soll höchstens einige MV betragen.

Im ersten Fall können wir nach (32) schreiben

$$|\xi| \sim |\tau^2\zeta(\mu\tau)| \ll a$$

da $\tau = \frac{\beta\sigma}{Z}\, a \sim a$ ist.

Im zweiten Fall dagegen kann einer der Nenner in (32) sehr klein werden. Solche Resonanzen können aber nur dann auftreten, wenn $\zeta(\mu\tau) < 0$ also $\mu < 0$ ist. Das bedeutet, dass dem Coulombfeld ein anziehendes Kastenpotential überlagert werden müsste. Ein solches Potential hätte zur Folge, dass die Wasserstoffelektronen fester gebunden wären als im reinen Coulombfeld. Die Störung wäre natürlich für den 1 S- und den 2 S-Zustand am grössten.

Nun ist von PASTERNACK[1]) bemerkt worden, dass die experimentell gemessene Feinstrukturaufspaltung von H und D[2]) dann erklärt werden kann, wenn man annimmt, dass der 2 S-Term um einen Betrag 0,03 cm^{-1} nach oben verschoben wird. Dagegen wird die Übereinstimmung des Experimentes mit der Theorie noch schlechter, wenn man eine Verschiebung nach unten vornimmt.

Es wäre jetzt noch die Möglichkeit denkbar, dass Protonen und Neutronen verschiedene Kräfte auf die Elektronen ausüben, derart, dass beim Wasserstoff zum Beispiel die Störung positiv ist ($\eta > 0$), während sie dagegen beim Stickstoff und andern Ele-

[1]) PASTERNACK, Phys. Rev. **54**, 1113 (1938).
[2]) WILLIAMS, Phys. Rev. **54**, 558 (1938).

menten, bei welchen eine grosse Streuanomalie festgestellt wurde, negativ ist, so dass die oben diskutierte Resonanz eintreten könnte. Eine solche Möglichkeit wird jedoch ausgeschlossen durch die Tatsache, dass gerade beim Deuteron, das ja dasselbe Verhältnis von Neutronen zu Protonen aufweist wie der Stickstoff, die Abweichungen der Feinstruktur von der Theorie besonders genau gemessen sind und auf ein positives Zusatzpotential hinzuweisen scheinen. Wir glauben deshalb die Annahme eines negativen Potentials ausschliessen zu müssen.

Wenn die Nenner in (32) nicht klein sind, dann ist im zweiten Fall $\xi_0 \sim \xi_{-2} \sim \tau$, die Streuung also wirklich von derselben Grössenordnung wie die COULOMB'sche. Damit aber $|\tau\zeta(\mu\tau)| \sim 1$ sein kann, muss $\mu\tau$ sehr nahe bei einem ganzen Vielfachen von π liegen, d. h. es muss gelten

$$n\pi - \tau \leqq \mu\tau \leqq n\pi + \tau \qquad \tau \ll 1 \qquad \mu \gg 1$$
$$(n = \text{ganze Zahl} = 0).$$

Wir wollen zur Erleichterung der Diskussion die Werte von $\mu\tau$ modulo π in das Intervall von 0 bis π reduzieren. Jeder Kern mit seinen individuellen μ- und τ-Werten wird dann durch einen Punkt in diesem Intervall representiert. Die Verteilung dieser Punkte wird keiner besondern Gesetzmässigkeit gehorchen, sondern ungeordnet sein. An den beiden Enden dieses Intervalls grenzen wir die beiden Teilstrecken τ nach innen ab, wobei τ durch einen mittleren Wert ersetzt werden darf. Ein Punkt der innerhalb einer dieser Bereiche fällt, wird einen Kern mit anormaler Streuung darstellen. Nun kennt man unter den 80 Kernen von $Z = 1$ bis $Z = 80$ mindestens 8 Kerne, bei denen eine Abweichung von mehr als 50% festgestellt wurde (N, A, Kr, Xe, I, Al, Ni, Hg). τ müsste also im Mittel einen Wert von rund $\pi/20$ haben. Wahrscheinlich ist τ aber grösser, da die nicht untersuchten Elemente vermutlich nicht alle normal streuen.

Wir behaupten nun, dass, wenn diese Deutung der Streuanomalien richtig wäre, bei den gleichen Elementen, die eine anomale Streuung aufweisen, auch beobachtbare Störungen der Röntgenlinienfrequenzen auftreten müssten. Denn bei diesen Elementen, die durch $|\alpha\zeta| \sim 1$ charakterisiert sind, ist nach (52″) und (52′) die Energiestörung der K-Elektronen ($1\,S$) etwa 100mal grösser als bei den normal streuenden Elementen (Fall 1) und die relative Störung $\left|\frac{\eta_{1S}}{\varepsilon'_{1S}}\right|$ ist nach (52″) von der Grössenordnung $16\alpha^2\sigma^2 = 16\,\tau^2$ also etwa 40%, wenn man für τ den oben geschätzten Minimalwert $\pi/20$ einsetzt. Im MOSELEY-Diagramm der

K-Linien müssten sich aber auch noch erheblich geringere Abweichungen feststellen lassen, sofern sie nur bei einzelnen Elementen oder Elementengruppen auftreten. Das tatsächliche Fehlen solcher Abweichungen spricht also stark gegen die hier diskutierte Theorie der Streuungsanomalien.

Im Hinblick auf die oben erwähnten Feinstruktur-Anomalien der Balmerlinien von H und D haben wir noch die Störungen des $2\,S$-Zustandes für $Z = 1$ berechnet und in der Figur als Funktion von μ und σ dargestellt; die Kurven verbinden die Punkte $\eta_{2\,S} =$ const. Die mittlere Kurve entspricht dem von PASTERNACK vorgeschlagenen Wert

$$\eta_{2\,S} = 0{,}03\ \text{cm}^{-1}.$$

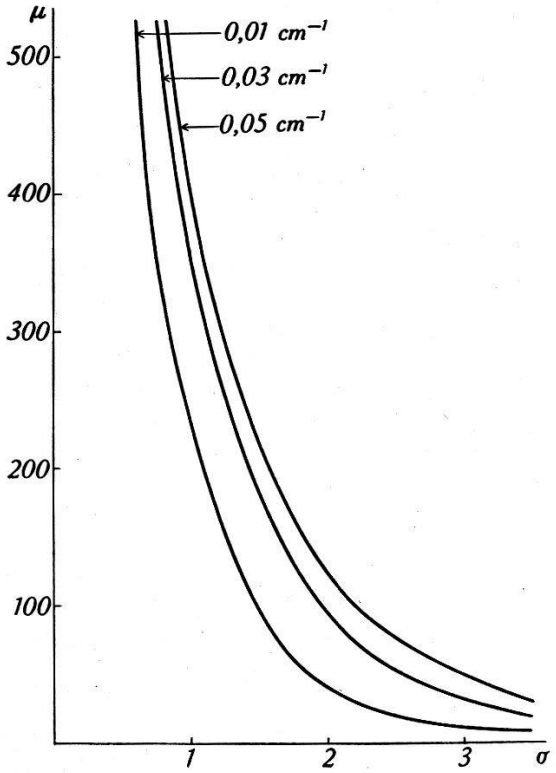

Fig. 1.

Störung des $2\,S$-Termes durch ein abstossendes Kastenpotential von der Höhe μ und Reichweite σ $\left(\text{in Einheiten } m c^2 \text{ bzw. } \frac{e^2}{m c^2}\right)$.

§ 6. Magnetische Streuung.[1])

Durch den Einfluss des magnetischen Momentes des Kernes erfahren die Elektronen eine ablenkende Kraft, welche der Geschwindigkeit proportional ist.

Die Berechnung der Streuung durch das Kernmoment führen

[1]) Ich bin Herrn STÜCKELBERG für die Überlassung seiner Rechnung über dasselbe Problem zu Dank verpflichtet. Es war mir dadurch möglich, in meiner eigenen Rechnung einen Fehler zu berichtigen.

wir mittelst der Born'schen Methode durch. Es wird sich zeigen, dass die erste Näherung bei weitem ausreichend ist, da der Effekt viel kleiner ist als die Streuung durch das Coulombfeld.

Die zeitabhängige Dirac'sche Gleichung lautet

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\hbar}{i}\frac{\partial \psi}{\partial t} + H\psi = 0 \\ \text{mit}\quad &H = +eV(r) + c\left[\sum_{k=1}^{3}\alpha^k\left(p_k - \frac{e}{c}\Phi_k\right) + mc\beta\right] \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Wir setzen:

$$\left.\begin{aligned} &H = H_0 + H_c + H_M \\ &H_0 = c\left[\sum_{k=1}^{3}\alpha^k\, p_k + mc\beta\right] \\ &\mathrm{H}_c = cV = -\frac{Ze^2}{r} \\ &H_M = -e\sum_{k=1}^{3}\alpha^k\,\Phi_k = -e\frac{1}{r^3}\vec{\alpha}\cdot[\vec{\mu}\times\vec{r}] \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

$\vec{\mu}$ ist das magnetische Moment des Kernes:

$$\vec{\mu} = \mu \cdot g \cdot \vec{I} \tag{56}$$

mit $\mu = \frac{e\hbar}{Mc}$; $\vec{I}$ ist der Kernspin mit den Eigenwerten $(-i\cdots+i)$ und g ein Zahlenfaktor, der Landéfaktor für das Kernmoment. Wir bezeichnen mit m $(m = -i, \cdots\cdots + i)$ die Zustände für den Kernspin, mit $(\lambda, \vec{p})$ die Zustände der Dirac'schen Wellenfunktionen, wobei $(\lambda = 1, \cdots, 4)$ und $\vec{p}$ den Impuls der ebenen Welle bezeichnet.

Die ungestörten Zustände sind ebene Wellen

$$\psi^{(\lambda)}(\vec{x}) = a^{(\lambda)}(\vec{p})\, e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{x} - E(\lambda)t)} \tag{57}$$

Die $a^{(\lambda)}$ sind noch 4-komponentige Grössen. Wir normieren sie, so dass

$$a^{*(\lambda)} \cdot a^{(\mu)} = \delta_{\lambda\mu} \tag{58}$$

Das Matrixelement, das für die Streuung verantwortlich ist, ist dann

$$(m'\lambda'\vec{p}' \mid H_c + H_M \mid m\lambda\vec{p}) =$$

$$-\delta_{mm'}\frac{4\pi}{q^2}a^{*(\lambda')}(\vec{p}')\,a^{(\lambda)}(p)\,Ze^2 - \frac{e\,4\pi i}{q^2}a^{*(\lambda')}(\vec{p}')\,(\vec{\alpha}\cdot[\vec{\mu}_{m'm}\times\vec{q}])a^{(\lambda)}(\vec{p})$$

$$\left(\vec{q} = \frac{1}{\hbar}(\vec{p} - \vec{p}')\right) \tag{59}$$

Der differentielle Streuquerschnitt für die Streuung $\vec{p} \longrightarrow \vec{p}'$ ist

$$I(\vartheta) = \frac{1}{2\,(2\,i+1)} \left(\frac{2\,\pi\,m}{h^2}\right)^2 \sum_{\substack{m\,m' \\ (\lambda\,\lambda')}} |\,(m'\,\lambda'\,\vec{p}'\,|\,H_c+H_M\,|\,m\,\lambda\,p)\,|^2 \qquad \vartheta = \sphericalangle\,(\vec{p}\,\vec{p}') \tag{60}$$

Die Summation drückt die Mittelung aus über alle Orientierungen des Kernspins und des Spins des einfallenden Elektrons. Die Summation über $\lambda\lambda'$ ist jedoch nur über die Zustände positiver Energie auszuführen. Wir haben das durch die Klammer angedeutet.

Bei der Summation über m, m' fällt der aus erstem und zweitem Glied von (32) gemischte Term weg, da ja $\sum_m \mu_{m\,m} = 0$ ist. Die Streuungen durch das Coulombfeld und durch das magnetische Moment setzen sich also additiv zusammen. Wir schreiben daher

$$I(\vartheta) = I_c(\vartheta) + I_M(\vartheta)\,.$$

Die Ausrechnung von $I_c(\vartheta)$ führt direkt auf Formel (1)[1]. $I_M(\vartheta)$ wird dann

$$I_M(\vartheta) = \left(\frac{2\,\pi\,m}{h}\right)^2 \frac{(4\,\pi e)^2}{2\,(2\,i+1)} \sum_{i,k} \sum_{\substack{m,m' \\ (\lambda,\lambda')}} \frac{(\vec{\mu}_{m'\,m} \times \vec{q})_i\,(\vec{\mu}^*_{m'\,m} \times q)_k}{|\,q\,|^4}$$
$$\{(a^{*(\lambda')}(\vec{p}')\;\alpha^i\,a^{(\lambda)}(\vec{p})) \times (a^{*(\lambda)}(\vec{p})\;\alpha^k\,a^{(\lambda')}(\vec{p}'))\}\,. \tag{61}$$

Dieser Ausdruck lässt sich beträchtlich vereinfachen. Wir setzen

$$S_{ik} = \tfrac{1}{2} \sum_{(\lambda,\lambda')} (a^{*(\lambda')}(\vec{p}')\,\alpha^i\,a^{(\lambda)}(\vec{p}))\;(a^{*(\lambda)}(\vec{p})\,\alpha^k\,a^{(\lambda')}(\vec{p}'))) \tag{62}$$

dann wird wegen

$$\sum_{m'm} \mu^r_{m'm}\,\mu^{*s}_{m'm} = s\,p\,(\mu^r \cdot \mu^s = \mu^2\,\frac{i(i+1)\,(2\,i+1)}{3}\,\delta_{rs} \tag{63}$$

$$I_M(\vartheta) = \frac{16\,\pi^3 c^2}{h^2}\,\frac{\mu^2}{|\,q\,|^4}\,i(i+1)\,\{(q_1{}^2+q_2{}^2)\,S_{11}+(q_3{}^2+q_1{}^2)\,S_{22}+$$
$$(q_1{}^2+q_2{}^2)\,S_{33} - 2\,(q,q_2\,S_{12}+q_2 q_3\,S_{23}+q_3 q_1\,S_{31})\} \tag{64}$$

Zur Berechnung der Ausdrücke S_{ik} führt man zweckmässig den „Vernichtungsoperator" ein, definiert durch

$$\Gamma(\vec{p}) - \tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{c\,\vec{\alpha}\,\vec{p} + m c^2 \beta}{|\,E\,|}\right). \tag{65}$$

Er hat die Eigenschaft, dass

$$\Gamma a^{(\lambda)} = \begin{cases} a^{(\lambda)} \text{ für Zustände positiver Energie} \\ 0 \quad ,, \qquad ,, \qquad \text{negativer Energie} \end{cases}$$

[1]) Siehe F. SAUTER, l. c.

Der Vorteil dieses Operators besteht darin, dass man dadurch bei der Summation über $\lambda\lambda'$ die lästige Beschränkung auf Zustände positiver Energie vermeiden und die Summation durch Spurenbildung ersetzen kann.

Es wird z. B.

$$\sum_{(\lambda)} a_\sigma^{(\lambda)} a_\mu^{*(\lambda)} = \sum_\lambda \sum_\tau a_\sigma^{(\lambda)} (\Gamma_{\mu\tau} a_\tau^{(\lambda)})^* = \sum_\tau \delta_{\sigma\tau} \Gamma_{\mu\tau}^* = \Gamma_{\sigma\mu}.$$

Darauf folgt wegen (41)

$$S_{ik} = sp(\Gamma(\tilde{p}')\alpha^i \Gamma(\tilde{p})\alpha^k) \tag{66}$$

Diese Spuren lassen sich nun leicht berechnen. Es wird

$$\left.\begin{aligned} S_{11} &= \beta^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} & S_{12} &= S_{31} = 0 \\ S_{22} &= \beta^2 \sin^2\frac{\vartheta}{2} & S_{23} &= \frac{\beta^2}{2}\sin\vartheta. \\ S_{33} &= \beta^2 \cos^2\frac{\vartheta}{2} \end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Diese Grössen führen wir in (43) ein und benutzen ferner, dass

$$q_1 = 0 \qquad q_2 = -\frac{|p|}{\hbar}\sin\vartheta \qquad q_3 = \frac{|p|}{\hbar}(1-\cos\vartheta).$$

Dann finden wir schliesslich nach einiger Rechnung

$$I_M(\vartheta) = \left(\frac{e^2 g}{Mc^2}\right)^2 \frac{i(i+1)}{6}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\vartheta}{2}\right\} \tag{68}$$

Für das Verhältnis $R = I_M/I_c$ finden wir dann

$$R = \frac{g^2}{Z^2}\left(\frac{m}{M}\right)^2 \frac{3}{i(i+1)} \frac{\sin^4\frac{\vartheta}{2}\left\{1 + \tfrac{1}{2}\operatorname{cotg}^2\frac{\vartheta}{2}\right\}}{\left(1-\beta^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)(1-\beta^2)} \tag{69}$$

Der wesentliche Term in dieser Gleichung ist der Term $(m/M)^2 = 2.5 \times 10^{-7}$. Für Energien bis zu 3 mV ist $(1-\beta^2)^{-1} < 36$, die magnetische Streuung also verschwindend neben der COULOMB'schen. Die magnetische Streuung wird erst beträchtlich für Energien von der Grössenordnung 10^3 mV.

Ich bin den Herren Prof. PAULI und Prof. WENTZEL für fördernde Diskussionen über dieses Problem und wertvolle Ratschläge zu Dank verpflichtet.

Zürich, Physikalisches Institut der E. T. H.