Zum elastischen Verhalten von Zinn- Ein- und -Vielkristallen

Autor(en): **Boas, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Helvetica Physica Acta**

Band (Jahr): **7 (1934)**

Heft VIII

PDF erstellt am: **15.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-110406

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zum elastischen Verhalten von Zinn- Ein- und -Vielkristallen

von **W. Boas.**

(3. XI. 34.)

Zusammenfassung: Die Orientierungsabhängigkeit des Elastizitäts- und Torsionsmoduls des Zinnkristalls wird angegeben. Durch Mittelwertbildung über den gesamten Orientierungsbereich werden die Moduln des quasiisotropen Vielkristalls berechnet und mit der Erfahrung verglichen.

Vor einiger Zeit haben HUBER und SCHMID ein Mittelungsverfahren angegeben[1]) zur Bestimmung von Elastizitäts- und Torsionsmodul aus den elastischen Parametern des Einkristalls, das sich auch in der Anwendung auf thermische Ausdehnung und spezifischen elektrischen Widerstand bewährt hat[2]). Es wurde dabei der von der Theorie gegebene Ausdruck der Orientierungsabhängigkeit der betreffenden Eigenschaft über die gesamte Orientierungsmannigfaltigkeit integriert, wobei die in den einzelnen Kristalliten sich abspielenden Vorgänge völlig unabhängig voneinander verlaufen sollten. Bei den elastischen Eigenschatten bildeten speziell die Formeln den Ausgang, die die Orientierungsabhängigkeit längs der Achse gleichförmig gespannter Zylinder bei Kraftwirkung lediglich auf die Grundflächen geben. Während nun der E-Modul von der Form des Zylinderquerschnitts unabhängig ist, hängt der G-Modul hiervon ab, und der Berechnung wurde die für einen Kreiszylinder geltende Orientierungsabhängigkeit zugrunde gelegt. Auch wurden die mit der Drillung eines Kristalls im allgemeinen verbundenen Biegungen nicht mit berücksichtigt. Wie gering aber offenbar der Einfluss aller dieser Vereinfachungen ist, zeigt sich aus der guten Übereinstimmung zwischen den berechneten und den beobachteten Werten.

Um unter denselben Voraussetzungen die Mittelung für das tetragonale Zinn durchführen zu können, hat man von der Orientierungsabhängigkeit des E- und G-Moduls auszugehen. Man erhält sie aus den VOIGT'schen allgemeinen Formeln für s'_{33} und

---

[1]) A. HUBER und E. SCHMID, Helv. Phys. Acta **7**, 620, 1934. Im folgenden als I zitiert.

[2]) W. BOAS und E. SCHMID, Helv. Phys. Acta **7**, 628, 1934.

$\frac{1}{2}(s'_{44} + s'_{55})$[1]) durch Berücksichtigung des für die Kristallklasse des Zinns D_{4h} geltenden Koeffizientenschemas[2]). Mit dem Richtungscos zur tetragonalen z-Achse γ_3 und denen zu den gleichwertigen digonalen Achsen (x- bzw. y-Achse) γ_1 und γ_2 ergibt sich dann:

$$\frac{1}{E} = s_{11}(\gamma_1^4 + \gamma_2^4) + s_{33}\gamma_3^4 + (2\,s_{12} + s_{66})\gamma_1^2\gamma_2^2 + (2\,s_{13} + s_{44})\gamma_3^2(1 - \gamma_3^2)\,. \tag{1}$$

$$\frac{1}{G} = \tfrac{1}{2}(s_{44} + s_{66})(\gamma_1^4 + \gamma_2^4) + s_{44}\gamma_3^4 + [4\,(s_{11} - s_{12}) + (s_{44} - s_{66})]\,\gamma_1^2\gamma_2^2 + [2\,(s_{11} + s_{33} - 2\,s_{13}) + \tfrac{1}{2}(s_{66} - s_{44})]\,\gamma_3^2(1 - \gamma_3^2)\,. \tag{2}$$

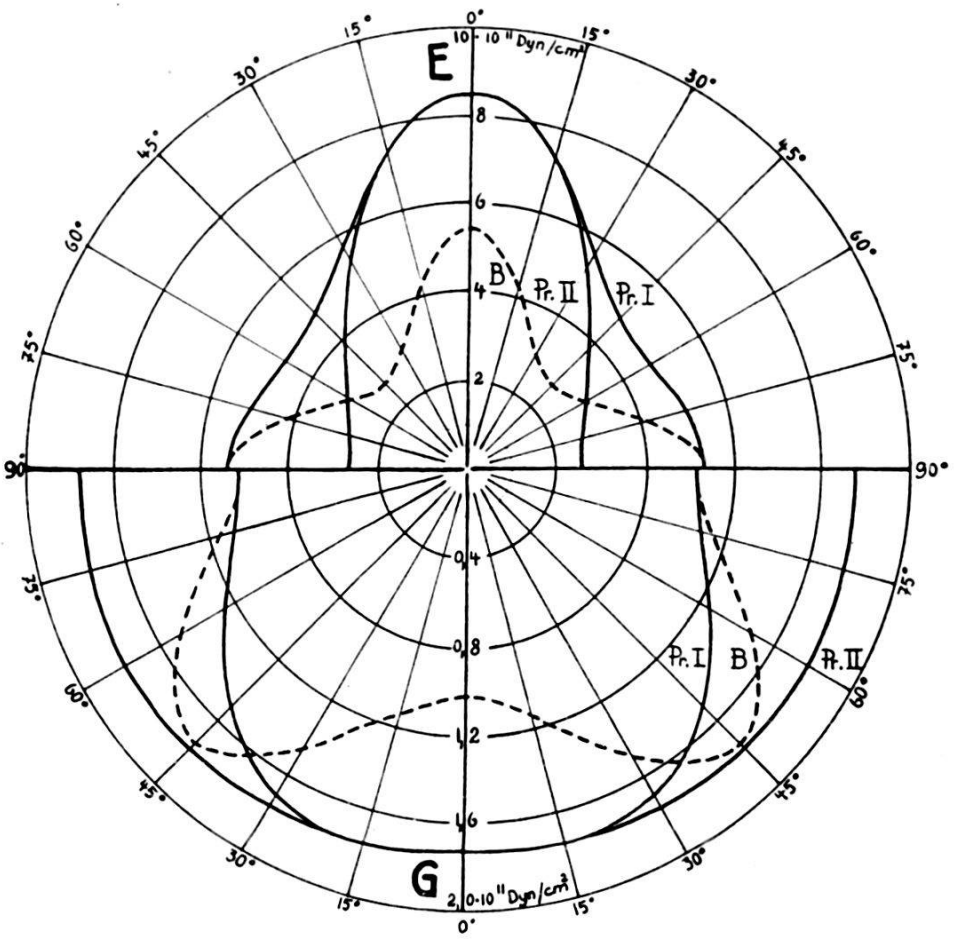

Fig. 1.

Schnitte des E- und G-Modulkörpers des Zinnkristalls mit den Prismenflächen I. und II. Art und der Basis. Die Winkel zählen in den Prismenflächen von der tetragonalen Achse, in der Basis von der digonalen Achse I. Art aus.

Diese Orientierungsabhängigkeit ist in Fig. 1 durch Schnitte des E- und G-Modulkörpers unter Verwendung der von BRIDGMAN[3])

[1]) W. VOIGT, Lehrb. d. Kristallphysik, Teubner 1910. Formeln 428 und 430 in § 369.

[2]) Ebenda, § 287.

[3]) P. W. BRIDGMAN, Proc. Am. Acad. **60**, 305, 1925.

gemessenen Einkristallwerte veranschaulicht. Die elastische Anisotropie des Zinnkristalls ist recht gross. Das Maximum des E-Moduls beträgt $8{,}47 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm² und liegt in der tetragonalen Achse, das Minimum beträgt $2{,}63 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm² und liegt in der digonalen Achse II. Art. Die entsprechenden Werte für den G-Modul sind: $G_{\max} = 1{,}79 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm² in der Prismenfläche II. Art unter einem Winkel von $45^0\ 40'$ gegen die tetragonale Achse, $G_{\min} = 1{,}04 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm² in der digonalen Achse I. Art.

Zur Mittelung für den quasiisotropen Vielkristall führt man zweckmässig Polarkoordinaten ein:

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \varrho\,, \quad \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \operatorname{tg} \varphi\,.$$

Man erhält so die Orientierungsabhängigkeit in der Form

$$f(\varrho, \varphi) = A + B\varrho - C\varrho^2 + D\varrho^2 \sin^2\varphi \cdot \cos^2\varphi\,, \tag{3}$$

worin für den E-Modul: $A = s_{33}$, $B = 2\,s_{13} + s_{44} - 2\,s_{33}$,

$$C = -s_{11} - s_{33} + s_{44} + 2\,s_{13}\,, \quad D = 2\,s_{12} + s_{66} - 2\,s_{11}\,;$$

für den G-Modul: $A = s_{44}$, $B = 2\,(s_{11} + s_{33} - 2\,s_{13}) + \frac{1}{2}\,(s_{66} - 5\,s_{44})$,

$$C = 2\,(s_{11} + s_{33} - s_{44} - 2\,s_{13})\,, \quad D = 2\,(-2\,s_{12} - s_{66} + 2\,s_{11})\,.$$

Beim E-Modul führt eine Rechnung, die der in I analog ist, auf eine sehr schlecht konvergierende Reihe, so dass hier ein anderer Weg beschritten wurde. Es wurde in

$$E = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{\pi/2} \frac{d\varrho \cdot d\varphi}{\sqrt{1-\varrho} \cdot f(\varrho, \varphi)}$$

die Integration nach φ direkt und dann die Integration nach ϱ numerisch durchgeführt. Mit der Substitution $\operatorname{tg} 2\varphi = t$ wird

$$\bar{E} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho}} \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)(A + B\varrho - C\varrho^2) + \frac{D}{4}\varrho^2 t^2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho}} \cdot \frac{1}{A + B\varrho - C\varrho^2} \int_0^\infty \frac{dt}{1 + t^2 \sqrt{1 + \frac{D/4 \cdot \varrho^2}{A + B\varrho - C\varrho^2}}^{\,2}}\,.$$

Die Integration nach t liefert:

$$\bar{E} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho} \cdot \sqrt{(A + B\varrho - C\varrho^2)\left(A + B\varrho - \left(C - \frac{D}{4}\right)\varrho^2\right)}} \Bigg| \quad * \quad \Bigg|_0^\infty$$

$$* \quad \operatorname{arctg}\left(t \cdot \sqrt{1 + \frac{D/4 \cdot \varrho^2}{A + B\varrho - C\varrho^2}}\right)$$

Nach Einsetzen der Grenzen erhält man schliesslich

$$\bar{E} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d\varrho}{\sqrt{1-\varrho} \cdot \sqrt{(A + B\varrho - C\varrho^2)\left(A + B\varrho - \left(C - \frac{D}{4}\right)\varrho^2\right)}} . \quad (4)$$

Dieses Integral wurde numerisch berechnet, und zwar im Gebiete $0 < \varrho < 0{,}80$ mit der Simpsonschen Regel. Da für $\varrho = 1$ der Integrand unendlich wird, wurde die Funktion

$$1 \Big/ \sqrt{(A + B\varrho - C\varrho^2)\left(A + B\varrho - \left(C - \frac{D}{4}\right)\varrho^2\right)}$$

für $0{,}80 < \varrho < 1$ durch eine Parabel 2. Ordnung angenähert und dann die Integration durchgeführt. Man erhält so unter Benutzung der Bridgmanschen Einkristallkonstanten[1]) $\bar{E} = 4{,}40 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm² = 4480 kg/mm².

Als Mittelwert aus den verschiedenen Beobachtungen[2]) ergibt sich 4650 kg/mm², also ein Unterschied von weniger als 4%. Dies muss angesichts der Unsicherheit der angegebenen Beobachtungswerte und der grossen Anisotropie des E-Moduls, die bei Vorhandensein auch einer nur schwach ausgeprägten Textur grosse Wirkungen zur Folge haben kann, als befriedigende Übereinstimmung angesehen werden.

Die Mittelung für den G-Modul lehnt sich weitgehend an die von Huber und Schmid für kubische Kristalle durchgeführte Rechnung an. Es wird der Mittelwert

$$\bar{G} = \frac{1}{A\pi} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \frac{d\varphi\, d\varrho}{\sqrt{1-\varrho}\left(1 + \frac{B}{A}\, g(\varrho, \varphi)\right)}$$

$$\text{mit} \quad g(\varrho, \varphi) = \varrho - \frac{C}{B}\varrho^2 \left(1 - \frac{D}{C} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\right) . \quad (5)$$

---

[1]) P. W. Bridgman, loc. cit.

[2]) Nach Landolt-Börnstein-Roth-Scheel, Phys.-Chem. Tabellen, 5. Aufl.

Da nun im Integrationsgebiet $\left|\frac{B}{A}\cdot g(\varrho,\varphi)\right|<1$ bleibt, kann

$$\frac{1}{1+\frac{B}{A}\cdot g(\varrho,\varphi)}$$

in eine unendliche Reihe entwickelt und integriert werden. Es wird dann:

$$\bar{G}=\frac{1}{A\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^1\frac{d\varphi\,d\varrho}{\sqrt{1-\varrho}}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{B}{A}\right)^j\cdot g^j$$

$$=\frac{1}{A\cdot\pi}\sum_{j=0}^{\infty}\left(-\frac{B}{A}\right)^j\int_0^{\pi/2}\int_0^1\frac{g^j\,d\varphi\,d\varrho}{\sqrt{1-\varrho}}\,. \tag{6}$$

Ferner wird

$$L_j=\int_0^{\pi/2}\int_0^1\frac{g^j\,d\varphi\,d\varrho}{\sqrt{1-\varrho}}$$

$$=\sum_{k=0}^{j}\left(-\frac{C}{B}\right)^k\binom{j}{k}\int_0^1\frac{\varrho^{j+k}\,d\varrho}{\sqrt{1-\varrho}}\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{D}{C}\sin^2\varphi\cos^2\varphi\right)^k d\varphi\,. \tag{7}$$

Hierin ist das erste Integral mit M_{j+k} in (I) identisch, es ist also

$$\int_0^1\frac{\varrho^{j+k}\,d\varrho}{\sqrt{1-\varrho}}=2\cdot\frac{2\cdot4\cdot6\cdots\cdot2(j+k)}{3\cdot5\cdot7\cdots\cdot(2j+2k+1)}\,. \tag{8}$$

Das zweite Integral ist wie N_k in (I) zu behandeln:

$$N_k=\int_0^{\pi/2}\left(1-\frac{D}{C}\sin^2\varphi\cdot\cos^2\varphi\right)^k d\varphi$$

$$=\sum_{l=0}^{k}\left(-\frac{D}{C}\right)^l\binom{k}{l}\int_0^{\pi/2}\sin^{2l}\varphi\cdot\cos^{2l}\varphi\cdot d\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\sum_{l=0}^{k}\left(-\frac{D}{C}\right)^l\binom{k}{l}\frac{1}{4^l}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2l-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2l}\,. \tag{9}$$

Mit den nach (8) und (9) berechneten Integralen erhält man nach (7) L_j und schliesslich nach (6) den gesuchten Mittelwert $\bar{G}$. Dieser

ergibt sich zu $\overline{G} = 1{,}54 \cdot 10^{11}$ Dyn/cm² = 1570 kg/mm². Als Beobachtungsresultate werden für den Torsionsmodul 1700 und 1810 kg/mm² angegeben[1]). Der letzte Wert stimmt nahezu mit dem maximalen Modul des Einkristalls überein; auch der Wert 1700 kg/mm² ist ziemlich hoch. Wie weit diese Erhöhung durch eine Textur oder durch die der Theorie zugrunde liegenden Vereinfachungen (verhinderte Biegung führt zu kleinerer Drillung, also grösserem Torsionsmodul) bewirkt wird, kann nicht übersehen werden. Jedenfalls erkennt man auch hier wieder die Wichtigkeit der röntgenographischen Untersuchung der Kristallitanordnung von polykristallinem Material, an dem elastische Messungen ausgeführt sind.

Herrn Professor A. Huber möchte ich für seine freundliche Hilfe auch hier herzlichst danken.

Physikal. Institut der Universität Freiburg.

---

[1]) Nach Landolt-Börnstein-Roth-Scheel, Phys.-Chem. Tabellen, 5. Aufl.