

**Zeitschrift:** Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

**Herausgeber:** Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

**Band:** 86 (1988)

**Heft:** 7: Prof. Rudolf Conzett in memoriam

**Artikel:** Netzweise Punkteinschaltung mit funktional modelliertem Zwang

**Autor:** Wolf, H.

**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-233779>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 13.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

den, das terrestrische Netz verbesserten, besonders in der Höhe, bei den Einfrequenzlösungen auch deutlich in der Lage. Warum das so ist, im Hinblick auch darauf, dass keine aktuellen meteorologischen Daten, sondern nur troposphärische Standardmodelle verwendet wurden, muss weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben.

## Dank

Der Autor fühlt sich Herrn Professor Conzett zu Dank verpflichtet, weil dieser ihn durch sein Interesse an der Varianzkomponenten-Schätzung angeregt hat, nach Anwendungen zu suchen, bei denen die Vorteile dieses Schätzverfahrens besonders deutlich zutage treten. Nicht zuletzt dieser Suche ist die vorliegende Arbeit zu verdanken. Dank sei ferner Herrn Dr. A. Kleusberg und Herrn Prof. Dr. D. Wells der Uni-

versity of New Brunswick gesagt, die das Programm DIPOP und ihren reichen Erfahrungsschatz bei der Auswertung der Beobachtungen zur Verfügung stellten, sowie Herrn Dipl.-Ing. W. Oswald, der die Berechnungen in den Vergleichsmodellen durchführte.

## Literatur:

King, R. W., Masters, E. G., Rizos, C., Stolz, A., Collins, J.: Surveying with Global Positioning System – GPS. Dümmler, Bonn 1987.

Remondi, B. W., Persönliche Mitteilung. National Geodetic Survey, Rockville 1987.

Santerre, R., Craymer, M. R., Kleusberg, A., Langley, R. B., Parrot, D., Quek, S. H., Vanicek, P., Wells, D. E., Wilkins, F.: Precise Relative GPS Positioning with DIPOP 2.0, paper presented to IAG Section II Scientific Meetings: «Advanced Space Technology», IUGG XIX General Assembly, Vancouver, Canada, Aug. 14, 1987.

Welsch, W.: Accuracy Problems when Combining Terrestrial and Satellite Observations, in: Turner, St. (ed.): Applied Geodesy. Springer, Berlin... Tokyo 1987, p. 47–65.

Welsch, W.: Grundlagen, Gebrauchsformeln und Anwendungsbeispiele der Schätzung von Varianz- und Kovarianzkomponenten. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik 2/84, S. 296–301.

Welsch, W., Oswald, W.: Genauigkeitsuntersuchungen bei der hybriden Ausgleichung terrestrischer und satellitengestützter Netzbeobachtungen. Zeitschrift für Vermessungswesen 1/87, S. 30–41.

## Adresse des Verfassers:

Univ. Prof. Dr.-Ing. W. Welsch  
Institut für Geodäsie,  
Universität der Bundeswehr München  
D-8014 Neubiberg

# Netzweise Punkteinschaltung mit funktional modelliertem Zwang

H. Wolf

**Bei vielen Punkteinschaltungen treten in den Koordinaten der Festpunkte neben Zufallsfehlern auch noch funktional variierende Deformationsanteile mehr oder weniger deutlich auf, deren Parameter zusammen mit der Punktausgleichung zu schätzen sind. Es wird gezeigt, wie dabei mittels Minimierung die zweckmässigste Deformationsfunktion aufgefunden werden kann. Ein Beispiel erläutert die einzelnen Rechenschritte.**

*Pour nombre de rattachements de points dans un système existant, les coordonnées des points fixes sont influencées non seulement par des erreurs aléatoires, mais aussi, et de manière plus ou moins importante, par des déformations dont les paramètres sont à évaluer simultanément à la compensation. On montre comment, à l'aide des moindres carrés, la fonction de déformation la mieux adaptée peut être trouvée. Un exemple explique les différentes étapes du calcul.*

Wie man weiss, zeigen sich in geodätischen Netzen nicht selten auffallende Deformationen und Störungen, die einen ausgesprochen funktionalen, also nicht-stochastischen Charakter aufweisen. Im deutschen Triangulationsnetz beispielsweise sind dies weniger das bekannte ost-westliche Massstabsgefälle im Nordteil des Netzes oder die deutliche Verdrehung des Südteils gegen den Nordteil, als vielmehr gewisse stärkere Störungen in mehr

lokalen Bereichen, vor allem längs von «Nähten». Die Ursachen hierfür liegen in der speziellen Entstehungsweise des Netzes, in unvorteilhaften Konfigurationen, zusammen mit ungeeigneten Berechnungs- und Ausgleichungsvorgängen. Bei Netzverdichtungen und Punkteinschaltungen in solch einem Netz wurde seither auf diese funktional zu beschreibenden Störungen wenig Rücksicht genommen: Es wurden die Fehler der über-

geordneten Festpunkte entweder völlig ignoriert, oder wenn sie in Rechnung gestellt wurden, so wurde ihnen ein rein stochastisches, also zufallsbedingtes Verhalten zugeschrieben und die Beigabe von entsprechenden Kovarianzmatrizen als ausreichend angesehen.

In Wirklichkeit aber überlagern sich funktional-variierende Netzdeformationen mit stochastisch streuenden Festpunktsfehlern. Das hat notwendigerweise zur Folge, dass bei einer Einschaltung ausser den Residuen  $v_F$  (für die Festpunkte), die statistisch vielfach als «Zufallsparameter» mit dem Erwartungswert

$$E\{v_F\} = 0$$

interpretiert werden, auch noch «feste» Parameter  $y$  zu bestimmen sind, welche die Deformationsfunktionen deterministisch approximieren.

## 1. Das Modell

Wird die Punkteinschaltung nach vermittelnden Beobachtungen, d.h. nach dem Gauss-Markov-Modell vorgenommen, so gelte für den Erwartungsvektor der  $n$  Beobachtungen  $l$ :

$$E\{l\} = \bar{A}\bar{x}, \text{ mit } D(l) = \sigma_0^2 P^{-1} \text{ und } \det P \neq 0, \quad (1)$$

worin  $\bar{x}$  der Koordinatenvektor in einem deformationsfreien Koordinatensystem,  $A$

# Partie rédactionnelle

die zugehörige (n,u)-Koeffizientenmatrix, sowie D(I) die (n,n)-Dispersions- bzw.  $\mathbf{P}$  die (n,n)-Gewichtsmatrix der I, und  $\sigma_0^2$  die Varianz der Gewichtseinheit sind. Die im jeweiligen Landessystem gegebenen, mit Deformationen behafteten Koordinaten  $\mathbf{x}$  seien mit den  $\hat{\mathbf{x}}$  durch die Transformationsgleichung

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{y} \quad (2a)$$

verbunden, so dass für kleine Änderungen  $\delta\hat{\mathbf{x}}$  bzw.  $\delta\mathbf{x}$  gilt:

$$\delta\hat{\mathbf{x}} = \delta\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{y} \quad (2b)$$

worin  $\mathbf{y} = [\eta_a, \eta_b, \dots, \eta_v]^T$

der Vektor der  $v$  Deformationsparameter ist und  $\mathbf{G}$  die zugehörige Koeffizientenmatrix. Sind in  $\mathbf{v}$  die  $n$  Fehler der I enthalten, so wird – im Falle linearer Relationen – aus (1) und (2a):

$$E\{I\} = I + \mathbf{v} = \mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{G}\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y},$$

worin  $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{G}$

Bedeutet nun  $\mathbf{x}_F$  die  $u_F$  Koordinaten der Fest-, und  $\mathbf{x}_N$  die  $u_N$  Koordinaten der Neupunkte, so wird mit

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_F^T, \mathbf{x}_N^T]^T \text{ und } \mathbf{A} = [\mathbf{A}_F, \mathbf{A}_N]:$$

$$I + \mathbf{v} = \mathbf{A}_F(\mathbf{x}_F + \mathbf{G}_F\mathbf{y}) + \mathbf{A}_N(\mathbf{x}_N + \mathbf{G}_N\mathbf{y}) = \mathbf{A}_F\mathbf{x}_F + \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N + \mathbf{B}\mathbf{y}$$

worin hier  $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{G} = \mathbf{A}_F\mathbf{G}_F + \mathbf{A}_N\mathbf{G}_N = \mathbf{B}_F + \mathbf{B}_N$

so dass die Fehlergleichungen

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_F\mathbf{x}_F + \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N + \mathbf{B}\mathbf{y} - I \quad (6)$$

mit der Gewichtsmatrix  $\mathbf{P}$ , vgl. (1), resultieren. Was die Form der Flächengleichung  $\mathbf{G}\mathbf{y}$  in (2a) anlangt, so wird es sich in der Regel um ein Polynommodell in (x,y) handeln, wobei die Koordinatenwerte von einem beliebigen, im (oder am) Vermessungsgebiet liegenden Nullpunkt ( $x_0, y_0$ ) gezählt werden können, mit

$$x - x_0 = x', \text{ und } y - y_0 = y' \quad (7)$$

## 2. Parameterschätzung

Je nach der Rolle, die man den Koordinaten  $\mathbf{x}_F$  der Festpunkte zuweisen will, ergeben sich mehrere unterschiedliche Lösungsformen:

### 2.1 Die dynamische Lösung

Hierbei werden alle  $\mathbf{x}_F$  als stochastische und daher verbesserungsbedürftige Variable mit den Änderungen  $\delta\mathbf{x}_F$  und der Dispersionsmatrix

$$D(\mathbf{x}_F) = \sigma_0^2 \mathbf{P}_F^{-1} \text{ und } \det \mathbf{P}_F \neq 0 \quad (8)$$

behandelt. Sind mit  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 + \delta\mathbf{x}$  (und entsprechender Linearisierung) die  $\delta\hat{\mathbf{x}}_F, \delta\hat{\mathbf{x}}_N, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{v}}$  die Schätzwerte der  $\delta\mathbf{x}_F, \delta\mathbf{x}_N, \mathbf{y}$  und  $\mathbf{v}$ , so bestehen dann 2 Systeme von Fehlergleichungen, nämlich nach (6):

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}_F\delta\hat{\mathbf{x}}_F + \mathbf{A}_N\delta\hat{\mathbf{x}}_N + \mathbf{B}\hat{\mathbf{y}} - I^0 \quad (9a)$$

$$\text{wobei } I^0 = I - \mathbf{A}_F\mathbf{x}_F^0 - \mathbf{A}_N\mathbf{x}_N^0, \text{ und } \mathbf{x}_F^0 = \mathbf{x}_F$$

$$\text{sowie } \hat{\mathbf{v}}_F = \delta\hat{\mathbf{x}}_F + \mathbf{G}_F\hat{\mathbf{y}}. \quad (9b)$$

In diesen  $\hat{\mathbf{v}}_F$  kommen die zufälligen Festpunktfehler zum Ausdruck. Dann folgen aus

$$\Omega = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} + \mathbf{v}_F^T \mathbf{P}_F \mathbf{v}_F = \min \quad (10)$$

$$(3)$$

ten bewirkt, was bei einer Punkteinschaltung nicht zur Diskussion steht. Die Auflösung von (11) ergibt dann die gesuchten  $\delta\hat{\mathbf{x}}_F, \delta\hat{\mathbf{x}}_N, \hat{\mathbf{y}}$ .

### 2.2 Die quasi-dynamische Lösung

Die Berücksichtigung der zufälligen (korrelierten) Festpunktfehler  $\mathbf{P}_F^{-1}$  geschieht hier so, dass man diese nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz von den  $\mathbf{x}_F$  auf die I überträgt, vgl. Höpcke (1980), S. 106, und dann die zufälligen (korrelierten) Messungsfehler  $\mathbf{P}^{-1}$  um diesen Einfluss, d.h.

$$\text{um } \mathbf{A}_F \mathbf{P}_F^{-1} \mathbf{A}_F^T,$$

vergrößert, womit sodann

$$\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{A}_F \mathbf{P}_F^{-1} \mathbf{A}_F^T = \bar{\mathbf{P}}^{-1}. \quad (13)$$

$\bar{\mathbf{P}}$  wird nun als Gewichtsmatrix den um  $\mathbf{A}_F \delta\hat{\mathbf{x}}_F$  verkürzten Fehlergleichungen

$$\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{A}_N \delta\hat{\mathbf{x}}_N + \mathbf{B}\hat{\mathbf{y}} - I^0 \quad (14)$$

beigegeben. Aus  $\bar{\mathbf{v}}^T \bar{\mathbf{P}} \bar{\mathbf{v}} = \min$  folgen die Normalgleichungen

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_N^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{A}_N & \mathbf{A}_N^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B} \\ \dots & \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{P}} \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{x}}_N \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_N^T \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \bar{\mathbf{P}}^{-1} I^0, \quad (15)$$

die nach  $\delta\hat{\mathbf{x}}_N$  und  $\hat{\mathbf{y}}$  aufzulösen sind.

Von Wolf [1983] ist bewiesen worden, dass dieses Verfahren im Falle nichtvorhande-

die nachstehenden Normalgleichungen:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_{FF} & \mathbf{M}_{FN} & \mathbf{M}_{Fy} \\ \dots & \mathbf{M}_{NN} & \mathbf{M}_{Ny} \\ \dots & \dots & \mathbf{M}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\hat{\mathbf{x}}_F \\ \delta\hat{\mathbf{x}}_N \\ \hat{\mathbf{y}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_F^T \\ \mathbf{A}_N^T \\ \mathbf{B}^T \end{bmatrix} \mathbf{P} I = 0, \quad (11)$$

worin

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{FF} &= \mathbf{A}_F^T \mathbf{P} \mathbf{A}_F + \mathbf{P}_F & , & \mathbf{M}_{NN} = \mathbf{A}_N^T \mathbf{P} \mathbf{A}_N \\ \mathbf{M}_{FN} &= \mathbf{A}_F^T \mathbf{P} \mathbf{A}_N & , & \mathbf{M}_{Ny} = \mathbf{A}_N^T \mathbf{P} \mathbf{B} \\ \mathbf{M}_{Fy} &= \mathbf{A}_F^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{P}_F \mathbf{G}_F^T & , & \mathbf{M}_{yy} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{G}_F^T \mathbf{P}_F \mathbf{G}_F. \end{aligned} \quad (12)$$

Vollen Spaltenrang der Matrix

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_F & \mathbf{A}_N & \mathbf{B} \\ \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{G}_F \end{bmatrix}, \text{ I = Einheitsmatrix}$$

vorausgesetzt, braucht eine freie Ausgleichung, vgl. Papo [1985] und Koch/Papo [1985] hier nicht durchgeführt zu werden, zumal diese eine Anfelderung an die – willkürlich wählbaren – Näherungs-Koordina-

ner Deformationen zu genau denselben Neupunktkoordinaten  $\hat{\mathbf{x}}_N$  führt wie die dynamische Lösung. Allerdings unterscheiden sich die ausgeglichenen Beobachtungen  $(I + \hat{\mathbf{v}}) = \hat{I}$  der dynamischen Lösung von den ausgeglichenen Beobachtungen  $(I + \bar{\mathbf{v}}) = \bar{I}$  der quasi-dynamischen Lösung, und zwar in den randlichen, den Festpunkten anliegenden Dreiecken [vgl. Wolf 1984], (Abb. 1).

Diese Diskrepanz der  $\hat{\mathbf{I}}$  gegen die  $\hat{\mathbf{I}}$  tritt übrigens auch innerhalb der dynamischen Lösung zutage, wenn man nach Bestimmung der  $\delta\hat{\mathbf{x}}_F$  nicht die  $(\mathbf{x}_F + \delta\hat{\mathbf{x}}_F) = \hat{\mathbf{x}}_F$  als definitive Festpunktkoordinaten ansieht, sondern statt dessen wieder zu den anfangs gegebenen Festpunktkoordinaten zurückkehrt und diese  $\mathbf{x}_F$  als definitiv erklärt. Denn es ist  $\mathbf{A}_F \delta\hat{\mathbf{x}}_F = \hat{\mathbf{I}} - \mathbf{I}$ .

### 2.3 Ein Sonderfall: Die hierarchische Lösung

Nimmt man an, es würden in den Fehlern der Festpunkte die deterministisch-funktionalen Anteile so stark über die stochastisch-zufälligen dominieren, dass diese dagegen verschwinden, so lässt sich dies formal dadurch ausdrücken, dass das Gewicht  $\mathbf{P}_F$  über alle Grenzen wächst – wegen der vorausgesetzten Kleinheit der zufälligen Festpunktsfehler. Dann gehen die Residuen  $\mathbf{v}_F$  in denen diese zufälligen Anteile zum Ausdruck kommen, gegen Null. Aus (9b) folgt mit  $\hat{\mathbf{v}}_F = \mathbf{0}$  dann

$$\delta\hat{\mathbf{x}}_F = -\mathbf{G}_F \hat{\mathbf{y}} \quad (16)$$

Dies in (9a) eingesetzt, liefert

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}_N \delta\hat{\mathbf{x}}_N - \mathbf{A}_F \mathbf{G} \hat{\mathbf{y}} + (\mathbf{B}_F + \mathbf{B}_N) \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{I}^0$$

$$\text{oder } \hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}_N \delta\hat{\mathbf{x}}_N - \mathbf{B}_N \hat{\mathbf{y}} - \mathbf{I}^0, \text{ Gewichtsmatrix} = \mathbf{P} \quad (17)$$

ist  $\mathbf{G}$  dabei ein solcher linearer Ausdruck in  $(x, y)$ , dass Spalten von  $\mathbf{B}_N$  proportional zu denen von  $\mathbf{A}_N$  werden, so ist  $\hat{\mathbf{y}}$  unbestimmt – vieldeutig, so dass auch der Fall  $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$  eine Lösung darstellt.

Damit ist eine neue Interpretation der klassischen «hierarchischen» Lösung gewonnen, welche sich durch die Fehlergleichungen

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{A}_N \delta\hat{\mathbf{x}}_N - \mathbf{I}^0, \text{ Gewicht } \mathbf{P} \quad (18)$$

ausdrückt: Deren Anwendung ist dann gerechtfertigt, wenn die Festpunktsfehler überwiegend deterministisch-funktionalen Charakter besitzen und sich in erster Approximation linear verhalten: Dann ist die rein stochastische Behandlungsweise der Festpunktsfehler (als korrelierte Zufallsgrößen) fehl am Platz.

### 3. Auffindung der zweckmässigsten Deformationsfunktion

Man kann zeigen [Wolf 1988], dass durch die Einführung von Zusatzparametern – hier  $\hat{\mathbf{y}}$  – immer eine Verringerung des Wertes von  $\Omega$  eintreten muss. Mithin wird man bei der Entscheidung über die Form von  $\mathbf{G}\mathbf{y}$  jenes System bevorzugen, welches

(mit  $\Omega$ ) den Kleinstwert in der Varianz  $\hat{\sigma}_0^2 = \Omega/f$  erbringt, wobei  $f$  die Anzahl der Freiheitsgrade angibt. (Es muss nämlich nicht notwendig jede Verringerung von  $\Omega$  auch eine Verringerung von  $\hat{\sigma}_0$  erbringen, wegen der wechselnden Freiheitsgrade:  $\hat{\sigma}_0$  kann – im Gegenteil – u.U. sogar wieder ansteigen bei der Hinzunahme weiterer  $y$ -Parameter. Daher darf nicht  $\Omega$ , sondern es muss  $\hat{\sigma}_0$  zum Kriterium genommen werden.) Dabei wurde die folgende Strategie als angemessen und praktikabel gefunden, da man sich bei konstantem  $f$  auch auf die Änderungen in  $\Omega$  beziehen kann:

- 1) Man führe eine herkömmliche Ausgleichung ohne Deformationsparameter  $\mathbf{y}$  aus.
- 2) Den dabei sich zeigenden Residuen  $\mathbf{v}_0$  unterlege man der Reihe nach einige plausible funktionale Terme  $\mathbf{B}\mathbf{y}^0$  und bestimme – ohne Gewichte – die kleinste Quadratsumme  $\Omega_e$  der

$$\mathbf{e} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{B}\mathbf{y}^0 \quad (19a)$$

$$\text{mit } \Omega_e = (\mathbf{e}^T \mathbf{e})_{\min} = \mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^T \mathbf{B}\mathbf{y}^0 = (\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_0^T \mathbf{B}\mathbf{y}^0) \quad (19b)$$

$$\Delta\Omega_e = \mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0 - (\mathbf{e}^T \mathbf{e})_{\min} = \mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0 - \Omega_e \quad (20)$$

liefert, wird dann der abschliessenden Ausgleichung zu Grunde gelegt.

### 4. Ein Beispiel

Zur Demonstration wird ein (synthetisches) Beispiel vorgeführt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird ein Netz kleinster Parameterzahl gewählt, d.h. eine Einzelpunkteinschaltung, und zwar auf Grund von 4 gemessenen Strecken  $s_1, s_2, \dots, s_4$  zwischen dem Neupunkt N und den Festpunkten  $F_1, F_2, \dots, F_4$ . Dabei wird das quasidynamische Modell (14) zu Grunde gelegt.

#### 4.1 Gegebene und genäherte Koordinaten

a) Festpunktskoordinaten  $\mathbf{x}_F$ :

$F_1$ :	$x_F = 34\,382,28$ ;	$y_F = 95\,515,11$
$F_2$ :	29 190,68	90 336,25
$F_3$ :	30 908,44	87 373,03
$F_4$ :	33 834,88	89 733,17

b) genäherte Neupunktskoordinaten  $\mathbf{x}_N^0$ :

$$N: x_N^0 = 30\,505,41; y_N^0 = 90\,119,45$$

#### 4.2 Gemessene Strecken $s$

$s_1 = F_1N = 6\,644,03$ m
$s_2 = F_2N = 1\,332,50$ m
$s_3 = F_3N = 2\,775,77$ m
$s_4 = F_4N = 3\,351,65$ m

### 4.3 Stochastisches Modell

$$a) D(\mathbf{s}) = \mathbf{P}^{-1} = \text{diag} [0,01; 0,01; 0,01; 0,01] \quad [\text{dm}^2],$$

$$b) D(\mathbf{x}_F) = \mathbf{P}_F^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 & x_3 & y_3 & x_4 & y_4 \\ +0,10 & -0,04 & -0,02 & +0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & +0,08 & -0,03 & -0,01 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & \dots & +0,09 & +0,02 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \dots & +0,11 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \dots & +0,08 & +0,05 & 0 & 0 \\ & & & & & \dots & +0,07 & 0 & 0 \\ & & & & & & \dots & +0,10 & +0,03 \\ & & & & & & & \dots & +0,07 \end{bmatrix} \quad [\text{dm}^2]$$

# Partie rédactionnelle

## 4.4 Die herkömmliche Ausgleichung ohne Deformationen

a) Fehlergleichungen:  $\mathbf{v}_0 = \mathbf{A}_N \hat{\delta \mathbf{x}}_N^0 - \mathbf{l}^0$ , mit

$\mathbf{l}^0 = [+0,1; -0,1; +0,6; +1,5]^T$  dm, und mit  $i = 1,2,\dots,4$ :

$$\mathbf{A}_N^T = \begin{bmatrix} \dots, (x_N - x_i) / s_i, \dots \\ \dots, (y_N - y_i) / s_i, \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +0,584; -0,987; +0,145; +0,993 \\ +0,812; +0,163; -0,989; -0,115 \end{bmatrix}$$

b) Formal-Gewichte:  $\bar{\mathbf{P}} = (\mathbf{P}^{-1} + \mathbf{A}_F \mathbf{P}_F^{-1} \mathbf{A}_F^T)^{-1}$ , vgl. (13):

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} +90,38; -34,99; 0; 0 \\ \dots +24,30; 0; 0 \\ \dots +17,86; 0 \\ \dots +10,75 \end{bmatrix} \quad [\text{dm}^2]$$

c) Normalgleichungen, vgl. (15):

$$\begin{bmatrix} +105,81 & +59,87 \\ \dots & +68,59 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta x}_N^0 \\ \hat{\delta y}_N^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30,73 \\ -3,24 \end{bmatrix} = 0$$

woraus:  $\hat{\delta x}_N^0 = -0,627$  dm;  $\hat{\delta y}_N^0 = +0,594$  dm,  $\Omega_0 = 11,272$

und damit  $\mathbf{v}_0^T = [+0,217; +0,616; -0,080; +0,809]^T$  [dm],

so daß  $\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0 = 1,087$ .

(in Prozenten von  $\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0$ )

Hiernach bringt das 1. System mit

$$\mathbf{G}_1 = [\dots, x_i, 0, \dots]^T, \mathbf{y}_1 = \eta_1$$

(21) die stärkste Verringerung von  $\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0$ . Daher wird in der abschliessenden Ausgleichung die Deformationsfunktion  $\mathbf{G}_1 \mathbf{y}_1$  zu Grunde gelegt.

## 4.6 Die Ausgleichung mit Deformationen

Fehlergleichungen:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_N \hat{\delta \mathbf{x}}_N + \mathbf{B}_1 \mathbf{y}_1 - \mathbf{l}^0, \text{ Gewicht: } \bar{\mathbf{P}},$$

wobei die Elemente von  $\mathbf{A}_N$  aus (21) und die von  $\mathbf{B}_1$  aus (22) zu entnehmen sind. Die Normalgleichungen nach (15) lauten dann:

$$\begin{bmatrix} 105,808 & +59,875 & -17,507 \\ \dots & +68,587 & -11,594 \\ \dots & \dots & +4,148 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\delta x}_N \\ \hat{\delta y}_N \\ \hat{\eta}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 30,733 \\ -3,242 \\ -7,468 \end{bmatrix} = \mathbf{v}$$

woraus  $\hat{\delta x}_N = -0,227$  dm;  $\hat{\delta y}_N = +0,735$  dm,  $\Omega = 1,463$ .

## 4.5 Analyse der $\mathbf{v}_0$ auf mögliche Deformationen

Als diskutabile Formen der systematischen Deformation werden den  $\mathbf{v}_0$  die nachstehenden Funktionsansätze unterlegt, wobei die  $x_i, y_i$ , vgl. (7), von dem Bezugspunkt ( $x_0 = 29\,000,00$ ;  $y_0 = 87\,000,00$ ) aus zählen, genommen in Einheiten von je 10 km:

1. System:  $\mathbf{G}_1 \eta_1$  mit  $\mathbf{G}_1 = [\dots, x_i, 0, \dots]^T$

2. System:  $\mathbf{G}_2 \eta_2$  mit  $\mathbf{G}_2 = [\dots, (x_i)^2, 0, \dots]^T$

3. System:  $\mathbf{G}_3 \eta_3$  mit  $\mathbf{G}_3 = [\dots, 0, x_i y_i, \dots]^T$

4. System:  $\mathbf{G}_4 \eta_4$  mit  $\mathbf{G}_4 = [\dots, x_i, y_i, \dots]^T$

Das 4. System bringt eine blosse Massstabsänderung der Koordinaten um den Faktor  $(1 + \eta_4)$  zum Ausdruck. Dabei sind die Auswirkungen auf die Fehlergleichungen

$$(\mathbf{A}_F \mathbf{G}_F + \mathbf{A}_N \mathbf{G}_N) \eta_4 = \mathbf{B}_4 \eta_4$$

genau dieselben, wie wenn man die Strecken  $s$  mit der Massstabsunbekannten  $(1 - \eta_4)$  multiplizieren würde (und dafür die Koordinaten ungeändert belässt.) Der Einfluss einer Rotation bzw. einer Translation ist jedoch gleich Null.

Die Matrizen  $\mathbf{A}_F \mathbf{G}_F + \mathbf{A}_N \mathbf{G}_N = \mathbf{B}$  lauten in den 4 Systemen:

im 1. System	im 2. System	im 3. System	im 4. System
$\begin{bmatrix} -0,226 \\ -0,130 \\ -0,006 \\ -0,331 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,156 \\ -0,022 \\ -0,002 \\ -0,210 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,334 \\ +0,007 \\ -0,040 \\ +0,010 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,664 \\ -0,133 \\ -0,278 \\ -0,335 \end{bmatrix}$

(22)

Berechnet man hiermit nach Gl.(20) die Änderungen  $\Delta \Omega_e$  von  $\mathbf{v}_0^T \mathbf{v}_0 = 1,087$ , so erhält man die folgenden Werte:

	im 1. System	im 2. System	im 3. System	im 4. System
$\Delta \Omega_e =$	0,884	0,684	0,030	0,348
$=$	81%	63%	3%	32%

## 4.7 Vergleich der Ergebnisse, Genauigkeiten

Es waren erhalten worden:

	ohne Deformations- berück- sichtigung	mit Deformations- berück- sichtigung	Differenz
Koordinaten: $\delta \hat{x}_N$	-6,3 cm	-2,3 cm	-4,0 cm
$\delta \hat{y}_N$	+6,0	+7,4	-1,4
Deformation: $\hat{\eta}_1$	—	+2,90	—
Verbess.-Quadratsumme $\Omega$	11,272	1,463	9,809 (= 87%)
Die Genauigkeitsberechnung ergab:			
Anzahl der Freiheitsgrade: f	2	1	1
Varianz $\hat{\sigma}_o^2$ der Gewichtseinheit	5,636	1,463	-4,173
Koordinaten-Kofaktoren: $Q_{xN xN}$	1,87	3,50	+1,63
$Q_{yN yN}$	2,88	3,08	+0,20
Deformations-Kofaktor: $Q_{\eta_1 \eta_1}$	—	0,855	—
Standardabweichungen:			
a) der Gewichtseinheit: $\hat{\sigma}_o$	$\pm 2,37$	$\pm 1,21$	
b) der gemessenen Strecken: $\hat{\sigma}_s$	$\pm 2,4$ cm	$\pm 1,2$ cm	
c) der Neupunktkoordinaten: $\hat{\sigma}_{xN}$	$\pm 3,2$ cm	$\pm 2,3$ cm	
$\hat{\sigma}_{yN}$	$\pm 4,0$ cm	$\pm 2,1$ cm	
d) des Deformationsparameters: $\hat{\sigma}_{\eta_1}$	—	$\pm 1,12$	
Mittlerer Punktfehler nach Helmert (= Länge der Hauptachsen- diagonale der Standardfehler- ellipse)	$\pm 5,2$ cm	$\pm 3,1$ cm	

$\pm 1,0$  cm erreicht. Obwohl durch die Einführung von  $\eta_1$  die Koordinaten-Kofaktoren angestiegen sind, ist durch das Zurückgehen der Standardabweichung  $\hat{\sigma}_o$  für die Gewichtseinheit (gleichfalls von  $\pm 2,4$  cm auf  $\pm 1,2$  cm) im ganzen doch eine Verringerung der Koordinaten-Standardabweichungen eingetreten: Der mittlere Punktfehler ist auf 60% seines Wertes ohne Deformationsberücksichtigung zurückgegangen. Der Wert der gewogenen Verbesserungsquadratsumme  $\Omega$  ist sogar um 87% seines Anfangswertes verkleinert und hat damit den in der  $v_o$ -Analyse erhaltenen Wert von 81% noch übertroffen. — Die Nichtberücksichtigung der funktionalen Deformation kann also ganz unzutreffende Genauigkeitswerte vortäuschen!

### Literatur:

Höpcke, W.: Fehlerlehre und Ausgleichsrechnung. W. de Gruyter, Berlin/New York 1980.

Koch, K.-R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen. Dümmler, Bonn 1980.

Koch, K.-R. und H. Papo: Erweiterte freie Netzausgleichung. Z.f. Verm.wesen 110, 1985, S. 451–457.

Papo, H.: Extended free net adjustment constraints. Bull. Géodés., vol. 59, 1985, S. 378–390.

Wolf, H.: On the densification problem of geodetic networks. Rep. Geod. Inst. Uppsala No. 19, (Prof.-Tengström-Festschrift). Uppsala 1983, S. 275–283.

Wolf, H.: Zur Praxis der Punkteinschaltungen. Allg. Vermessungs-Nachrichten 91, 1984, S. 432–440.

Wolf, H.: Complete and incomplete functional models. (Prof.-Tarczy-Hornoch-Gedächtnisschrift), Budapest 1988 (In Vorbereitung).

## 5. Schluss

Die erhaltenen Ergebnisse zeigen, dass sich die Einführung des Deformationsparameters  $\eta_1$  gelohnt hat: Die Standardab-

weichung  $\hat{\sigma}_s$  einer der gemessenen Strecken a posteriori ist dadurch von  $\pm 2,4$  cm auf  $\pm 1,2$  cm zurückgegangen und hat damit fast den a priori geschätzten Wert  $\sigma_s =$

Adresse des Verfassers:  
Prof. Dr.-Ing. Helmut Wolf  
Am Sonnenhang 10  
D-5300 Bonn 1