Zeitschrift: Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural

Herausgeber: Schweizerischer Verein für Vermessung und Kulturtechnik (SVVK) = Société suisse des mensurations et améliorations foncières (SSMAF)

Band: 84 (1986)

Heft: 8: 125 Jahre Schweizerische Geodätische Kommission

Artikel: Über die mathematischen Methoden der globalen Geodynamik

Autor: Bauersima, I.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-233057

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Partie rédactionnelle

Über die mathematischen Methoden der globalen Geodynamik

I. Bauersima

Vornehmstes Ziel der globalen Geodynamik ist die Lösung der Bewegungsgleichungen eines nicht mehr als starr angenommenen Erdmodells und die empirische Bestimmung der dieses Modell charakterisierenden Parameter. Die Zielsetzungen dieses Artikels sind jedoch bescheidener: Nach einleitenden Bemerkungen werden in Kapitel 2 die Prinzipien zur Lösung dieser anspruchsvollen Parameterbestimmungsaufgabe vorgestellt, in den Kapiteln 3 und 4 wird der Begriff «Erdmodell» präzisiert sowie die möglichen Parameter eines Erdmodells diskutiert. Bevor schliesslich in Kapitel 8 die Bewegungsgleichungen für eine linear elastische Erde aufgestellt werden können, müssen in den Kapiteln 5, 6 und 7 die rheologischen Gleichungen, die Kontinuitätsgleichung sowie die Poisson'sche Gleichung eingeführt werden. Im Schlusskapitel 9 wird auf einige Teilaspekte der Bewegung der elastischen Erde hingewiesen und eine zweckmässige Definition der «Winkelgeschwindigkeit der Rotation der nicht starren Erde» aufgestellt und am Beispiel der elastischen Erde ihr Zusammenhang mit der Lösung der Bewegungsgleichungen gezeigt. Es wurde versucht, die einzelnen Kapitel so aufzubauen, dass zu Beginn wichtige physikalische Inhalte und mathematische Konzepte vorgestellt werden. Erst dann folgen Skizzen von mathematischen Ableitungen, die sich eher an einen engeren Kreis von näher interessierten Lesern wenden.

Le but principal de la géodynamique du globe consiste en la solution des équations du mouvement d'un modèle de la Terre qui n'est plus considérée comme rigide, et en la détermination empirique des paramètres caractérisant ce modèle. Le but de cet article est toutefois moins ambitieux: Après quelques remarques d'introduction, le chapitre 2 présente le principe de la solution de ce difficile problème qu'est la détermination des paramètres. Les chapitres 3 et 4 précisent la notion de modèle de la Terre et en discutent les paramètres inconnus. Après l'introduction, dans les chapitres 5, 6 et 7, des équations rhéologiques, de l'équation de continuité et de l'équation de Poisson, le chapitre 8 peut enfin formuler les équations du mouvement pour une Terre linéairement élastique. Le dernier chapitre (9) relève quelques aspects particuliers du mouvement d'une Terre élastique; il présente aussi une définition appropriée de la «vitesse angulaire de rotation d'une Terre non-rigide» ainsi que, illustré par l'exemple d'une Terre élastique, son lien avec la solution des équations du mouvement. Les différents chapitres contiennent en principe d'abord une présentation du contenu physique essentiel et des concepts mathématiques. Viennent ensuite des esquisses de développement mathématique qui intéresseront un cercle plus restreint de lecteurs.

1. Einleitung

Im Zusammenhang mit dem zwangsläufigen Abgang des Starrkörpermodells der Erde aus der Szene der diesbezüglich relevanten Disziplinen stellt sich die Frage nach dem Inhalt klassischer Begriffe wie der Winkelgeschwindigkeit der Rotation der Erde, der Präzession, der Nutation und der freien Nutation der Rotationsachse der Erde.

Diese – ursprünglich im Rahmen der Kinematik eines starren Körpers wohldefinierten – Begriffe verlieren für deformierbare Körper völlig ihren Sinn, ausser man definiere sie neu so, dass sie im Spezialfall eines starren Körpers wieder ihre klassischen Bedeutungen annehmen. Der Sinn solcher Definitionen kann aber nur in deren Zweckmässigkeit liegen, denn eine Definition macht nicht den physikalischen Inhalt aus. Dieser ist äquivalent einem bestmöglichen Erdmodell, dessen Ermittlung schlussendlich die Hauptaufgabe aller Erdwissenschaften ist. Die Bewältigung dieser Aufgabe erfordert zunächst, dass sie mathematisch angemessen und korrekt formuliert wird. Wie dies zu geschehen hat, soll im folgenden skizziert werden.

2. Methode

2.1 Der Weg zur Ermittlung eines bestmöglichen Erdmodells führt über die Konfrontation verschiedenster Erdmodelle mit der Empirie oder mit den Beobachtungen. Diese stellen die Werte 0' bestimmter Grössen – der sog. Observalen – zur Verfügung. Die Modelläquivalente 0 der Observablen sind bekannte Funktionen der Parameter des Erdmodells sowie der Anfangs- und Randbedingungen. Diese Funktionen sind jedoch nur implizite gegeben und zwar durch das System der rheologischen Gleichungen sowie der Zustands-, Kontinuitäts- und Bewegungsgleichungen des betreffenden Erdmodells. Die Ermittlung eines bestmöglichen Erdmodells besteht nun in der Bestimmung der Anfangsbedingungen und der in den gerade erwähnten Gleichungen figurierenden Modell-Parameter. Dass dazu das vorliegende Anfangs- und Randwertproblem gelöst – und somit die Bewegung des Erdmodells als eines physikalischen Kontinuums bestimmt werden muss versteht sich von selbst. Die Randbedingungen können meist als bekannt betrachtet werden. Das entsprechende Parameterbestimmungs-Verfahren besteht nun darin, dass neben dem Vektor $\boldsymbol{p} := [p_1, p_2, \ldots, p_m]$ der unbekannten Anfangsbedingungen und Modellparameter noch ein zweiter unbekannter Vektor, nämlich der Vektor $\boldsymbol{v} := [v_1, v_2, \ldots, v_n]$ der Differenzen $v_i = 0_i - 0_i'$ der beobachteten Werte 0' der Observablen und deren Modelläquivalente 0 eingeführt wird. Diese Verbesserungen v_i können wegen der Beobachtungsfehler und der Unvollkommenheit des Erdmodells nicht alle gleichzeitig zum Verschwinden gebracht werden. Die Beobachtungen und das Erdmodell bieten somit n Bedingungsgleichungen – die sog. Verbesserungsgleichungen $v_i = 0_i - 0_i'$ für $n+m$ Unbekannte p_k und v_i, $k=1,2,\ldots,m$, $i=1,2,\ldots,n$. Um zu einer eindeutigen Lösung eines solchen Gleichungssystems zu gelangen, muss $n > m$ sein ***und*** der Verbesserungsvektor $\boldsymbol{v}$ muss einer Optimierungsbedingung unterworfen werden. Dies geschieht, indem man verlangt, dass

$$\| \boldsymbol{v} \| = \text{Minimum} \qquad (1)$$

wobei $\| \quad \|$ eine geeignete Norm ist. Diese Bedingung ist dann äquivalent den m Gleichungen

$$\frac{\delta}{\delta p_k} \| \boldsymbol{v} \| = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m \qquad (2)$$

womit die Zahl der Gleichungen auf die Zahl der $(m+n)$ Unbekannten $p_1, p_2, \ldots, p_m$ und v_i, $v_2, \ldots, v_{n2}$ erhöht wird. Ist die erwähnte Norm euklidisch, d.h. gilt $\|\boldsymbol{v}\| = \Sigma v_i$, so wird das Parameterbestimmungs-Verfahren die Methode der kleinsten Quadrate genannt.

2.2 Das von der Theorie und auch der Praxis her weitaus anspruchvollste Segment des in 2.1 erwähnten Parameterbestimmungsverfahren ist – in Fällen nichtstarrer Erdmodelle – die Ermittlung der Modelläquivalente 0 der Observablen in Form von expliziten analytischen oder numerischen Funktionen der zu bestimmenden Modellparameter und Anfangsbedingungen $\boldsymbol{p} \equiv [p_i, p_2, \ldots, p_m]$. Der Bestimmung dieser Funktionen geht jedoch die analytische oder numerische Lösung des erwähnten Anfangs- und Randwertproblems voraus. Dies geschieht mit bekannten Näherungswerten für die Unbekannten $\boldsymbol{p} \equiv [p_i, p_2, \ldots, p_m]$ bei der ersten Iteration. Für den Fall gewöhnlicher Differentialgleichungssysteme ist das Parameterbestimmungsverfahren in (Beutler, 1982) beschrieben worden. Für Systeme partieller Differentialgleichungen beruht das Parameterbestimmungsverfahren auf den gleichen Prinzipien.

3. Allgemeines über das Erdmodell

3.1 Da die Deformationen der Erde über lange Zeitintervalle sehr klein sind, ist es oft von Vorteil, die Bewegung der Erde als eines materiellen Kontinuums in die Summe

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{u} \tag{3}$$

bestehend aus einer deformationsfreien Bewegung

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Q}(t;H) \cdot \boldsymbol{Y} \tag{4}$$

eines «erstarrten» Modells der Erde und einer Verschiebung

$$\boldsymbol{u} \tag{5}$$

zu zerlegen.

Dabei ist (4) die Lösung des Anfangs- und Randwertproblems für das *rotationssymmetrische* Starrkörpermodell der Erde. $\boldsymbol{Y}$ und $\boldsymbol{y}$ sind die geozentrischen Radiusvektoren *einer und derselben Partikel* q (s. 3.3) dieses Modells zu den Augenblikken t_0 und t. Daher gilt

$$\boldsymbol{Q}(t_0,H) = \boldsymbol{E} \quad , \tag{6}$$

wobei $\boldsymbol{E}$ der Identitätstensor ist. $\boldsymbol{Q}$ ist dann ein Drehtensor. Der dem Eigenwert 0 entsprechende Eigenvektor $\vec{\omega}$ des Antisymmetrischen Tensors $(d\boldsymbol{Q}/dt) \cdot \boldsymbol{Q}^T$, d.h. der sog. duale Vektor dieses Tensors, ist dann identisch mit der Winkelgeschwindigkeit der Rotation des Starrkörpermodells der Erde. Ausser von der unabhängig veränderlichen Zeit t hängt $\boldsymbol{Q}$ noch von der sog. dynamischen Abplattung $H = (C-A)/C$ des Starrkörpermodells der Erde ab, wobei A und C deren zentrale Hauptträgheitsmomente sind und $A < C$ gilt.

Wichtig ist, dass die dynamische Abplattung H – als der einzig relevante Parameter eines rotationssymmetrischen Starrkörpermodells der Erde – und die 6 Anfangsbedingungen durch das im Abschnitt 2 geschilderte Parameterbestimmungsverfahren ermittelt werden. Die erwähnten 6 Anfangsbedingungen geben die Lage und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des durch die zentralen Hauptträgheitsachsen des Starrkörpermodells der Erde definierten erdfesten Koordinatensystems gegenüber einem Inertialsystem im Augenblick t_0 an.

Die erwähnte Anfangswinkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ wird dabei im Augenblick t_o kolinear mit der Achse des maximalen zentralen Trägheitsmomentes gewählt. Man kann dann zeigen, dass sie es auch – bis auf Abweichungen von höchstens 0.01" (diese entsprechen der Abplattung H der Erde und den störenden Gezeitenkräften der Sonne und des Mondes und heissen Oppolzer'sche Nutationen) – für alle Zeiten bleibt. Darüber hinaus bleibt im Feld der äusseren Gravitations-Gezeitenkräfte (Sonne, Mond) die in der Achse des maximalen zentralen Trägheitsmomentes eines *rotationssymmetrischen* Starrkörpermodells liegende Komponente der Winkelgeschwindigkeit seiner Rotation *exakt* erhalten. Dies stimmt auch im allgemeinen Fall, wenn $\vec{\omega}(t_o)$ nicht kolinear mit der Achse des maximalen zentralen Trägheitsmomentes gewählt wird. Im Falle unseres erstarrten Erdmodells ist dann der Betrag dieser Komponente gleich $\omega = |\vec{\omega}|$, da dies im Augenblick t_o definitionsgemäss der Fall ist.

3.2 Unter dem eigentlichen Erdmodell verstehen wir einen fiktiven Körper, dessen *Masse* bzw. *Abplattung* H (s. 3.1) gleich jener der *Erde* bzw. des zuvor definierten *Starrkörpermodells* der Erde ist und dessen (im Körper «eingefrorene») zentrale Hauptträgheitsachsen in jedem Augenblick t mit jenen des Starrkörpermodells der Erde (s. 3.1) zusammenfallen. Darüberhinaus soll die Dichte im Erdmodell gleich verteilt sein wie in einer, mit der Winkelgeschwindigkeit ω (s. 3.1) um die Achse des maximalen zentralen Trägheitsmomentes rotierenden, Gleichgewichtsfigur eines Gemisches idealer Flüssigkeiten.

Der Spannungstensor $\boldsymbol{T}_o$ (siehe 5.2) im *Erdmodell* ist also definitionsgemäss isotrop, d.h.

$$\boldsymbol{T}_0 := -p(q)\boldsymbol{E} \quad , \tag{7}$$

wobei $p(q)$ der aus der Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten (s. 8.3) bekannte hydrostatische Druck als Funktion der Partikel q (s. 3.3) ist. Da das soeben definierte «erstarrte» Erdmodell die gleiche dynamische Abplattung H wie das in 3.1 definierte Starrkörpermodell hat, ist die Bewegung dieser beiden Modelle nicht nur vom kinematischen sondern auch vom dynamischen Standpunkt identisch.

3.3 Mit dem Erdmodell und mit der Erde (s. 3.4) kann ein im allgemeinen krummliniges Koordinatensystem $q \equiv (q^1, q^2, q^3)$ so verknüpft werden, dass die Koordinaten q^i jeder Partikel mit der Zeit konstant bleiben. Das Koordinatensystem $q \equiv (q^1, q^2, q^3)$ «macht somit die Deformationen der Erde mit». Demnach kann $q \equiv (q^1, q^2, q^3)$ als der Name einer Partikel aufgefasst werden. Unter $\boldsymbol{Y}$ und $\boldsymbol{y}$ in (4) sind also die geozentrischen Radiusvektoren

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{y}(q,t_0) \text{ und } \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(q,t) \tag{8}$$

einer und derselben Partikel q unseres *Erdmodells* zu den Augenblicken t_0 und t zu verstehen.

3.4 Es ist wichtig zu beachten, dass das **«Erdmodell»** zu jedem Augenblick t als eine gleichmässig rotierende Gleichgewichtsfigur definiert wurde (s. 3.2). Der Begriff **«die Erde»** wird hingegen für das entsprechende – den störenden (realen und inertialen) Volumenkräften ausgesetzte – deformierbare materielle Kontinuum reserviert.

Der geozentrische Radiusvektor der Partikel q in der **Erde** zum Augenblick t ist dann

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q,t) = \boldsymbol{y}(q,t) + \boldsymbol{u}(q,t). \tag{9}$$

4. Näheres über die Unbekannten eines Erdmodells

4.1 Im Rahmen dieser kurzen Übersicht ist es nicht möglich, die mathematischen Probleme der globalen Geodynamik in voller Allgemeinheit darzulegen. Wir beschränken uns daher auf das repräsentative Beispiel eines isotropen linear elastischen Erdmodells. Unter den rheologischen Parametern (s. Abschnitt 5) eines solchen Erdmodells (s. 3.2) sind dann die Dichte ϱ_o, das Kompressionsmodul K und das Schubmodul μ zu verstehen. Das erwähnte Erdmodell nimmt dann die folgende Gestalt an:

$$\begin{aligned} \varrho_o(q,t) &= \varrho_o(q) = \varrho_o + \varrho_1\Phi_1(q) + \ldots + \varrho_a\Phi_a(q) \quad , \\ K(q,t) &= K(q) = K_o + K_1\Phi_1(q) + \ldots + K_b\Phi_b(q) \quad , \\ \mu(q,t) &= \mu(q) = \mu_o + \mu_1\Phi_1(q) + \ldots + \mu_c\Phi_c(q) \quad , \end{aligned} \tag{10}$$

wobei $\Phi_i(q)$ bekannte unabhängige Basisfunktionen (z.B. die orthogonalen Laplaceschen Kugelfunktionen) der Partikel q (s. 3.3) sind.

Die Funktion ϱ_o (s. $(10)_1$) unterliegt bestimmten – erst in 8.3 näher spezifizierten Bedingungen. Diese drücken in mathematischer Gestalt die bereits in 3.2 aufgestellten Annahmen aus, dass das Erdmodell eine gleichmässig rotierende Gleichgewichtsfigur mit der Masse der Erde und mit der dynamischen Abplattung H des in 3.1 definierten Starrkörpermodells der Erde ist.

4.2 Hier (s. $(10)_1$) und im folgenden unterscheiden wir zwischen der Dichte der Partikel q (s. 3.3) des *Erdmodells* und der Dichte der gleichen Partikel der *Erde* (beachte 3.4) zum gleichen Augenblick t durch die Bezeichnungen

$$\varrho_o(q,t) \equiv \varrho_o(q) \text{ und } \varrho(q,t) \quad . \tag{11}$$

Demgegenüber betrachten wir die Kompressions- und Schubmodule K und μ als nur partikelabhängig, d.h. zeit- und deformationsunabhängig. Daher nimmt K bzw. μ in einer bestimmten Partikel q der Erde für alle Zeiten den gleichen (konstanten) Wert wie im Erdmodell (s. 3.4) an.

4.3 Mit Rücksicht auf 3.3 ist nun nach (9)

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{u}$$

der geozentrische Radiusvektor der Partikel q der Erde (s. 3.4). Die Anfangsbedingungen lauten dann

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}(q,t_0) = \boldsymbol{u}_0(q) = \vec{\nabla}(u_{01}\Phi_1(q) + \ldots + u_{0d}\Phi_d(q)) + \\ + \vec{\nabla} \times (\omega_{01}\Phi_1(q) + \ldots + \omega_{0e}(q)) \end{aligned} \tag{12}$$

wobei $\Phi(q) := \Sigma u_{0i}\Phi_i(q)$ und $\psi(q) := \Sigma\omega_{0i}\Phi(q)$ die sog. Skalar- und Vektorpotentiale des Verschiebungsfeldes $\boldsymbol{u}$ im Augenblick t_0 sind (Φ_i sind dabei – wie in (10) – gegeben) und

$$\vec{\nabla} := \boldsymbol{G}^i \nabla_i \quad . \tag{13}$$

Hierbei sind $\boldsymbol{G}^i$ die Basisvektoren der lokalen kontravarianten Basis des im *Erdmodell* eingefrorenen Koordinatensystems $q \equiv (q^1, q^2, q^3)$, d.h.

$$\boldsymbol{G}^i = \frac{\boldsymbol{G}_j \times \boldsymbol{G}_k}{\boldsymbol{G}_i \cdot (\boldsymbol{G}_j \times \boldsymbol{G}_k)} \quad , \quad (i,j,k) = cykl\,(1,2,3), \tag{14}$$

mit

$$\boldsymbol{G}_i = \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial q^i} \quad , \quad (\boldsymbol{y} \text{ nach } (8)_2) \tag{15}$$

als Basisvektoren der zu $(\boldsymbol{G}^1, \boldsymbol{G}^2, \boldsymbol{G}^3)$ reziproken, d.h. kovarianten, Basis.
Weiter ist ∇_i die kovariante Ableitung nach q^i. Für diese gilt:

$$\nabla_i \boldsymbol{G}^j := \nabla_i \boldsymbol{G}_j := \boldsymbol{O} \quad , \tag{16}$$

und

$$\nabla_i \Phi = \partial_i \Phi \quad , \tag{17}$$

$$\nabla_i v_j - \partial_i v_j - \Gamma_{ik}^{\ j}\ v_k \quad , \tag{18}$$

bzw.

$$\nabla_i v^j = \partial_i v^j + \Gamma_{ik}^{\ j}\ v^k \quad , \tag{19}$$

wobei

$$\partial_i := \partial / \partial q_i \quad , \tag{20}$$

und Φ ein Skalarfeld, $v_j = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{G}_j$ bzw. $v^j = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{G}^j$ die kovarianten bzw. kontravarianten Komponenten eines Vektorfeldes $\boldsymbol{v}$ und $\Gamma_{ij}^{\ k} = \boldsymbol{G}^k \cdot (\partial_j \boldsymbol{G}_i) = -(\partial_i \boldsymbol{G}^k) \cdot \boldsymbol{G}_j$ die Christofel-Symbole sind.
Ist $q \equiv (q^1, q^2, q^3)$ ein kartesisches Koordinatensystem, dann geht die kovariante Ableitung in die partielle über, d.h.:

$$\nabla_i = \partial_i$$

Für kartesische Koordinaten: (21)

$$\vec{\nabla} = \boldsymbol{G}^i \partial_i =: \vec{\partial}$$

Dabei ist (ab (13) jeder Term mit zwei gleichnamigen Indizes als eine Summe über alle Werte (hier 1,2,3) dieser Indizes zu verstehen. Diese sog. Einsteinsche-Summierungsregel wird auch weiterhin verwendet.

4.4 In 2.1 haben wir das Prinzip des Parameterbestimmungsverfahrens skizziert, durch das der Vektor $\boldsymbol{p}$ der Unbekannten $p_1, \ldots, p_m$ ermittelt wird. Diese sind identisch mit den Koeffizienten der Reihenentwicklungen (10) und (12), d.h.:

$$\boldsymbol{p} \equiv [p_1, p_2, \ldots, p_m] = \tag{22}$$

$$= [\varrho_0, \ldots, \varrho_a, K_0, \ldots, K_b, \mu_0, \ldots, \mu_c, u_{01}, \ldots, u_{0d}, \omega_{01}, \ldots, \omega_{0e}].$$

Somit ist

$$m = a+b+c+d+3e+3 \quad . \tag{23}$$

Die Frage, ob nun alle Unbekannten (22), die ja grösstenteils die physikalischen Eigenschaften des Erdinnern beschreiben, durch Beobachtungen an der Erdoberfläche *eindeutig* bestimmt werden können, lassen wir dabei ausser Betracht. Die Antwort auf diese Frage hängt von der Art der Beobachtungen (z.B. astrometrische, Satelliten-, VLBI-, gravimetrische, seismische usw. Beobachtungen) und von der Vollständigkeit des Erdmodells ab

4.5 Betrachten wir als Beispiel für die Observable 0 die gegenüber einem Inertialsystem «beobachtete» Lotrichtung $\hat{\boldsymbol{g}}$ in einer bestimmten Partikel q (s. 3.3) der Erdoberfläche ∂E. Die empirischen Werte $\hat{\boldsymbol{g}}'$ dieser Observablen werden durch astronometrische Beobachtungen gewonnen. Das Modelläquivalent $\hat{\boldsymbol{g}}$ der Lotrichtung ist dann mit dem Erdmodell wie folgt verknüpft

$$\hat{\boldsymbol{g}} := \boldsymbol{g}/g \quad , \tag{24}$$

wobei

$$\boldsymbol{g} = -\vec{\nabla}\, \widetilde{W} \tag{25}$$

mit

$$\widetilde{\boldsymbol{W}} = W + U \quad , \tag{26}$$

wobei W das *Schwerepotential* der Erde (siehe 3.4) – und U das *Gezeitenpotential* der Gravitationskraft der Sonne und des Mondes in einer festen Partikel q (siehe 3.3) der Erdoberfläche ∂E sind. Für V gilt dabei

$$V = \int_{E_0} \frac{\varsigma(q',t;\boldsymbol{p})}{|\boldsymbol{x}(q,t;\boldsymbol{p}) - \boldsymbol{x}(q',t;\boldsymbol{p})|} \quad D \cdot dV' = V(q,t;\boldsymbol{p}), \tag{27}$$

wobei

E_0 das durch die Oberfläche ∂E_0 des Erdmodells (siehe 3.4) im Augenblick t eingeschlossene Gebiet ist.

dV' ist ein Volumenelement des Gebietes E_0,

$q' \in dV' \subset E_0$,

$q \in \partial E_0$,

t ist die Zeit,

$\boldsymbol{p}$ der in (22) definierte Vektor der unbekannten Parameter p_i,

ϱ die Dichte der Erde (s. 3.4 und $(11)_2$) und

$\boldsymbol{x}$ der geozentrische Radiusvektor der Partikel $q \in \partial E_0$ bzw. $q' \in E_0$ und

$$D = det\,(\vec{\nabla}\boldsymbol{x}). \tag{28}$$

Dabei ist $\vec{\nabla}\boldsymbol{x}$ das Tensorprodukt der Vektoren $\vec{\nabla}$ (siehe (13) bzw. (21)) und $\boldsymbol{x}$, $det\,(\vec{\nabla}\boldsymbol{x})$ ist die Determinante, d.h. die dritte Skalarinvariante des Tensors $\vec{\nabla}\boldsymbol{x}$.
Betrachtet man q vorübergehend als kartesische Koordinaten der Partikel $q \equiv (q^1, q^2, q^3)$ im Erdmodell (s. 3.3 und 3.4), so nimmt dann (8) die Form $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{G}_i q^i$ an. Die kovarianten Basisvektoren $\boldsymbol{G}_i$ sind dabei partikelunabhängig. Hiermit und mit (9) und (23) folgt dann aus (28), dass

$$D = det\,(\boldsymbol{E} + \vec{\nabla}\boldsymbol{u}) \quad . \tag{29}$$

Die in (27) figurierende Dichte ϱ und die Trajektorie $\boldsymbol{x}$ der Partikel q bzw. q' der Erde (s. 4.2) sind im allgemeinen Funktionen der Zeit und aller – d.h. nicht nur der ersten $(a+1)$ (vgl. $(10)_1$ und (22)) – unbekannten Parameter $p_1, \ldots, p_m$. Denn die Dichte $\varrho = \varrho(q,t)$ (s. $(11)_2$) sowie auch die Trajektorie $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q,t)$ der Partikel q machen die Lösung des in 2.1 und 2.2 erwähnten Anfangs- und Randwertproblems aus, und in diesem treten alle Parameter $p_1, \ldots, p_m$ auf. Daher muss sich im allgemeinen ergeben (siehe (9)), dass

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q,t;\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{Q}(t,H) \cdot \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{u}(q,t;\boldsymbol{p}) \tag{30}$$

und

$$\varrho = \varrho(q,t;\boldsymbol{p}) \tag{31}$$

mit $\boldsymbol{Y}$ nach $(8)_1$ und $\boldsymbol{p}$ nach (22).

5. Rheologische Gleichungen

5.1 Um den Rahmen dieses Übersichtsartikel nicht zu sprengen, haben wir im Abschnitt 4 entschieden, die mathematischen Probleme der globalen Geodynamik nur am Beispiel des isotropen linear elastischen Erdmodells zu demonstrieren. Die Materialeigenschaften dieses, wie auch jedes anderen (z.B. flüssigen) Modells, werden durch die sog. rheologischen Gleichungen charakterisiert. Diese geben die Abhängigkeit des Spannungstensors $\boldsymbol{T}$ vom Deformationstensor $\boldsymbol{D}$ oder von der Deformationsgeschwindigkeit $d\boldsymbol{D}/dt$ in der Partikel q der Erde an (s. 3.3 und 3.4).

5.2 Die physikalische Bedeutung des Spannungstensors wird implizit durch

$$\boldsymbol{t} = \boldsymbol{T} \cdot \hat{\boldsymbol{n}} \tag{32}$$

erklärt. Diese Relation stellt den folgenden Sachverhalt dar: Die auf eine Einheitsfläche mit der Normalen $\hat{\boldsymbol{n}}$ (Einheitsvektor) an der Stelle der Partikel q durch die «auf der Seite der Normale» angrenzenden Umgebung ausgeübte Kraft $\boldsymbol{t}$ ist gleich dem verjüngenden Produkt $\boldsymbol{T} \cdot \hat{\boldsymbol{n}}$ des Spannungstensors $\boldsymbol{T}$ und der Richtung der Normalen $\hat{\boldsymbol{n}}$.

Da die Deformationen der Erde sehr klein sind, ist es sinnvoll, den Spannungstensor $\boldsymbol{T}$ der linearen elastischen Erde (siehe 3.4) in die Summe

$$\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}_0 + \delta\boldsymbol{T} \tag{33}$$

des isotropen Spannungstensors $\boldsymbol{T}_0$ unseres Erdmodells (s. 3.4 und (7)) und des im allgemeinen anisotropen «erzwungenen» Spannungstensors $\delta\boldsymbol{T}$ zu zerlegen.

5.3 In der Elastizitätstheorie tritt an Stelle des Deformationstensors $\boldsymbol{D}$ der sog. Verzerrungstensor $\boldsymbol{U}$ auf. Dieser wird wie folgt definiert:

$$\boldsymbol{U} := 1/2(g_{ij} - G_{ij})\boldsymbol{G}^i\boldsymbol{G}^j \quad , \tag{34}$$

wobei g_{ij} und G_{ij} die Komponenten der Metriktensoren $g_{ij}\boldsymbol{g}^i\boldsymbol{g}^j$ und $G_{ij}\boldsymbol{G}^i\boldsymbol{G}^j$ in einer und derselben Partikel q (siehe 3.3) im deformierten (unsere Erde) und nichtdeformierten (unser Erdmodell; s. 3.4) Zustand des elastischen Körpers sind. Das heisst, dass

$$G_{ij} = \boldsymbol{G}_i \cdot \boldsymbol{G}_j \text{, mit } \boldsymbol{G}_i \text{ nach (15)}, \tag{35}$$

$$g_{ij} = \boldsymbol{g}_i \cdot \boldsymbol{g}_j \text{ , wobei} \tag{36}$$

$$\boldsymbol{g}_i = \partial \boldsymbol{x} / \partial q_i \text{ , mit } \boldsymbol{x} \text{ nach (9).} \tag{37}$$

Bleiben die auf den nicht deformierten Zustand bezogenen Änderungen der Entfernung zweier beliebiger Partikel des elastischen Körpers im Vergleich zu dieser Entfernung klein, dann ergibt sich aus (34) mit (9), (37), (36), (15) und (35) bis auf Terme zweiter Ordnung in U_{ij}, dass

$$\boldsymbol{U} = 1/2(\vec{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\vec{\nabla}) \tag{38}$$

wobei $\boldsymbol{u}$ nach Abschnitt 3.3 und $\vec{\nabla}$ nach (13), (16) – (20) bzw. (21) definiert sind.

5.4 Aufgrund thermodynamischer Überlegungen kann gezeigt werden, dass die eingangs des Abschnittes 5.1 erwähnten

rheologischen Gleichungen der linear elastischen Erde die folgende Form annehmen:

$$\delta T = K\boldsymbol{E}\, tr\boldsymbol{U} + 2\mu\,(\boldsymbol{U} - 1/3\,\boldsymbol{E}\, tr\boldsymbol{U}) \quad , \qquad (39)$$

wobei $tr\boldsymbol{U}$ die Spur, d.h. die erste Skalarinvariante des Verzerrungstensors $\boldsymbol{U}$ ist und K und μ die bereits im Abschnitt 4.1 erwähnten Kompressions- und Schubmodule sind.

Setzt man nun (38) in (39) und dies dann in (33) ein, ergibt sich mit $tr(\vec{\nabla}\boldsymbol{u}) = tr(\boldsymbol{u}\vec{\nabla}) = \vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}$ die in $\boldsymbol{u}$ explizite rheologische Gleichung der linear elastischen Erde:

$$\boldsymbol{T} = [-p + (K - 2/3\mu)\,(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})]\,\boldsymbol{E} + \mu(\vec{\nabla}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\vec{\nabla}), \qquad (40)$$

wobei aus physikalischen Gründen $p > 0$, $K > 0$ und $\mu > 0$.

6. Kontinuitätsgleichung

6.1 Die Kontinuitätsgleichung ist ein «differentielles» Äquivalent des «integralen» Massenerhaltungsgesetzes. Als solche hat sie einen universalen Charakter und muss somit für die Lösung aller kontinuumsmechanischen Anfangs- und Randwertprobleme mitberücksichtigt werden. Das Massenerhaltungsgesetz behauptet, dass die zeitliche Änderung der Masse in einem beliebigen – im allgemeinen zeitlich veränderlichen – räumlichen Gebiet gleich dem Massenfluss durch die Grenzfläche dieses Gebietes ist. Die Kontinuitätsgleichung drückt den äquivalenten Sachverhalt aus, dass die zeitliche Änderung der Dichte einer Partikel q proportional der relativen zeitlichen Änderung des Volumens dieser Partikel ist.

Sei nun Φ ein beliebiges Skalarfeld im physikalischen Raume E^3 und

$$\Phi = \Phi(q,t)$$

sein Wert an der Stelle der Partikel q (s. 3.3) im Augenblick t. Die durch

$$\nabla_o\Phi := \frac{\partial}{\partial t}\,\Phi(q,t) \qquad (41)$$

definierte zeitliche Ableitung ∇_o gibt dann die zeitliche Änderung des Skalarfeldes Φ *in der Partikel* q an. Sie wird sinngemäss die materielle – oder substantielle Ableitung genannt.

Die Kontinuitätsgleichung kann nun wie folgt geschrieben werden:

$$\nabla_o\varrho + \varrho\vec{\nabla}\cdot(\nabla_o\boldsymbol{x}) = 0 \quad , \qquad (42)$$

wobei $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q,t)$ die Partikeltrajektorien, ϱ die Dichte (s. $(11)_2$) und $\vec{\nabla}$ der in (13) bzw. (23) definierte Operator sind.

Betrachtet man $\boldsymbol{x}$ in einem Bezugssystem, in dem $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}(q,t)$ für jede Partikel q und alle Zeiten t konstant bleibt (nach (4) existiert ein solches Bezugssystem), ergibt sich mit (9), dass $\nabla_o\boldsymbol{x} = \nabla_o\boldsymbol{u}$. Damit geht die Kontinuitätsgleichung (42) in

$$\nabla_o\varrho + \varrho\vec{\nabla}\cdot(\nabla_o\boldsymbol{u}) = 0 \qquad (43)$$

über. Als eine Tensorgleichung muss (43) in allen Bezugssystemen gelten.

6.2 Da die Deformationen der Erde sehr klein sind, ist es sinnvoll, die Dichte ϱ einer beliebigen Partikel q der Erde (siehe 3.4) in die Summe

$$\varrho = \varrho_o + \delta\varrho \qquad (44)$$

der Dichte ϱ_o dieser Partikel im Erdmodell (s. 3.4) und der «erzwungenen» Dichteänderung $\delta\varrho$ zu zerlegen. Setzt man dies in (43) ein, berücksichtigt, dass nach $(11)_1$ und (41) $\nabla_o\varrho_o = 0$ ist, und vernachlässigt den kleinen Term $\delta\varrho\vec{\nabla}\cdot(\nabla_o\boldsymbol{u})$, ergibt sich $\nabla_o\delta\varrho + \varrho_o\vec{\nabla}\cdot(\nabla_o\boldsymbol{u}) = 0$ oder $\nabla_o[\delta\varrho + \varrho_o(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})] = 0$. Durch Integration über die Zeit ergibt sich schliesslich, dass

$$\delta\varrho = -\,\varrho_o(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) \quad , \qquad (45)$$

wobei die Integrationskonstante gleich 0 gesetzt wurde, da $\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}$ die relative Volumenänderung ist und somit $\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} := 0$ und $\delta\varrho := 0$ äquivalente Bedingungen sind.

7. Die Poisson'sche Gleichung

7.1 Betrachten wir nun ein Kontinuum, dessen Gestalt (Masse, Volumen, rheologische Eigenschaften) derart ist, dass die in einer seiner Partikel q beobachteten *Änderungen* der Selbstgravitationskräfte vergleichbar mit den (diese Änderungen – via Deformation – erzeugenden) äusseren Gravitations-Gezeitenkräften sind. Da die Änderungen der Selbstgravitationskräfte in der Partikel q wiederum abhängig von den Änderungen des Dichtefeldes des erwähnten Kontinuums sind, muss diese Abhängigkeit für die Lösung des Anfangs und Randwertproblems der Bewegung dieses Kontinuums mitberücksichtigt werden. Diese Abhängigkeit wird auf eine elegante Weise durch die sog. Poisson'sche Differentialgleichung ausgedrückt:

$$\triangle V = -\,4\pi k\varrho \quad , \qquad (46)$$

wobei V das Potential der Gravitationskraft in der Partikel q, k die Gravitationskonstante ϱ die Dichte in der gleichen Partikel q und

$$\triangle := \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla} \qquad (47)$$

der Laplace-Operator sind.

7.2 Wie die Schwerebeobachtungen zeigen, weist die reelle Erde die Eigenschaften des oben erwähnten Kontinuums auf. Daher muss die Poisson'sche Gleichung (46) für die Lösung des Anfangs und Randwertproblems der Bewegung unserer elastischen Erde mitberücksichtigt werden. Nach (44) und (45) ist noch

$$\varrho = \varrho_o(1 - \vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) \qquad (48)$$

und somit geht die Poisson'sche Gleichung über in

$$\triangle V = -\,4\pi\varrho_o(1 - \vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) \quad . \qquad (49)$$

8. Bewegungsgleichungen

8.1 Sei $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q,t)$ der baryzentrische Radiusvektor der Partikel q eines beliebigen Kontinuums im Augenblick t, ϱ die Dichte, V resp. U die Potentiale der Gravitationskraft des Kontinuums resp. der äusseren Gravitations-Gezeitenkräfte und $\boldsymbol{T}$ der Spannungstensor in der erwähnten Partikel q. Die Trajektorien $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(q,t)$ der Partikel q des erwähnten Kontinuums gehorchen dann den folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\varrho\nabla_o^2\boldsymbol{x} = \varrho\,\vec{\nabla}(V + U) + \vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} \quad , \qquad (50)$$

$$\nabla_o\boldsymbol{I}_k := 0 \quad , \quad k = 1,2,3 \quad , \qquad (51)$$

wobei $\boldsymbol{I}_k$ kovariante Basisvektoren einer *inertialen* Basis sind, $\nabla_o^2 := \nabla_o\nabla_o$ (s. (41)) und $\vec{\nabla}$ nach (13) bzw. (21) definiert ist.

Die Gleichung (51) muss der Gleichung (50) zugefügt werden. Die letztere ist nämlich genau dann eine Bewegungsgleichung im Sinne der Newton'schen Mechanik, wenn $\nabla_o\boldsymbol{x}$ eindeutig im folgenden Sinne definiert ist

$$\nabla_o\boldsymbol{x} = \nabla_o(x^i\boldsymbol{I}_i) = (\nabla_o x^i)\boldsymbol{I}_i \qquad (52)$$

mit $x^i = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{I}^i$, wobei $\boldsymbol{I}^i$ die zu $\boldsymbol{I}_k$ reziproke inertiale Basis ist.

8.2 Um die weiteren Ausführungen kürzer zu halten, nehmen wir vorübergehend an, dass $q \equiv (q^1, q^2, q^3)$ *kartesische* Koordinaten sind. Die unter (15) und (14) definierten Vektoren $\boldsymbol{G}_i$ und $\boldsymbol{G}^i$, i = 1,2,3 sind dann identisch mit den Basisvektoren der entsprechenden reziproken Basen. Diese sind partikelabhängig und im Sinne des Abschnittes 3.3 mit dem Erdmodell fest verknüpft. Nach Abschnitt 3.3 muss dann gelten

$$\boldsymbol{y}(q,t) := q^i\boldsymbol{G}_i(t) \quad , \qquad (53)$$

wobei gemäss (4) und (6)

$$\boldsymbol{G}_i(t) = \boldsymbol{Q}(t,H)\cdot\boldsymbol{G}_i(t_o) \qquad (54)$$

und somit $\boldsymbol{Q}(t,H) = \boldsymbol{G}_i(t)\boldsymbol{G}^i(t_o)$ (55)

wobei – wie schon früher (s. (28)) – $\boldsymbol{G}_i(t)\boldsymbol{G}^i(t_o)$ das Tensorprodukt der Vektoren $\boldsymbol{G}_i(t)$ und $\boldsymbol{G}^i(t_o)$ ist. Dabei ist $\boldsymbol{Q}$ ein Drehtensor, d.h.

$$|\,\boldsymbol{Q}(t,H)\cdot\boldsymbol{Y}\,| = |\,\boldsymbol{Y}\,| \text{ für alle } \boldsymbol{Y} \text{ und alle } t. \qquad (56)$$

Definiert man die inertiale Basis $\boldsymbol{I}^i$ als

$$\boldsymbol{I}^i := \boldsymbol{G}^i(t_o) \quad , \qquad (57)$$

so lautet dann (55)

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{G}_i\boldsymbol{I}^i = \boldsymbol{G}^k\boldsymbol{I}_k \quad . \qquad (58)$$

(56) gilt nun genau dann, wenn

$$\nabla_o\boldsymbol{G}_i = \vec{\omega}\times\boldsymbol{G}_i \quad , \qquad (59)$$

wobei – mit Rücksicht auf (51) – $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Rotation der modellfesten Basis $\boldsymbol{G}_i$ gegenüber der inertialen Basis $\boldsymbol{I}_k$ ist. Hieraus folgt weiter

$$\nabla_o^2\boldsymbol{G}_i = (\nabla_o\vec{\omega})\times\boldsymbol{G}_i + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\boldsymbol{G}_i) \quad . \qquad (60)$$

Mit (59) bzw. (60) ergibt sich dann aus (58):

$$\nabla_o\boldsymbol{Q} = \vec{\omega}\times\boldsymbol{Q} \quad , \qquad (61)$$

bzw. $\nabla_o^2\boldsymbol{Q} = (\nabla_o\vec{\omega})\times\boldsymbol{Q} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\boldsymbol{Q})$. (62)

Aus $\boldsymbol{u} := u^i\boldsymbol{G}_i$ (63)

erhalten wir unter Berücksichtigung von (59), dass

$$\nabla_o \boldsymbol{u} = (\nabla_o u^i)\boldsymbol{G}_i + u^i \vec{\omega} \times \boldsymbol{G}_i \quad . \qquad (64)$$

Man definiere nun «die erdmodellfeste» zeitliche materielle Ableitung ∂_o gemäss

$$\partial_o \boldsymbol{G}_k \;:=\; 0 \qquad k=1,2,3 \;, \qquad (65)$$

wobei $\boldsymbol{G}_k$ die durch (53) definierte «erdmodellfeste» Basis ist.
Dann ist

$$(\nabla_o u^i)\boldsymbol{G}_i \;=\; \partial_o(u^i \boldsymbol{G}_i) \;=\; \partial_o \boldsymbol{u}$$

und damit geht dann (64) über in

$$\nabla_o \boldsymbol{u} \;=\; \partial_o \boldsymbol{u} + \vec{\omega} \times \boldsymbol{u} \;. \qquad (66)$$

Hieraus folgt dann via $\nabla_o^2 \boldsymbol{u} = (\partial_o + \omega \times)(\partial_o + \omega \times \boldsymbol{u})$:

$$\nabla_o^2 \boldsymbol{u} = \partial_o^2 \boldsymbol{u} + 2\vec{\omega} \times (\partial_o \boldsymbol{u}) \;+\; (\partial_o \vec{\omega}) \times \boldsymbol{u} \;+\; \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \boldsymbol{u}). \qquad (67)$$

Benützen wir in (50) für ϱ (48), für $\boldsymbol{x}$ (30), für $\boldsymbol{T}$ (40) und für

$$V = V_o + \delta V \;, \qquad (68)$$

wobei V_o das Gravitationspotential des Erdmodells (s. 3.4) in der Partikel q (s. 3.3) ist, erhalten wir

$$\varrho_o(1-\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})[(\nabla_o^2 \boldsymbol{Q})\cdot\boldsymbol{Y} + \nabla_o^2 \boldsymbol{u}] \;=\; \varrho_o(1-\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})[\vec{\nabla} V_o + \vec{\nabla}(U+\delta V)] - \qquad (69)$$
$$- \vec{\nabla} p + (K+1/3\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\triangle\boldsymbol{u} \;,$$

wobei wir noch die Relationen $\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\vec{\nabla}$, $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\boldsymbol{u}) = (\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla})\boldsymbol{u} = \triangle\boldsymbol{u}$ und $\vec{\nabla}\cdot(\boldsymbol{u}\vec{\nabla}) = (\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})\vec{\nabla} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})$ gebraucht haben.
Setzen wir in (69) für $\nabla_o^2 \boldsymbol{Q}$ aus (62) und für $\nabla_o^2 \boldsymbol{u}$ aus (67) ein und berücksichtigen, dass nach (4) $\boldsymbol{Q}\cdot\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{y}$, wobei $\boldsymbol{y}$ der geozentrische Radiusvektor der Partikel q des Erdmodells im Augenblick t ist (s. 3.3 und 3.4). Mit

$$\nabla_o \vec{\omega} \;=\; \partial_o \vec{\omega} \;, \qquad (70)$$

was übrigens aus (66) folgt, erhalten wir dann:

$$\varrho_o(1-\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})[(\partial_o\vec{\omega})\times\boldsymbol{y} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\boldsymbol{y}) + \partial_o^2\boldsymbol{u} + 2\vec{\omega}\times(\partial_o\boldsymbol{u}) + (\partial_o\vec{\omega})\times\boldsymbol{u} + \qquad (71)$$
$$+\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\boldsymbol{u})] = \varrho(1-\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})[\vec{\nabla} V_o + \vec{\nabla}(U+dV)] - \vec{\nabla} p + (K+1/3\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\triangle\boldsymbol{u}$$

8.3 Die Bewegungsgleichungen einer mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ um die Achse des maximalen zentralen Trägheitsmomentes rotierenden Gleichgewichtsfigur eines Gemisches idealer Flüssigkeiten lauten aber:

$$\varrho_o \vec{\nabla}\{V_o + 1/2[\omega^2 y^2 - (\vec{\omega}\cdot\boldsymbol{y})^2]\} - \vec{\nabla} p = 0 \qquad (72)$$

oder $\quad \varrho_o[\vec{\nabla} V_o - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\boldsymbol{y})] - \vec{\nabla} p = 0. \qquad (73)$

Die Gleichungen (73) müssen zusammen mit der Poisson'schen Gleichung (s. (46))

$$\nabla V_o \;=\; -4\pi k \varrho_o \qquad (74)$$

gelöst werden. Hinzu kommt noch – als «Randbedingung» – die aus seismischen Beobachtungen gewonnene Dichteverteilung $f_o(y\hat{\omega})$ entlang der Rotationsachse des Erdmodells

$$f_o(y\hat{\omega}) \;=\; a_o + a_1\psi_1(y\vec{\omega}) + \ldots + a_s\psi_s(y\vec{\omega}) \qquad (75)$$

mit $\hat{\omega} := \vec{\omega}/\omega$, $O \le y \le b :=$ Betrag des geozentrischen Radiusvektors des Rotationspols an der Oberfläche des Erdmodells. Dabei sind $\psi_i, \ldots, \psi_s$ *gegebene* unabhängige Basisfunktionen (vgl. $(10)_1$) und $a_1, \ldots, a_s$ *bekannte* Konstanten.
Der Ausdruck $(10)_1$ ist dann als eine approximierende Funktion der aus der Lösung des Gleichungssystems (73)–(75) folgenden Dichteverteilung $\varrho_o(\boldsymbol{y}) \equiv \varrho_o(q)$ zu verstehen.
Um die Sache nicht noch weiter zu komplizieren, nehmen wir dabei an, dass die dynamische Abplattung H des als Lösung von (73)–(75) gewonnenen Erdmodells mit jener empirischen Abplattung übereinstimmt, die in 3.1 definiert und in 3.2 als Abplattung des Erdmodells angenommen wurde.

8.4 In (71) figuriert die gleiche Summe von Termen wie auf der linken Seite von (73). Diese verschwindet aber gemäss (73) und somit geht dann (71) über in:

$$\varrho_o(1-\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})[(\partial_o\vec{\omega})\times\boldsymbol{y} + \partial_o^2\boldsymbol{u} + 2\vec{\omega}\times(\partial_o\boldsymbol{u}) + (\partial_o\vec{\omega})\times\boldsymbol{u} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\boldsymbol{u})] -$$
$$-\varrho_o(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\boldsymbol{y}) = \varrho_o(1-\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})\vec{\nabla}(U+\delta V) - \varrho_o(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})\vec{\nabla} V_o + \qquad (76)$$
$$+(K+1/3\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\triangle\boldsymbol{u}.$$

Das Produkt $\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}[\ldots]$ auf der linken Seite, sowie das Produkt $(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})\vec{\nabla}(U+\delta V)$ auf der rechten Seite von (76) können nun gegenüber den Termen $(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\boldsymbol{y})$ und $(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})\vec{\nabla} V_o$ vernachlässigt werden. Denn, mit den aus der Starrkörperlösung (s. 3.1) gewonnenen Werten $\omega = |\omega| \simeq 2\pi$ rad/Tag $\sim 7{,}3\cdot10^{-5}$ rad/sec, $|\partial_o\vec{\omega}| \simeq 2.5\cdot10^{-13}$ rad/sec^2 und mit $y=|\boldsymbol{y}| < 6.4\cdot10^6$ m und $g = |\nabla V_o| \simeq 10$ m/sec^2 ergibt sich

$$|\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\boldsymbol{y})| / g < 3.2\cdot10^{-3} \text{ und } |(\partial_o\vec{\omega})\times\boldsymbol{y}| / g < 1.6\cdot10^{-7} \;, \qquad (77)$$

wobei $|(\partial_o\vec{\omega}\times\boldsymbol{y}|$ der grösste Term in der eckigen Klammer auf der linken Seite von (76) ist. Dividiert man (76) durch ϱ_o ergibt sich also nach den erwähnten Vernachlässigungen:

$$\partial_o^2\boldsymbol{u} + 2\vec{\omega}\times(\partial_o\boldsymbol{u}) + (\partial_o\vec{\omega})\times\boldsymbol{u} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\boldsymbol{u}) + (\vec{\nabla} W_o)\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} \qquad (78)$$
$$-1/\varrho_o[(K+1/3\mu)\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) + \mu\triangle\boldsymbol{u}] - \vec{\nabla}\delta V \;=\; \vec{\nabla} U - (\partial_o\vec{\omega})\times\boldsymbol{y}$$

wobei

$$W_o := V_o + 1/2\,[\omega^2 y^2 - (\vec{\omega}\cdot\boldsymbol{y})^2] \qquad (79)$$

das Schwerepotential des Erdmodells (s. 3.4) in der Partikel q ist (s. 3.3). In (78) sind $\vec{\omega}$, $\boldsymbol{y}$, ϱ_o, K, μ, W_o und U als bekannt zu betrachten und zwar $\vec{\omega}$ aus der Lösung des Starrkörperproblems nach 3.1 (s. dazu auch (61)), ϱ_o und W_o aus der Lösung des Gleichungssystems (73)–(75) mit der Annahme des Betrages der zuvor erwähnten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ und K und μ aus der letzten iterativen Näherung, wobei die erste Iteration durch die Wahl der Näherungswerte der in $(10)_{2,3}$ figurierenden numerischen Koeffizienten $K_o, \ldots, K_b$, $\mu_1, \ldots \mu_c$ erfolgt. $\boldsymbol{y}$ und U sind bekannt.

Der Bewegungsgleichung (78) muss noch die Poisson'sche Gleichung für das sog. *sekundäre Gezeitenpotential* δV zugefügt werden. Diese lautet

$$\triangle\delta V \;=\; 4\pi k \varrho_o(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u}) \qquad (80)$$

und folgt aus den Poisson'schen Gleichungen (49) und (73) unter Berücksichtigung der Definition (68) des sekundären Gezeitenpotentials δV. Dieses ist identisch mit dem Gravitationspotential der durch den *primären Gezeitenpotential* U relativ zum Erdmodell (s. 3.4) hervorgerufenen Massenumverteilung.

9. Schlussbemerkungen

Das Gleichungssystem (78) und (80) ist Ausgangspunkt zahlreicher, mathematisch meist sehr anspruchsvoller Untersuchungen verschiedenster Aspekte der Bewegung der elastischen Erde (s. 3.4). Dabei werden je nach Aspekt bestimmte Terme der linken Seite von (78) gegenüber der Störungskraft $\vec{\nabla} U$ vernachlässigt. So ist $|\vec{\nabla} U| / g < 2\cdot10^{-7}$, $|2\vec{\omega}\times(\partial_o\boldsymbol{u})| / g < 10^{-9}$, $|(\partial_o\vec{\omega}\times\boldsymbol{u}| / g < 10^{-14}$ und $|\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\boldsymbol{u})| / g < 10^{-10}$, wobei $g = |\vec{\nabla} V_o|$. Ausserdem können alle Untersuchungen für eine kompressible oder nichtkompressible Erde durchgeführt werden. Im letzteren Falle ist $\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u} = 0$. $K(\vec{\nabla}\cdot\boldsymbol{u})$ nimmt dann jedoch einen endlichen konstanten Wert an. Nennen wir hier nur einige wenige der zuvor erwähnten Aspekte der Bewegung der elastischen Erde:

- Setzt man in (78) $U:=0$, erhält man die Gleichungen für freie Schwingungen $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_o(q,t)$ (s. 3.3 und 3.4) der Erde.
- Setzt man in (78) $\partial_o\boldsymbol{u}=0$ und $\partial_o\vec{\omega}=0$, erhält man die Ausgangsgleichungen für die Love'sche statische Theorie der gezeitlichen Deformationen der Erde.
- Sei $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}_o(t,H)\cdot\boldsymbol{Y}(q)$ die Lösung der *homogenen* (d.h. $\vec{\nabla} U:=0$) Bewegungsgleichungen des in 3.1 und 3.2 definierten «erstarrten» Erdmodells. Diese Lösung stellt die sog. freie Nutation unseres Erdmodells bzw. die zugehörige Bewegung der Partikel q (s. 3.3) dar. Überlagert man dieser Lösung – gemäss (9) – die freie Schwingungen $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_o(q,t)$ (als Lösung von (78), (80) mit $U:=0$ und $\vec{\omega}$ aus der zuvor erwähnten Lösung der homogenen Bewegungsgleichungen) ergibt sich die sog. «freie Nutation» der elastischen Erde:

$$\boldsymbol{x}_o(q,t) \;=\; \boldsymbol{Q}_o(t,H)\cdot\boldsymbol{Y}(q) + \boldsymbol{u}_o(q,t) \qquad (81)$$

- Sei analog $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Q}_1(t,H)\cdot\boldsymbol{Y}(q)$ eine *partikuläre* Lösung der *inhomogenen* (d.h. $\vec{\nabla} U \neq 0$) Bewegungsgleichungen des in 3.1 und 3.2 definierten «erstarrten» Erdmodells. Überlagert man dieser Lösung – gemäss (9) – die durch die Lösung des Gleichungssystems (78) und (80) gewonnene Verschiebungen $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_1(q,t)$, ergibt sich die sog. «Präzession und Nutation» der elastischen Erde:

$$\boldsymbol{x}_1(q,t) \;=\; \boldsymbol{Q}_1(t,H)\cdot\boldsymbol{Y}(q) + \boldsymbol{u}_1(q,t) \;\cdot \qquad (82)$$

Überlagert man die «homogene» und die partikuläre «inhomogene» Lösungen (81) und (82) (dieses Verfahren wird hier nicht erläutert), ergibt sich die Bewegung der elastischen Erde zu

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q} \cdot \boldsymbol{Y} + \boldsymbol{u} \qquad (83)$$

Wobei $\boldsymbol{Q}$ ein Drehtensor ist.

In der Einleitung haben wir betont, dass ein Begriff wie die «Winkelgeschwindigkeit der Rotation der Erde» für ein nichtstarres Erdmodell neu definiert werden muss. Die Gestalt einer solchen Definition ist dann nur eine Frage der Zweckmässigkeit. Angesichts der Tatsache, dass die Bewegung der Erde durch astrometrische Beobachtungen an der Erdoberfläche erfasst wird, erscheint z.B. die folgende Definition der Winkelgeschwindigkeit der Rotation der Erde zweckmässig:

Die «Winkelgeschwindigkeit der Rotation der Erde» sei identisch mit der Winkelgeschwindigkeit der Rotation jenes Bezugssystems, in dem die Summe der zu geozentrischen Radiusvektoren $\boldsymbol{y}(q)$ transversalen Komponenten relativer Geschwindigkeiten aller Partikel q der Erdoberfläche in jedem Augenblick t verschwindet. Dieses System wird dann *«das erdfeste Bezugssystem»* genannt, obwohl wir diese Bezeichnung – vom Wortlaut her betrachtet – eher der Klasse aller in 3.3 definierten Koordinatensysteme $q \equiv (q^1, q^2, q^3)$ hätten zusprechen müssen. (84)

Definieren wir noch die zeitliche materielle Ableitung δ_o gegenüber dem zuvor definierten erdfesten Koordinatensystem gemäss

$$\delta_o \boldsymbol{E}_k := 0 \quad , \quad k = 1,2,3 \quad , \qquad (85)$$

wobei $\boldsymbol{E}_k$ die Basisvektoren des erdfesten Koordinatensystems sind. Gemäss der Vorschrift (66) gilt dann

$$\partial_o \boldsymbol{u} = \delta_o \boldsymbol{u} + \Omega \times \boldsymbol{u} \quad , \qquad (86)$$

wobei Ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation des erdfesten Systems (s. (85) gegenüber dem durch (53)–(56) definierten erdmodellfesten System (Basisvektoren $\boldsymbol{G}_i$) ist.

Die das erdfeste Bezugssystem definierende Bedingung (s. (84)) lautet dann

$$\int_{\partial E_o} \hat{\boldsymbol{y}} \times (\delta_o \boldsymbol{u}) dS = 0 \text{ , mit } \hat{\boldsymbol{y}} := \boldsymbol{y}/y \quad , \qquad (87)$$

wobei ∂E_o die Oberfläche unseres Erdmodells ist und $\boldsymbol{u} :=$

Hiermit folgt dann aus (86):

$$\int_{\partial E_o} \hat{\boldsymbol{y}} \times (\partial_o \boldsymbol{u}) dS = \int_{\partial E_o} \hat{\boldsymbol{y}} \times (\Omega \times \boldsymbol{u}) dS \text{ , } \qquad (88)$$

wobei $\boldsymbol{y}$, $\partial_o \boldsymbol{u}$ und $\partial \boldsymbol{u}$ bekannt sind. Folglich kann Ω aus (88) bestimmt werden und

$$\vec{\omega}' = \vec{\omega} + \Omega \qquad (89)$$

ist dann die «Winkelgeschwindigkeit der Rotation der elastischen Erde».

Damit schliessen wir unsere Skizze der mathematischen Methoden der globalen Geodynamik ab. Betreffend expliziter Untersuchungen der oben erwähnten Aspekte der Bewegung der Erde verweisen wir auf die umfangreichen Literaturverzeichnisse der Monographien Jeffreys 1976, Munk 1975 und Lambeck 1980.

Literatur:

Bauersima, I., 1980: Allgemeine Diskussion über die «Rotation» eines nichtstarren Erdmodells. Mitteilungen der Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald, Nr. 5.

Beutler, G., 1982: Probleme der Parameterbestimmung in physikalischen Systemen, Mitteilungen der Satellitenbeobachtungsstation Zimmerwald, Nr. 8.

Chadwick, P., 1976: Continuum Mechanics, George Allen and Unwin Ltd., London.

Chandrasekhar, S., 1969: Ellipsoidal Figures of Equilibrium, Yale University Press.

Jeffreys, H., 1976: The Earth (Its Origin History and Physical Constitution), Cambridge Univ. Press.

Lambeck, K., 1980: The Earth's Variable Rotation, (Geophysical causes and consequences), Cambridge Univ. Press.

Landau, L.D., E.M. Lifschitz, 1965: Elastizitätstheorie (russische Ausgabe).

Munk, W.H., G.J.F. Macdonald, 1975: The Rotation of the Earth (A Geophysical Discussion), Cambridge Univ. Press.

Wang, C.-C., C. Truesdell, 1973: Introduction to Rational Elasticity, Nordhoff Int. Publ.

Adresse des Verfassers:

PD Dr. Ivo Bauersima

Astronomisches Inst. der Universität Bern

Sidlerstrasse 5, CH-3012 Bern

Das Engagement von Wild Heerbrugg in der Geodäsie

F.K. Brunner, H.R. Schwendener

Ausgehend vom derzeitigen technischen Stand der Vermessungsinstrumente bei Wild Heerbrugg wird eine Vision «Geodäsie der Zukunft» präsentiert. Der Leser wird dazu in die neunziger Jahre versetzt. Die Veränderungen der «geodätischen Umwelt» werden an den Beispielen der globalen Geodäsie, Geodynamik und Landesvermessung sowie der Ingenieur- und Detailvermessung dargestellt. Wild Heerbrugg forscht und entwickelt heute mit Blick auf diese Zukunftsvision. Dies wird an drei konkreten Forschungsprojekten gezeigt.

Partant du niveau technique actuel des équipements topographiques chez Wild Heerbrugg, on présente une projection «Géodésie du futur». Le lecteur est situé dans les années 90. Les changements de l'environnement topographique sont décrits au moyen d'exemples de la géodésie spatiale, de la géodynamique et des travaux des Instituts Géographiques et Cartographiques ainsi que des levés techniques et de détails. Les travaux de recherche et de développement de Wild Heerbrugg d'aujourd'hui sont axés sur cette vision d'avenir. Ceci est montré à l'aide de trois projets de recherche actuels.

1. Einleitung

1.1 Präambel

Die Firma Wild Heerbrugg (Gründungsjahr 1921) besteht ungefähr halb so lange wie die Schweizerische Geodätische Kommission (SGK), deren 125jähriges Jubiläum im Jahr 1986 gefeiert wird. Dennoch haben die «Wild Geräte» das Arbeitsbild der SGK stark mitgeprägt, denken wir nur an die klassischen Geräte T4, T3, T2, Distomaten, N3, um einige der Hauptvertreter hier aufzuzählen.

Wir wollen von der naheliegenden Verleitung Abstand nehmen, an dieser Stelle einen Rückblick auf die Instrumentenentwicklung der letzten Jahrzehnte zu bringen. Dagegen wollen wir zum Anlass des SGK-Jubiläums den Versuch unternehmen, eine Vision der möglichen instrumentellen Entwicklungen in der Geodäsie zu entwerfen. Dazu stellen wir kurz die modernsten Geräte der geodätischen Produktepalette von Wild Heerbrugg vor. Nach einer einführenden Diskussion der herrschenden Trends bei den Methoden der Geodäsie werden wir unseren Versuch einer Vision «Geodäsie der Zukunft» präsentieren. Dabei wollen wir unter Geodäsie den ganzen Bereich von der globalen Geodäsie bis zur Ingenieurvermessung verstehen, allerdings ohne Photogrammetrie und Kartographie. Im Anschluss daran werden Projekte vorgestellt, die vor allem Forschungscharakter haben, und bei denen Wild Heerbrugg in der interdisziplinären Teamarbeit stark engagiert ist.

Diese Studie ist gerade wegen der stürmischen Entwicklung in der Geodäsie vor allem durch die Verwendung künstlicher Satelliten von besonderer Aktualität. Denn sicherlich hat GPS (die gebräuchlichen Abkürzungen sind im Anhang zusammengestellt) das Potential, die Geodäsie grundlegend zu verändern, nicht nur im Hinblick