Über den Einfluss der Schwere auf die Höhe

Autor(en): **Embacher, W.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural**

Band (Jahr): **81 (1983)**

Heft 10

PDF erstellt am: **18.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-231655

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

lich beobachteten Werten Abweichungen bis zu mehreren Bogensekunden. Die Bestimmung der Lotabweichungen ist auch von praktischer Bedeutung, z. B. für die Arbeiten des Bundesamtes für Landestopographie im Rahmen der Landesvermessung. In diesem Zusammenhang hat der Ivrea-Störkörper als Ursache von relativ grossen Lotabweichungen, Geoidundulationen und Schwereanomalien eine besondere Bedeutung. Wegen seiner Existenz entstehen Schwierigkeiten in der Geoidbestimmung und in der Prädiktion von Lotabweichungen.

Das oben beschriebene Projekt dürfte einen wesentlichen Beitrag im Rahmen der IAG darstellen. Eine spezielle Studiengruppe SSG 5.50 (Etude du Géoide en Europe Centrale et Méridionale) der IAG befasst sich schwerpunktmässig mit Lotabweichungsmessungen und deren Interpretationen (Präsident: Prof. Birardi, Rom) [Birardi, 1973; 1976; 1977; Sigl, 1979]. Zudem hat die IAG im Rahmen der letzten IUGG-Tagung (Hamburg, August 1983) die Geoidbestimmung in Gebirgszonen als Resolution beschlossen.

Das Projekt ist fachgebietsübergreifend. Es enthält Probleme der geodätischen Messtechnik, der sphärischen Positions-Astronomie und der photogrammetrischen Auswertemethodik. Ausserdem werden aktuelle Fragen der Geodynamik und Geophysik im Bereich der Ivrea-Zone behandelt. Dem Schweiz. Nationalfonds (Projekt Nr. 2.305-081) und der ETH Zürich danken wir für finanzielle Unterstützung dieses Projektes.

Referenzen

Astronomisches Recheninstitut Heidelberg. Apparent Places of Fundamental Stars. Jahrbuch.

Birardi, G., 1973. Positional photographic astronomy. Procedures and operational results with the IGN-IGM camera. Bolletino di Geodesia e Scienze Affini, 32: 273–287.

Birardi, G., 1976. The establishment of a net of vertical deflection points in Italy by means of a photoastronomical procedure. Bolletino di Geodesia e Scienze Affine, 2: 113–152.

Birardi, G., 1977. Combined Use of Doppler Devices and Photo-Astronomical cameras for the Institution of Vertical Deflection Points. Bolletino di Geodesia e Scienze Affini, 36: 499–505.

Bürki, B., Kahle, H.-G. and W. Torge, 1983. Plans for application of the Hannover-type Zenith Camera system in the Central Alpine Region. In: Birardi (ed.), Proceedings of the 2nd Int. Symp. on the geoid in Europe and the Mediterranean area. In press.

Elmiger, A., 1969. Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz.

Elmiger, A., 1975. Das Geoid in der Schweiz. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik, III/IV: 171–176.

Elmiger, A. und W. Gurtner, 1982. Astrogeodätische Geoidbestimmung und Lotabweichungs-Interpolation in der Schweiz. Geoidkolloquium in Graz, 1983.

Gerstbach, G., 1979. Geophysikalische Interpretation von Lotabweichungen in Bruchzonen. Zeitschrift für Vermessungswesen, 2: 45–51.

Gerstbach, G., 1980. Untersuchung der Tiefenstruktur des Wiener Beckens aus Lotstörungen. Kurzfassung eines Referats anlässlich des 2. Alpengravimetrie-Kolloquiums, Wien.

Gerstbach, G., 1982. Bestimmung der Sedimentdicke aus Lotabweichungen im Testfeld Wiener Becken. Zeitschrift für Vermessungswesen 8/1982.

Gessler, J., 1975. Entwicklung und Erprobung einer transportablen Zenitkamera für astronomisch-geodätische Ortsbestimmungen. Wiss. Arbeiten Landesvermessung der TU Hannover Nr. 60, 140 pp.

Gurtner, W., 1978. Das Geoid in der Schweiz. Astronomisch-geodätische Arbeiten in der Schweiz, 32: 103 pp. Ed.: Swiss Geodetic Commission.

Kissling, E., 1980. Krustenaufbau und Isostasie in der Schweiz. Ph. D. thesis, 165 pp. ETH Zürich, Diss. Nr. 6655.

Klingelé, E. und R. Olivier, 1980. Die neue Schwerekarte der Schweiz. Matér. Géol. Suisse, Sér. géophys. 20.

Memorie di Scienze Geologiche, 1979, Volume 33, 263 pp. Proceedings of the 2nd Symposium Ivrea–Verbano, 1978.

Müller, St., Ansorge, J., Egloff, R. and E. Kissling, 1980. A crustal cross section along the Swiss Geotraverse from the Rhinegraben to the Po Plain. Eclogae geol. Helv., 73/2: 463–483.

Sigl, R., 1975. Geodätische Astronomie. H. Wichmann Verlag, Karlsruhe, 369 pp.

Sigl, R., 1979. Zur Bestimmung von Lotabweichungen und Geoidhöhen im alpinen Raum. Veröffentlichungen des Finnischen Geodätischen Instituts Nr. 89: 166–174.

SMPM (Schweiz. miner. petr. Mitt.), 1968. Symposium ‹Zone Ivrea–Verbano›. Int. Upper Mantle Project. Sc. Report No. 20. SMPM, 48, Heft 1, 355 pp.

Wissel, H., 1982. Zur Leistungsfähigkeit von transportablen Zenitkameras bei der Lotabweichungsbestimmung. Wiss. Arbeiten der Fachrichtung Vermessungswesen der Universität Hannover, Nr. 107: 130 pp.

Adresse der Verfasser:
B. Bürki, Dipl. Ing., Prof. Dr. H.-G. Kahle,
Prof. Dr. H. H. Schmid
Institut für Geodäsie und Photogrammetrie
ETH-Hönggerberg, CH-8093 Zürich

Über den Einfluss der Schwere auf die Höhe

W. Embacher

Sowohl das trigonometrische als auch das geometrische Nivellement liefert Höhenunterschiede zwischen einer mathematisch definierten Bezugsfläche durch den Ausgangspunkt und der zugehörigen Parallelfläche durch den Ziel- oder Endpunkt.

Das dynamische Nivellement, d. h. die Bestimmung von Höhenunterschieden aus Schweredifferenzen, bezieht sich ebenfalls auf eine mathematisch-physikalisch definierte Fläche, auf welcher die theoretischen Schwerewerte γ_0 bekannt sind.

Diese Normalschwere γ_0 kann mit der Polhöhe φ des Messpunktes tabellarisch bestimmt werden und liefert mit der im Messpunkt bestimmten Schwere g die Differenz $(g - \gamma_0)$. Durch Messung eines zweiten Schwerewertes mit einem Höhenunterschied Δh zum Messpunkt erhält man den Differenzenquotienten $\frac{\Delta g}{\Delta h}$. Der Geländewinkel δ in der Fallinie und die Oberflächendichte σ lassen sich ebenfalls bestimmen. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie mit diesen fünf gemessenen Werten der Höhenunterschied zwischen der oben genannten theoretischen Bezugsfläche und dem Messpunkt berechnet werden kann.

Einleitung

In der Arbeit ‹Der Abstand zweier Niveauflächen aus Vertikalwinkeln› [5] (Seite 207) hat der Verfasser gezeigt, dass die trigonometrische Höhenmessung im allgemeinen den Abstand zweier konzentrischer Kugeln gibt, deren eine den mittleren Krümmungsradius des Referenzellipsoides des zugehörigen Standpunktes hat. Für die Berechnung des Refraktionskoeffizienten ist es von Vorteil, den Krümmungsradius der Schmiegungskugel zu verwenden, der aus dem auf dem Standpunkt gemessenen Vertikalgradienten

Le nivellement trigonométrique comme le nivellement géométrique fournissent des différences de niveau entre une surface de référence définie mathématiquement et passant par un repère origine et la surface parallèle qui contient le point visé ou le point terminal du cheminement.
Le nivellement dynamique, c'est-à-dire la détermination de différences de niveau à partir des variations de la pesanteur, exige également une surface de référence définie aussi bien du point de vue mathématique que physique et sur laquelle les valeurs théoriques de la pesanteur γ_0 soient connues.
Cette pensanteur normale γ_0 peut être obtenue d'après une table en fonction de la latitude φ du point à déterminer et fournit, en fonction de la pesanteur g effectivement mesurée, la différence $(g-\gamma_0)$. En mesurant une deuxième valeur de la pesanteur en un endroit situé à une différence d'altitude Δh par rapport au point initial, on obtient le quotient $\frac{\Delta g}{\Delta h}$. L'inclinaison du terrain selon la ligne de plus grande pente δ et la densité des couches superficielles σ peuvent aussi être déterminées.
L'article ci-dessous montre comment calculer, à partir de ces cinq valeurs mesurées, la différence de niveau entre la surface de référence théorique et le point de mesure.

abgeleitet wurde [3] (S. 248ff.). Die Reduktion der gemessenen Zenitdistanzen (die Lotabweichungsdifferenz) kann mit den Ergebnissen der astronomischen Messungen oder der gravimetrischen Horizontalgradientenbestimmung durchgeführt werden. Das geometrische und das dynamische Nivellement liefern Höhen über einer mathematisch-physikalisch definierten Bezugsfläche.
Seit über 20 Jahren beschäftigt sich der Verfasser mit örtlichen Gravimetermessungen und deren Auswertung in bezug auf den Verlauf der Lotlinien.
In der Arbeit [4] wurde gezeigt, dass bei einem bekannten und so wie in dieser Arbeit definierten Bezugsgradienten und bei bekanntem Höhenunterschied zweier Punkte der Abstand des Folgepunktes von der Bezugsfläche auf cm-Genauigkeit berechnet werden kann.
Weiter wurden in der Arbeit [4] Möglichkeiten gezeigt, den Bezugsgradienten und damit die Höhe des Messpunktes aus zwei Schweremessungen und relativen Lagemessungen zu berechnen. Allerdings wurde dabei die Kenntnis einer genäherten Richtung der Tangente bzw. der Sekante der Gradientenlinie und damit einer genäherten Höhe stillschweigend vorausgesetzt.
In der vorliegenden Arbeit zeigt der Verfasser, dass es möglich ist, ohne Kenntnis einer genäherten Höhe, also nur mit den gemessenen Grössen $\frac{\Delta g}{\Delta h}$, der oberflächennahen Dichte σ, der aus Anschlussmessungen bestimmten Schwere g und der Normalschwere γ_0, die Höhe des Messpunktes über dem Rotationssphäroid, welchem die Normalschwere γ_0 entnommen ist, zu berechnen.

1. Die Frage nach der wahren Natur der nivellierten Höhenunterschiede

Abbildung 1 zeigt den Schnitt eines Hanges in Richtung der Fallinie mit den Geländepunkten A, M und B. $\bar{A}\,\bar{B}$ sei die ungestörte Ausgangsfläche, der Abstand $\bar{A}$ A sei h. Der Standpunkt des Nivellierinstrumentes ist M, und die beiden Nivellierlatten stehen in A und B. Die gestörte Niveaufläche in A ist strichliert gezeichnet (A B''), während die Parallele zur ungestörten Niveaufläche in A durch B' voll dargestellt wurde. Der Winkel zwischen der Parallelen zur ungestörten und der gestörten Niveaufläche ist mit ε bezeichnet, dieser Winkel kann im Gebirge einen Betrag bis zu 30 Bogensekunden erreichen. In O sei die Visierlinie durch $\mathfrak{R}$-$\mathfrak{V}$ gekennzeichnet, und die Parallele zur ungestörten Niveaufläche durch O wäre R–V. Der Höhenunterschied im gestörten System (d. h. dem tatsächlich vorhandenen System) ist $\Delta h' = AA'' = BB''$ und der im ungestörten System $\Delta h = BB' = AA'$. Es ist also Δh um $B'B'' = d\zeta$ grösser als $\Delta h'$,

$$\text{d. h. } \Delta h = \Delta h' + d\zeta = \Delta h' + \frac{g_A - g_B}{g}\, h \qquad 1.0$$

Der Wert für $d\zeta$ wurde der Arbeit [2] entnommen [(3.21) S. 24].

Die Nichtparallelität der beiden ungestörten Niveauflächen $\bar{A}\,\bar{B}$ und A B', d. h. der Höhenunterschied Δh_B wegen der Bessel- oder Normalreduktion ‹$\Delta\gamma$› beträgt im Maximum in der Nord-Süd-Richtung $\Delta h_B = \frac{\Delta\gamma}{\gamma}\, h$ (siehe [1] Glg. (10) S. 292, [3] Glg. (3.2) S. 250). Diese Reduktion beträgt in unserer Breite z. B. für 2000 m Höhenunterschied auf einen Kilometer etwa 1,6 mm.
Nun zitieren wir Helmert ([1] S. 500): ‹Ein einfaches Nivellement besteht bekanntlich im wesentlichen darin, dass man sich zwischen zwei Punkten mit dem Nivellierinstrument aufstellt und mittels desselben nach jedem der beiden Punkte eine horizontale Visur gibt, welche an einem in den Punkten aufgestellten Massstab (der Nivellierlatte) die Zielhöhen abschneidet. Man pflegt dann die Differenz der letzteren als Höhenunterschied der beiden Punkte anzunehmen. Lässt sich diese Angabe nicht mit einer Aufstellung erreichen, so schaltet man Zwischenpunkte ein und nimmt ein zusammengesetztes Nivellement vor. Hier bildet man das Resultat als Summe der Einzelunterschiede.›
Nehmen wir an, es würde vom Punkt A bis zum Punkt I nivelliert. So erhalten wir als ‹Rohe Lattenhöhe› des Punktes I über Pkt. A

$$\text{‹Rohe Lattenhöhe›} = \sum_{n=1}^{n=i} \Delta h'$$

Die Summe $\sum_{n=1}^{n=i} \Delta h'$ ist der Abstand einer zur Bezugsfläche durch A parallelen Fläche; nachdem die Lotrichtungen nur um Sekundenbeträge schwanken, kann man die einzelnen Lattenabschnitte summieren. Der Fehler, welcher bei einem Richtungsunterschied der Lotrichtungen von beispielsweise 30'' und

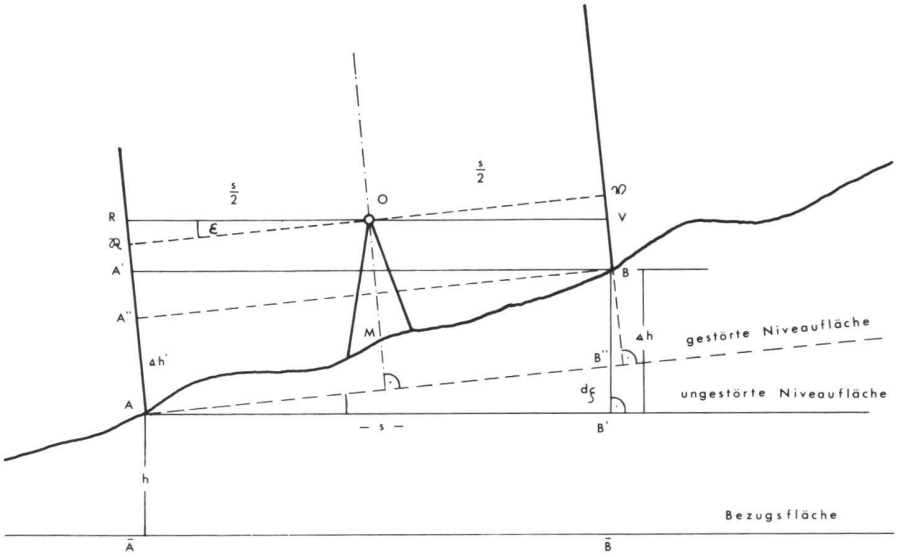

Abb. 1

einem Höhenunterschied von 3000 m dadurch entsteht, beträgt 0,03 mm, kann also vernachlässigt werden.
Die Nichtparallelität der tatsächlichen Niveauflächen wird beim geometrischen Nivellement nicht berücksichtigt. (Siehe [2] Abb. 4.) Gehen wir vom Abstand zweier Parallelflächen zur einfacheren Vorstellung zweier Parallelkurven über:
Zwei Parallelkurven sind dadurch definiert, dass sie auf allen ihren gemeinsamen Normalen ein Stück von derselben Länge abschneiden; bekanntlich heissen diese stetigen Kurven ‹Evolventen›. Der Ort ihrer gemeinsamen Krümmungsmittelpunkte ist die Evolute. Im allgemeinen ist der ebene Schnitt einer ungestörten Niveaufläche keine stetige Kurve. Daher gibt es zu einer ungestörten Niveaufläche, wenn wir wieder zu den Flächen übergehen, keine Parallelfläche.
Die ‹rohe Lattenhöhe› kann daher nicht als Abstand von einer ungestörten oder tatsächlichen Niveaufläche definiert, sondern nur als Abstand von einer mathematisch definierten Fläche aufgefasst werden.
Die ‹rohe Lattenhöhe›, erweitert durch die Höhenänderung Δh_B wegen der Normal- oder Besselreduktion, gibt den Abstand zweier ungestörter Niveauflächen. Gibt man die Summe aller $d\zeta$ dazu, so erhält man den Abstand eines Punktes einer gestörten Niveaufläche von der ungestörten Bezugsniveaufläche in seiner Lotlinie.
Würde man den Abstand zweier gestörter Niveauflächen suchen, so müsste man die Differenz der beiden Abstände von der jeweiligen ungestörten Niveaufläche ($d\zeta_{unten} - d\zeta_{oben}$) suchen. Da sich jedoch die zweite gestörte Niveaufläche unter der physischen Erdoberfläche befindet, ist eine Bestimmung des Höhenunterschiedes $d\zeta_{unten}$ dieser gestörten Niveaufläche von ihrer zugehörigen ungestörten ohne Hypothesen nicht möglich.
Die orthometrische Höhe eines Oberflächenpunktes lässt sich also in bezug auf eine ungestörte Ausgangsfläche hypothesenfrei bestimmen.
Sieht man davon ab, dass es nicht richtig ist, den zugehörigen Schwerewert g aus dem Mittel zweier aufeinanderfolgender Werte der Messungen an der physischen Erdoberfläche zu bilden, hat Helmert ([1] S. 502) die Potentialdifferenz zweier Niveauflächen, welche dh begrenzen, mit

$$gdh = g_C dh$$

und die Höhe von C über A gleich

$$CC' = \int_A^C \frac{g}{g_C} dh \quad (3)$$

richtig definiert.

Verwendet man aber die Differenz der Lattenablesungen $(z_2 - z_1) = \delta_z$ zur Bestimmung der Potentialdifferenz ΔW

$$\Delta W = -\sum_A^C g\delta z, \quad (4)$$

so müsste man, nach dem oben gesagten, auch die Differenz der beiden Abstände von der jeweiligen ungestörten Niveaufläche ‹$\Delta d\zeta$› berücksichtigen. Die Differenz der zwei Reduktionen wegen der Nichtparellelität der beiden ungestörten Niveauflächen kommt nicht zum Tragen.
Auf das Brunssche Theorem zurückgreifend und wenn wir die Nichtparallelität der ungestörten Niveauflächen vernachlässigen, kann man analog wie oben ([1] Glg. (10) S. 292, [3] Glg. (3.2) S. 250) angenähert setzen:

$$\gamma_P \int dz = g_P \int dh \qquad 3.2$$

wobei g_P die gemessene Schwere im Punkt P ist und

$$\gamma_P = \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial h} \sum dz$$

ist.
Dann ist

$$h = \sum dz + \frac{\gamma_P - g_P}{g_P} \sum dz. \qquad 3.3$$

$\frac{\gamma_P - g_P}{g_P} \sum dz$ ist also die orthometrische Korrektion ζ für den Punkt P.
Dass die Summe aller $d\zeta$ in Gleichung (1) gleich dem Höhenunterschied

$$\zeta = \frac{\gamma_P - g_P}{g_P} \sum dz + \text{Glieder höherer Ordnung}$$

in Gleichung (3.3) ist, hat der Verfasser in seiner Arbeit ([2] S. 25) nachgewiesen.

2. Diskussion der Gleichungen für den Horizontal- und Vertikalgradienten und Anwendung der Brunsschen Formeln auf diese Gleichungen

Aus der Arbeit [2] (Glg. 4.01) erhalten wir

$$H = \frac{\partial g}{\partial s} = \left(\frac{\Delta g}{\Delta h} + \frac{\partial g}{\partial h}\right) \frac{\Delta h}{\Delta s} = \left(\frac{\Delta g}{\Delta h} + \frac{\partial g}{\partial h}\right) \tan\delta \qquad 4.01$$

Wenn $\frac{\Delta h}{\Delta s}$ die Tangente des Geländewinkels δ in Richtung der Fallinie ist und wenn ferner $\frac{\partial g}{\partial s} = H$, der Horizontalgradient sein soll.
H ist Null, wenn

1. $\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right) = -\frac{\Delta g}{\Delta h}$ oder wenn
2. der Geländewinkel $\delta = 0$ bzw. $\tan\delta = 0$ ist.

Das störungsfreie Erdmodell ist dadurch definiert, dass die Niveauflächen Flächen gleicher Dichte sind, d. h. dass eine Dichteänderung nur in vertikaler Richtung möglich ist, also dass kein Horizontalgradient vorhanden ist. Wir bezeichnen den Horizontalgradienten (ausgenommen den Normalgradienten) als horizontalen Störgradienten und stellen fest, dass der Vertikalgradient $\left(\frac{\partial g}{\partial h}\right)$ frei von einem horizontalen Störgradienten ist, wenn er gleich dem negativen gemessenen Schwereunterschied $\frac{\Delta g}{\Delta h}$ ist oder wenn das Gelände um den Messpunkt in Richtung der Niveaufläche, also horizontal verläuft.
Wir erhalten ebenso aus Glg. 4.01 für den Vertikalgradienten V:

$$V = \frac{\partial g}{\partial h} = -\frac{\Delta g}{\Delta h} + \frac{\partial g}{\partial s} \cot\delta \qquad 4.011$$

oder es gilt, wenn wir den inneren Vertikalgradienten, dessen Horizontalgradient H_i Null ist, mit $-\frac{\Delta g}{\Delta h} = V_i$ und $\frac{\partial g}{\partial h} = V_a$ als äusseren Vertikalgradienten bezeichnen

$$V_i - V_a = -\frac{\partial g}{\partial s} \cot\delta$$

oder nach Bruns

$$\left.\begin{aligned} V_i - V_a &= -4\Pi k^2 \sigma \cos^2\delta \\ &\text{und} \\ -H_a &= -4\Pi k^2 \sigma \sin\delta \cos\delta \\ &= -\left(\frac{\Delta g}{\Delta h} + \frac{\partial g}{\partial h}\right) \tan\delta \end{aligned}\right\} \qquad 4.02$$

Fassen wir in Abb. 2 die Linie AC als den Schnitt eines Hanges auf, der sich senkrecht zur Zeichenebene von $+\infty$

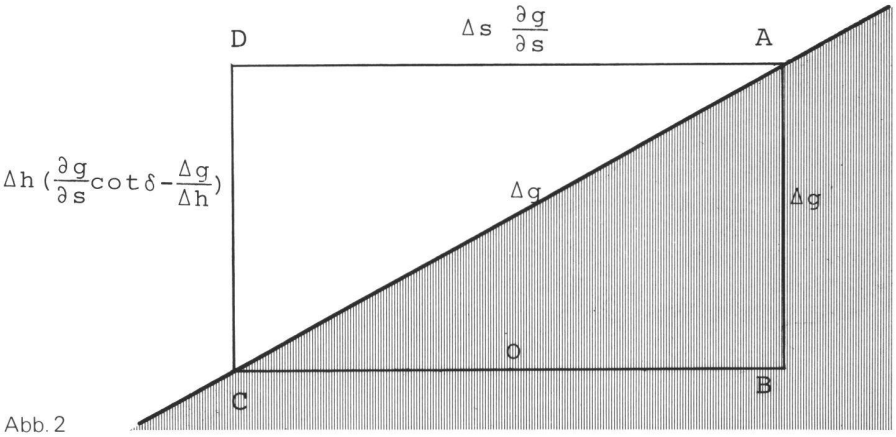

Abb. 2

bis $-\infty$ erstrecken soll, dessen Geländewinkel δ und dessen Dichte σ sei, während die Dichte ausserhalb der Linie AC Null ist, so erhalten wir für die oben definierten Gradienten ein anschauliches Bild.
Wir sehen, dass dann, wenn wir den inneren Horizontalgradienten Null setzen, die Zunahme der Schwerkraft innerhalb der Trennfläche

$$V_i = -\frac{\Delta g}{\Delta h}/m \qquad 4.03$$

ist und die Zunahme der Schwerkraft ausserhalb der Trennfläche

$$V_a = \left(\frac{\partial g}{\partial s}\cot\delta - \frac{\Delta g}{\Delta h}\right) = -\frac{\Delta g}{\Delta h} + 4\Pi k^2 \sigma \cos^2\delta \qquad 4.04$$

beträgt.
Die Differenz zwischen innerem und äusserem Gradienten (die erste Gleichung der Gruppe 4.02) ist in bezug auf die Schwerkraft eine Invariante und daher als Differenz aller möglichen inneren und äusseren Gradienten gleich gross.
Der äussere vertikale Trennflächengradient V_a ist also in bezug auf die gemessene Schwerkraft nur eine Funktion des inneren vertikalen Trennflächengradienten.
Die Bestimmung der Differenz $(g - \gamma_0)$ erfolgt so, dass die Normalschwere γ_0 für ein bestimmtes Bezugsniveausphäroid mit der Polhöhe φ des Messpunktes einer Tabelle entnommen und der Schwerewert g an der Trennfläche aussen gemessen wird. Für denselben Messpunkt wird auch der äussere Trennflächengradient, d. h. die Zunahme der Schwere pro Höhenmeter, durch Messung von $\frac{\Delta g}{\Delta h}$, des Geländewinkels δ und der Dichte σ bestimmt.
Dieser äussere Trennflächengradient wäre ein Mass für die Höhe eines Punktes über dem angenommenen Bezugsniveausphäroid, wenn er nicht noch mit dem horizontalen Störgradienten behaftet wäre (siehe Abb. 3).

3. Die Bezugsgradientenlinie

Nach Arbeit [2] ist

$$h = \frac{g - \gamma_0 + \frac{\partial \gamma}{\partial h}\cdot \xi}{\frac{\partial g}{\partial h} - 2\frac{\partial \gamma}{\partial h}}$$

unter Vernachlässigung des Terms von Bruns das Produkt aus Höhe und Bezugsgradient bzw. dessen Ergänzung auf $2\frac{\partial \gamma}{\partial h}$ für jeden Messpunkt eine konstante Grösse $(g - \gamma_0)$. Fasst man die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel als Koordinatenachsen auf, so gibt es für jeden Messpunkt eine gleichseitige Hyperbel, welche der geometrische Ort aller Punkte ist, deren Koordinaten

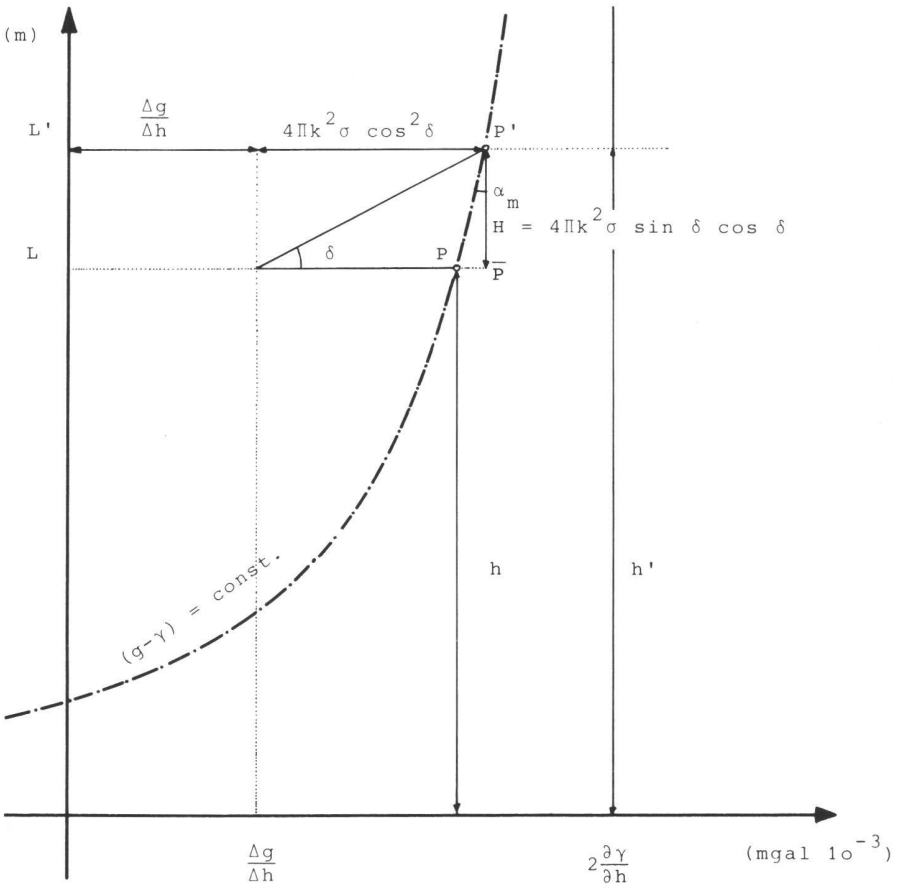

Abb. 3

jeweils die zusammengehörigen Werte für Höhe und Bezugsgradienten darstellen. (Diese Eigenschaft der gleichseitigen Hyperbel benützten früher die Geometer zur graphischen Flächenbestimmung.)
Rein physikalisch ist die Tatsache, dass das Produkt aus Höhe und Bezugsgradient gleich der Messungsdifferenz $(g - \gamma_0)$ ist, nur für den Messungspunkt sinnvoll.
Zeichnen wir die gleichseitige Hyperbel für eine bestimmte Messungsdifferenz $(g - \gamma_0)$ und gehen mit dem für diesen Punkt aus Schweremessung, Geländewinkel und der ermittelten Oberflächendichte errechneten Bezugsgradienten, so wie oben besprochen, ein, so erhalten wir die Höhe h'.
Analog zum inneren Vertikalgradienten, dessen zugehöriger Horizontalgradient Null war, suchen wir nun entlang der durch $(g - \gamma_0)$ bestimmten Hyperbel den zum Vertikalgradienten

$$-\left(\frac{\Delta g}{\Delta h} - 4\Pi k^2 \sigma \cos^2\delta\right)$$

zugehörigen Vertikalgradienten, dessen Horizontalgradient Null ist. Er ist nach Punkt 2 der oben angeführten Diskussion dort zu finden, wo der Geländewinkel Null ist, also in der Strecke $\overline{LP}$. Die Änderung des Gradienten $\overline{L'P'}$ beträgt $H.\tan\alpha_m$ oder so wie oben festgestellt:

$$h = \frac{(g - \gamma_0)}{\overline{LP} - 2\frac{\partial \gamma}{\partial h}} = \frac{(g - \gamma_0)}{(\overline{L'P'} - H.\tan\alpha_m) - 2\frac{\partial \gamma}{\partial h}}. \qquad 4.05$$

Wir fassen also die Schweredifferenz als die Wirkung einer Platte mit der Höhe h auf, und die Wirkung dieser Platte mit der Höhe von 1m ist der äussere Trennflächengradient, welcher keinen horizontalen Störgradienten aufweist; wir nennen ihn ‹Bezugsgradient› für die Höhe h des Messpunktes.
Wie aus Abb. 3 ersichtlich, ist die Masseinheit der Ordinate die Längeneinheit, also 1m.
So können wir die Gleichung 4.05 auch schreiben:

$$\left.\begin{aligned} &h = h' - H_{[m]} \\ &\text{oder} \\ &h = \frac{(g - \gamma_0)}{-\left(\frac{\Delta g}{\Delta h} - 4\Pi k^2 \sigma \cos^2\delta\right) - 2\frac{\partial \gamma}{\partial h} - 4\Pi k^2 \sigma \sin\delta \cos\delta.} \end{aligned}\right\} \qquad 4.06$$

Ist der Ausdruck

$$\frac{(g - \gamma_0)}{-\frac{\partial \gamma}{\partial h}} < h$$

so wird die gesuchte Höhe h mit Gleichung 4.06 berechnet, wenn hingegen

$$\frac{(g-\gamma_0)}{-\frac{\partial\gamma}{\partial h}} > h$$

ist, verwendet man die Gleichung

$$h = \frac{(g-\gamma_0)}{\left(\frac{\Delta g}{\Delta h} - 4\Pi k^2\sigma\cos^2\delta\right) - 4\Pi k^2\sigma\sin\delta\cos\delta} \qquad 4.07$$

4. Einige Zahlenbeispiele für das dynamische Nivellement

In der Tabelle sind für 13 Messpunkte Höhen angeführt, die nach Gleichung 4.06 bzw. 4.07 gerechnet wurden.

Spalte 1 bringt die Punktbezeichnung:

Al	=	Aldrans
Ar	=	Arzl
Pl	=	Planötzenhof
Pk	=	Patscherkofl
Hk	=	Hafelekar
Vs	=	Völs
Kr	=	Kranebitten
Mbg	=	Mentelberg
Phf	=	Peerhof
Ht	=	Hochtor
B. Gst	=	Badgastein
Isbg	=	Iselsberg
Gbr	=	Gutenbrunn;

Spalte 2 enthält die angenommene, darunter die Solldichte und die Tangente des Geländewinkels δ

Spalte 3 zeigt die Messungsdifferenz $(g-\gamma_0)$

Spalte 4: $\frac{\Delta g}{\Delta h}$

Spalte 5: $4\Pi k^2\sigma$

Spalte 6: $4\Pi k^2\sigma\cos^2\delta$, darunter die Summe aus Spalte 4 + 6 bzw. die Ergänzung auf $2\frac{\partial\gamma}{\partial h}$

In **Spalte 7** stehen untereinander die Werte von H, h', h und der Sollwert der gesuchten Höhe

Spalte 8 wird anschliessend beschrieben, und aus

Spalte 9 sieht man die Differenz zwischen der Sollhöhe und Isthöhe.
Spalte 2 bis 6 hat die Dimension mgal · 10^{-3},
Spalte 7 bis 9 hat die Längendimension m.
In den Spalten 3 bis 6 wurden die Vorzeichen nicht berücksichtigt.
In Spalte 8 ist die Höhenänderung in Metern bei einer Dichteänderung von $\Delta\sigma = +0{,}01$ angeführt. Die erste Ableitung der Gleichung 4.06 bzw. 4.07 gibt diese Grössen, die man noch durch die zweite Ableitung verbessern müsste, wenn man genauere Werte erhalten will.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Al	2,0 (1,96) 0,181	280780	197,00	167,64	162,28 359,28	29,34 781,51 752,17 759,20	− 1,82	+ 7,03
Ar	2,0 (1,75) 0,226	280410	297,12	167,64	159,43 456,55	36,04 614,19 650,23 673,08	− 0,89	+ 22,85
Pl	1,7 (1,62) 0,370	295580	240,00	142,46	125,36 365,36	46,30 809,01 762,71 777,60	− 1,36	+ 14,89
Pk	2,5 (2,42) 0,275	602720	166,12	209,54	194,88 (361,00) 256,12	53,64 2353,27 2299,63 2246,55	+ 6,95	− 53,08
Hk	2,5 (2,35) 0,354	627100	180,12	209,54	186,28 (366,40) 250,72	66,00 2501,20 2435,20 2333,56	+ 7,17	− 101,64
Vs	2,2 (2,10) 0,215	267610	213,00	184,40	176,29 389,29	37,99 687,43 649,44 665,15	− 1,24	+ 15,71
Kr	2,3 (2,52) 0,442	275110	185,00	192,78	161,36 346,36	71,33 794,29 722,96 683,97	− 1,30	− 38,99
Mbg	2,2 (2,20) 0,277	257910	214,00	184,40	171,31 385,31	47,39 669,36 621,97 622,65	− 1,14	− 0,68
Phf	2,2 (2,16) 0,240	260140	223,00	184,40	174,44 397,44	41,86 654,54 612,68 619,32	− 1,12	+ 6,64
Ht	2,3 (2,04) 0,391	647660	217,00	192,78	167,14 (384,14) 232,98	65,35 2779,90 2714,55 2515,20	+ 8,39	− 199,35
Bgst	2,5 (2,75) 0,143	388900	121,00	209,54	205,35 326,35	29,34 1191,67 1162,33 1089,09	− 2,88	− 73,24
Isbg	2,0 (1,79) 0,181	339990	196,00	167,64	162,28 (358,28) 258,84	29,33 1313,51 1284,18 1207,12	+ 3,97	− 77,06
Gbr	2,0 (1,95) 0,222	389580	152,00	167,64	159,76 311,76	35,54 1249,62 1214,08 1228,02	− 3,02	+ 13,94

Allein die Grössenordnung der Höhenunterschiede Δh in Spalte 8 zeigt, wie genau man die Oberflächendichte bestimmen sollte, um richtige Höhen zu erhalten. Doch diese Höhenbestimmung ist voraussetzungslos und lässt sich bei bekannten Höhendifferenzen zwischen zwei Messpunkte noch wesentlich verfeinern.

5. Schlussfolgerung

Voraussetzung für einen repräsentativen Wert von $\frac{\Delta g}{\Delta h}$ ist, dass der Untergrund im grösseren Bereich homogen ist. Die oberflächennahe Dichte σ und der Geländewinkel δ lassen sich hypothesenfrei bestimmen.
Von den drei Grössen: Höhe h des Messpunktes, seine Absolutschwere g und Normalschwere γ_0 lässt sich dann jeweils die dritte berechnen, wenn man die beiden anderen kennt.
Genau so, wie man mit Hilfe der Gleichung 4.06 und 4.07 bei genauer Kenntnis der Oberflächendichte exakte Höhen über dem Bezugsniveausphäroid

berechnen kann, erhalten wir bei bekannter Höhe die Oberflächendichte äusserst scharf (siehe Tabelle, Spalte 2, Werte in Klammer). Anderseits würde die Gleichung 6.5 [4] bei bekannter Höhe des Messpunktes die mittlere Dichte bis zum Bezugsniveau sphäroid geben.
Durch Vergleich dieser beiden Dichten wären aufschlussreiche Aussagen über den Untergrund möglich. Das heisst also, dass diese gravimetrische Dichtebestimmung, bei der nur zwei Gravimetermessungen notwendig sind, auf einfache Art aufschlussreiche Dichtewerte für die Lagerstättenforschung liefern könnte.
Die vereinfachte Gleichung 4.12 [4] ist für zwei verschiedene Messpunkte der physischen Erdoberfläche gedacht.

$$h_2 - h_1 = \frac{g_2 - g_1 + \Delta\gamma_0}{\frac{\partial g_2}{\partial h} - 2\frac{\partial \gamma}{\partial h}} + \frac{\left(\frac{\partial g_1}{\partial h} - \frac{\partial g_2}{\partial h}\right) h_1}{\frac{\partial g_2}{\partial h} - 2\frac{\partial \gamma}{\partial h}} \qquad 4.121$$

Nehmen wir die beiden Messpunkte in derselben Lotlinie an, wobei P_1 an der Oberfläche sein soll und P_2 ein zweiter Punkt dieser Lotlinie, aber an der Trennfläche mit einer anderen Dichte σ_2, so lässt sich die Messungsdifferenz $(g_2 - g_1)$ durch den Prey-Gradienten und die Höhendifferenz $(h_2 - h_1)$ ausdrükken, und die Höhe des zweiten Punktes P_2 ergibt sich schliesslich aus Gleichung 4.121 mit

$$h_2 = \frac{(g_1 - \gamma_0 \quad - h_1(\frac{\partial \gamma}{\partial h} - 4\Pi k^2 \sigma_1)}{\frac{\partial g_1}{\partial h} - (\frac{\partial g_1}{\partial h} - \frac{\partial g_2}{\partial h}) - (\frac{\partial \gamma}{\partial h} - 4\Pi k^2 \sigma_1)} \qquad 4.122$$

Die Gradientendifferenz $(\frac{\partial g_1}{\partial h} - \frac{\partial g_2}{\partial h})$ lässt sich entweder durch Messung am anstehenden Felsen oder aus einer Bohrung bis zum Felsen oder aus der bekannten Dichte des Felsens σ_2 berechnen.
Im April 1982 wurden auf einem Rutschhang der Salzburger Autobahn auf einer Fläche von etwa 10 ha 300 Gravimetermessungen durchgeführt. Daraus wurden mit einer Gleichung, die in den oben angeführten Arbeiten abgeleitet wurde, 300 Höhenpunkte des unter dem Rutschhang gelegenen Felsens berechnet. Der aus diesen 300 Punkten abgeleitete Schichtenplan des unterirdischen Felsens wurde an die Autobahnverwaltung geliefert. Dieser gelang es mit Hilfe dieses Schichtenplanes, bauingenieurliche Massnahmen zu treffen, welche die Rutschungen stark eindämmten bzw. verhinderten.

Literatur

[1] F. Helmert: Die mathematischen und physikalischen Theorien der Höheren Geodäsie, Nachdruck Minerva GesmbH, Frankfurt a. M. 1962.

[2] W. Embacher: Die Bestimmung der orthometrischen Korrektion des geometrischen Nivellements aus Lotabweichungen und aus dem Störpotential T. Ö. Z. f. V. 1980, Heft 1.

[3] W. Embacher: Ein Versuch zur Bestimmung des gestörten Schwerevektors aus lokalen Gravimetermessungen. Z. f. V. 1980, Heft 6.

[4] W. Embacher: Das Dynamische Nivellement. Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik 4/82.

[5] W. Embacher: Der Abstand zweier Niveauflächen aus Vertikalwinkeln. VPK, Fachblatt III/IV-75.

Die umfassende Literatur zu dem vorstehenden Fachgebiet wurde in der Arbeit [3] bereits erfasst, es wird noch auf folgende Titel verwiesen:
C. F. Baeschlin: Lehrbuch der Geodäsie. Orell Füssli, Zürich 1948.
H. Bruns: Die Figur der Erde. P. Stankiewicz, Berlin 1878.
K. Ledersteger: Astronomische und Physikalische Geodäsie. Jordan/Eggert/Kneissl, Handbuch der Vermessungskunde, Band V, J. B. Metzler, Stuttgart 1956/69.
W. A. Magnizky, W. W. Browar, B. P. Schimbrew: Theorie der Figur der Erde. VEB Verlag für Bauwesen, Berlin 1964.

Adresse des Verfassers:
Prof. Dipl.-Ing. Dr. W. Embacher
Institut für Geodäsie Universität Innsbruck
Technikerstrasse 13, A-6020 Innsbruck

Untersuchungen über die Genauigkeit der Blockausgleichung nach der Bündelmethode

Z. Parsic

Zur Beurteilung der Genauigkeit der Blockausgleichung nach der Bündelmethode wurden drei Blöcke mit verschiedenartigem Bild- und Objektpunktmaterial untersucht.
Die Ergebnisse der Untersuchungen haben gezeigt, dass der Vergleich zwischen den tatsächlichen Resultaten (Block 1) und den Resultaten mit simulierten Daten (Block 3) keine zufriedenstellende Übereinstimmung gibt.
Damit stellt sich das Problem, wie man mit heutigen Mitteln die Leistungsfähigkeit aus den zur Verfügung gestellten Stützwerten beurteilen kann.

Afin de déterminer la précision d'une compensation par blocs selon la méthode des faisceaux, trois blocs avec différents types de signalisation des points et de film ont été analysés.
La comparaison des blocs 1 et 3 nous montre que les résultats effectifs (Bloc 1) et ceux des données simulées (Bloc 3) ne concordent pas de façon satisfaisante.
Ceci pose le problème suivant: comment peut-on à partir des informations à disposition et avec les moyens actuels analyser les capacités de telle compensation?

Institut für Geodäsie und Photogrammetrie, ETH-Hönggerberg, CH-8093 Zürich, Separata Nr. 56

1. Allgemeine Problemstellung der Blockausgleichung

1972 wurde ein Programm für die Blockausgleichung nach der Bündelmethode von der ETH Zürich publiziert [10]. Mit diesem Programm wurden am Institut für Geodäsie und Photogrammetrie mehrere Blockausgleichungen durchgeführt [7], [9], [11].
Die folgenden Untersuchungen über die Genauigkeit einer Aerotriangulation wurden mit einem modifizierten Programm der Bündelmethode an der CDC-Rechenanlage des Rechenzentrums der ETH ausgeführt.
In einer vorausgegangenen Veröffentlichung [8] wurde über die erzielten Genauigkeiten mit diesem Programm berichtet.