Raumnetz Thusis

Autor(en): **Schneider, D.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik : VPK = Mensuration, photogrammétrie, génie rural**

Band (Jahr): **76 (1978)**

Heft 4

PDF erstellt am: **18.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-229211

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Raumnetz Thusis*

D. Schneider

Résumé

Dans le calcul conventionnel des réseaux de triangulation, le modèle géométrique utilisé n'est souvent pas satisfaisant pour les régions montagneuses. La géodésie tridimensionnelle décrit d'une manière plus complète les relations géometriques dans les réseaux spaciaux. En plus des coordonnées et des altitudes, les déviations de la verticale sont aussi calculées simultanément pour chaque point. Dans le réseau de Domleschg (GR) les erreurs moyennes ne dépassent pas 30 mm en position, 34 mm en altitude et 6.2cc pour les déviations de la verticale. Les erreurs du modèle dans la compensation conventionnelle ont causé des erreurs jusqu'à 10 cm en position et 23 cm en altitude.

1. Einleitung

Bei der trigonometrischen Fixpunktbestimmung geht es grundsätzlich darum, die räumliche Lage von Punkten der Erdoberfläche gegenüber einem geeigneten Bezugssystem mit genügender Genauigkeit zu bestimmen. Bei der konventionellen Ausgleichung von Triangulationsnetzen in der Vermessungspraxis wird die Lageausgleichung getrennt von der Ausgleichung der Höhen durchgeführt. Die Lageausgleichung erfolgt auf einer mathematisch einfach beschreibbaren geometrischen Bezugsfläche (Projektionsebene, Ellipsoid), während die Höhen üblicherweise auf das Geoid bezogen werden, obwohl diese physikalisch definierte Bezugsfläche im allgemeinen gar nicht exakt bekannt ist.

Die unregelmässige Massenverteilung der Erdkruste in Gebirgszonen bewirkt einen unruhigen Verlauf des Geoids. Die Abweichungen des Geoids vom Ellipsoid (beschreibbar durch Lotabweichungen und Geoidhöhen) nehmen in diesen Gebieten grosse, innerhalb kurzer Entfernungen sich stark ändernde Beträge an. Das mathematische Modell der konventionellen Methode berücksichtigt diese Abweichungen nicht und führt deshalb zu spürbaren Modellfehlern.

Bei den Methoden der *dreidimensionalen Geodäsie* werden alle Unbekannten gemeinsam aus der Gesamtheit aller Beobachtungen in einem einheitlichen, rein geometrischen Bezugssystem bestimmt. Geeignete Bezugssysteme sind vor allem lokale oder geozentrische kartesische Koordinatensysteme. Die Methode kommt ohne jede Definition von Modellflächen (Ellipsoid, Geoid) aus.

Die Idee der dreidimensionalen Geodäsie ist schon seit dem letzten Jahrhundert bekannt (Bruns, 1878). Für die Berechnung von Triangulationsnetzen wurde die Methode aber nur selten angewendet, da die anfallende Rechenarbeit kaum zu bewältigen war. Im Computerzeitalter kann der grössere Rechenaufwand kein Hindernis mehr sein.

Im Juli 1976 haben Schürer und Bauersima [1] an dieser Stelle über eine *rationelle Methode* zur Behandlung der dreidimensionalen Geodäsie berichtet. Anstelle der unübersichtlichen, mühsam mit Hilfe der sphärischen Trigonometrie hergeleiteten Formeln der klassischen dreidimensionalen Geodäsie [2] gelingt es den Verfassern dank der Verwendung der räumlichen Rotationen und der Matrizenarithmetik, das mathematische Modell leicht überschaubar darzustellen. Die Art der Behandlung ist nebenbei auch von den modernen Methoden der Aerotriangulation in der analytischen Photogrammetrie bekannt. Eine weitgehende Analogie der Problemstellung und Lösung ist erkennbar.

Diese Veröffentlichung hat den Wunsch aufkommen lassen, sich mit der Behandlung von Raumnetzen eingehend zu befassen und die «rationelle Methode» praktisch anzuwenden. Der Verfasser hatte die Möglichkeit, sich schon im 8. Semester im geodätischen Praktikum II mit dem Problem vertraut zu machen, einige Computerprogramme zu entwickeln und anhand von Beispielen zu testen. Unter der Oberleitung der Professoren Schürer und Conzett wurden im Diplomkurs 1976 in Thusis die notwendigen Beobachtungen zur dreidimensionalen Ausgleichung eines kleinen Testnetzes durchgeführt.

Die Messarbeiten und die Auswertungen anlässlich der Diplomarbeit im Wintersemester 1976/77 wurden von Herrn N. Wunderlin, dipl. Ing. ETH, betreut.

2. Das mathematische Modell der Ausgleichung dreidimensionaler Netze

Die Gleichungen des funktionalen Modells der dreidimensionalen Ausgleichung lassen sich mit Hilfe räumlicher Drehungen in leicht verständlicher Weise herleiten [1]. Um dem Leser das Verständnis dieses Berichts zu erleichtern, sind die wichtigsten Beziehungen in diesem Kapitel noch einmal zusammengefasst.

Bezugssysteme

Bei der klassischen Geodäsie steht das Rotationsellipsoid im Vordergrund. Im Gegensatz dazu verzichtet die dreidimensionale Methode auf die Einführung einer Bezugsfläche. Es kann ein beliebiges kartesisches Koordinatensystem eingeführt werden. Das geozentrische kartesische Koordinatensystem X, Y, Z ist als zentrales Bezugssystem für die dreidimensionale Ausgleichung besonders geeignet. Es steht in einfachem Zusammenhang mit dem klassischen ellipsoidischen Bezugssystem (L, B, H) (Abb. 1).

$$[X, Y, Z] = [(N+H)\cos B \cos L,\ (N+H)\cos B \sin L,\ (N(1-e^2)+H)\sin B] \qquad (1)$$

In jedem Stationspunkt P_i wird ein lokales kartesisches Koordinatensystem (ξ, η, ζ) festgelegt. Die ζ-Achse fällt mit dem physikalischen Lot im Stationspunkt (reali-

* Bericht über eine Diplomaufgabe des Instituts für Geodäsie und Photogrammetrie der ETHZ

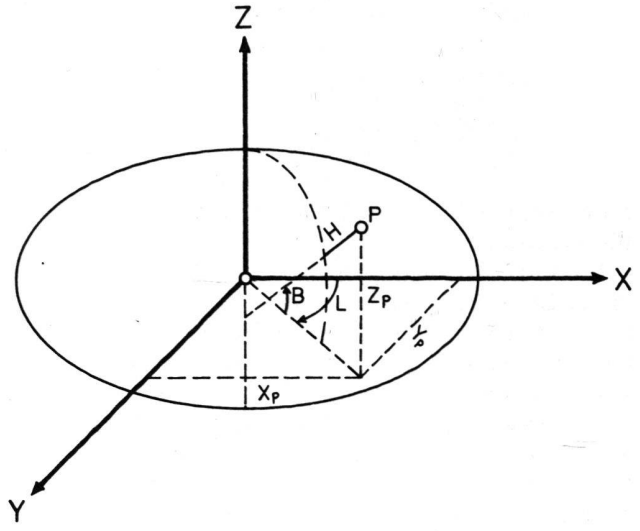


Abb. 1 Das Rotationsellipsoid als klassische geodädtische Bezugsfläche und das geozentrische kartesische Koordinatensystem.

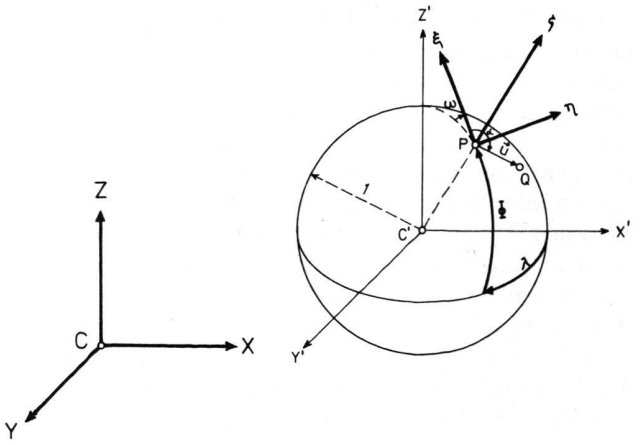


Abb. 2 Richtungskugel durch P zur Darstellung der Transformation des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ vom geozentrischen ins lokale kartesische Koordinatensystem.

siert durch die Stehachse des horizontierten Theodolits) zusammen. Die ξ-Achse wird durch den Orientierungswinkel ω festgelegt (Orientierung des Richtungssatzes) (Abb. 2).

Als Unbekannte der Ausgleichung werden die geozentrischen kartesischen Koordinaten (X_i, Y_i, Z_i) jedes Netzpunktes P_i betrachtet. Mit der Bestimmung dieser Unbekannten ist die Geometrie des Netzes eindeutig bestimmt. Zur Verknüpfung der lokalen Koordinatensysteme mit dem zentralen Bezugssystem werden für jeden Netzpunkt P_i zusätzlich die unbekannten räumlichen Orientierungswinkel ω_i, Φ_i (astronomische Breite), λ_i (astronomische Länge) eingeführt. Pro Netzpunkt sind also 6 Unbekannte zu bestimmen.

Funktionales Modell

Die zwei Stationspunkte P, Q eines Raumnetzes definieren den freien Vektor **U** im zentralen bzw. **u** im lokalen kartesischen System (Visurstrahl). Zu jeder freien Visur sind folgende Grössen der Beobachtung zugänglich:

– *geodätische Beobachtungen:*
  z′: beobachtete Zenitdistanz
  α': beobachtete Richtung
  r′: beobachtete Distanz

Auf jeder Station können zusätzlich folgende Grössen erfasst werden:

– *astronomische Beobachtungen:*
  λ': beobachtete astronomische Länge
  Φ': beobachtete astronomische Breite
  a′: beobachtetes astronomisches Azimut

Die geodätischen Beobachtungen z′, α', r′ lassen sich im lokalen kartesischen System (ξ, η, ζ) als fingierter Beobachtungsvektor **u**′ der Visur $\overrightarrow{PQ}$ darstellen.

$$\mathbf{u}' = \begin{bmatrix} r' \sin z' \cos \alpha' \\ r' \sin z' \sin \alpha' \\ r' \cos z' \end{bmatrix} \tag{2}$$

Die räumliche Transformation des freien Vektors **U** vom zentralen ins lokale System führt direkt zur Beobachtungsgleichung für die fingierte ausgeglichene Beobachtung (Abb. 2):

$$\mathbf{u}(\bar{z}, \bar{\alpha}, \bar{r}) = \mathbf{A}(\omega_P, \Phi_P, \lambda_P) \cdot \mathbf{U}(X_P, Y_P, Z_P, X_Q, Y_Q, Z_Q)$$

oder symbolisch

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{3}$$

Die Rotationsmatrix **A** setzt sich aus drei elementaren Rotationsmatrizen zusammen:

$$\mathbf{A} = \mathbf{R}_3(\omega) \cdot \mathbf{R}_2(\Phi - \pi/2) \cdot \mathbf{R}_3(\lambda + \pi) \tag{4}$$

Die Linearisierung der fingierten Beobachtungsgleichung (3) in den Stützwerten $X_P^o, Y_P^o, Z_P^o, X_Q^o, Y_Q^o, Z_Q^o$ (geozentrische Näherungskoordinaten), $\omega_P^o = 0$, $\Phi_P^o = B$, $\lambda_P^o = L$ (geodätische Koordinaten für die Unbekannten) führt zu den fingierten vektoriellen Verbesserungsgleichungen im (ξ, η, ζ)-System:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}_o \partial\mathbf{U} + \mathbf{F}\mathbf{U}_o \partial\omega + \mathbf{G}\mathbf{U}_o \partial\Phi + \mathbf{H}\mathbf{U}_o \partial\lambda - (\mathbf{u}' - \mathbf{A}_o\mathbf{U}_o) \tag{5}$$

oder symbolisch

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l} \tag{5'}$$

Zur vektoriellen Beschreibung der Verbesserungen an den geodätischen Beobachtungen wird zusätzlich pro Visur **u** ein weiteres kartesisches Koordinatensystem, das kartesische «Visursystem» (1, 2, 3), festgelegt (Abb. 3).

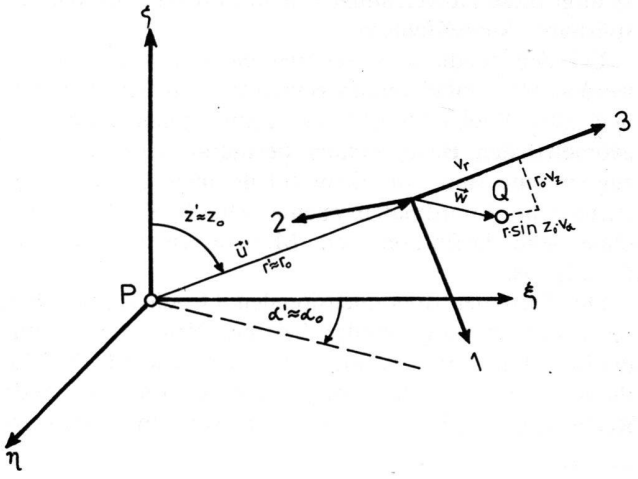


Abb. 3 Vektorielle Darstellung der Verbesserungen an den geodätischen Beobachtungen im kartesischen «Visursystem» (1, 2, 3).

Die 3-Achse fällt mit dem Visurstrahl **u** zusammen, während die 1-Achse in der durch **u** und die ζ-Achse aufgespannten Ebene liegt.

Durch Multiplikation von Gleichung (5) mit der Rotationsmatrix $\mathbf{R} = \mathbf{R}_2(z_0) \cdot \mathbf{R}_3(\alpha_0)$ erhält man die Gleichung der fingierten vektoriellen Verbesserung im (1, 2, 3)-System:

$$\mathbf{w} = \mathbf{RA}_0\partial U + \mathbf{RFU}_0\partial\omega + \mathbf{RGU}_0\partial\Phi + \mathbf{RHU}_0\partial\lambda - \mathbf{R}(\mathbf{u}' - \mathbf{A}_0\mathbf{U}_0) \quad (6)$$

wobei $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} r_0 \; v_z \\ r_0 \sin z_0 \; v_\alpha \\ v_r \end{bmatrix}$

und durch eine weitere Multiplikation mit der Matrix

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r_0 \sin z_0} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

schliesslich die zur vermittelnden Ausgleichung notwendige vektorielle Verbesserungsgleichung für die geodätischen Beobachtungen:

$$\mathbf{Cw} = \begin{bmatrix} v_z \\ v_\alpha \\ v_r \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{CRA}_0\partial\mathbf{U} + \mathbf{CRFU}_0\partial\omega + \mathbf{CRGU}_0\partial\Phi + \mathbf{CRHU}_0\partial\lambda - \mathbf{CR}(\mathbf{u}' - \mathbf{A}_0\mathbf{U}_0) \quad (8)$$

Die astronomischen Beobachtungen λ' und Φ' stellen direkte Beobachtungen der unbekannten Grössen dar. Ihre Verbesserungsgleichungen lauten daher:

$$\begin{aligned} v_\Phi &= \partial\Phi - (\Phi' - \Phi_0) \\ v_\lambda &= \partial\lambda - (\lambda' - \lambda_0) \end{aligned} \quad (9)$$

Die Verbesserungsgleichung für die astronomische Azimutbeobachtung a' kann als Spezialfall der Richtungsverbesserungsgleichung (2. Komponente in (7)) betrachtet werden.

$$v_a = (\mathbf{CRA}_0\partial\mathbf{U})_2 + (\mathbf{CRGU}_0\partial\Phi)_2 + (\mathbf{CRHU}_0\partial\lambda)_2 - [a' - (\alpha_0 + \omega_0)] \quad (10)$$

Das funktionale Modell beschreibt die geometrischen Zusammenhänge im Raumnetz in vollkommener Weise. Um der physikalischen Realität bei der Messung gerecht zu werden, enthält das Modell die Hypothese, sämtliche Beobachtungswerte seien vorgängig von systematischen Fehlern (Refraktion, atmosphärische Einflüsse auf die elektronisch gemessenen Distanzen, Aberration bei astronomischen Beobachtungen, Instrumentenfehler usw.) befreit.

Stochastisches Modell

Die zentralen Koordinaten (X, Y, Z) und, falls keine astronomischen Beobachtungen vorliegen, auch die unbekannten Orientierungen ω, Φ, λ mindestens eines Netzpunktes müssen festgehalten werden, da sonst das Normalgleichungssystem singulär wird (Einführung fehlerfreier Grössen für die Unbekannten).

Für alle Beobachtungen sind Varianzen und Kovarianzen a priori einzuführen.

3. Das Programmsystem RAUMTRIG

(Computerprogramme zur dreidimensionalen Ausgleichung von Raumnetzen)

Die Ausgleichung von Raumnetzen ist nur mit Hilfe des Computers ökonomisch durchführbar. Als erster wesentlicher Schritt für die praktische Erprobung des mathematischen Modells waren deshalb einige Programme zu entwickeln.

Ein wesentlicher Vorteil der «rationellen Methode» nach Schürer/Bauersima wurde erst jetzt deutlich spürbar. Nachdem die Unterprogramme für die räumliche Vektortransformation und die Matrizenoperationen definiert waren, liessen sich sämtliche Formeln auf wenigen Programmzeilen übersichtlich strukturiert darstellen.

Das Programmsystem RAUMTRIG (= räumliche Triangulation) besteht aus den drei Programmbausteinen:

- RAUMNETZ (Berechnung der Koeffizienten der Verbesserungsgleichungen)
- RAUMAUS (vermittelnde Ausgleichung)
- GEOZEB (Transformation geozentrischer Koordinaten in Landeskoordinaten)

Die Zwischenspeicherung und Übertragung der Daten erfolgt automatisch mit Datenfiles. Das gewählte Konzept bietet gegenüber einem einzigen grossen Programm bedeutende Vorteile, wie beschränkter Kernspeicherbedarf der einzelnen Module, Kontroll- und Eingriffsmöglichkeiten bei Steuerung des Rechenablaufs von einem Terminal aus und Möglichkeit, einzelne Programmodule auszuwechseln.

Sämtliche Bausteine von RAUMTRIG sind in Standard-FORTRAN für die CDC 6400/6500 des RZETH programmiert. Das System eignet sich für kleinere Testnetze mit einem Festpunkt und könnte nach gewissen Anpassungen auf anderen Rechenanlagen angewendet werden.

4. Das Raumnetz Thusis

Zielsetzung des Projekts

Das Projekt RAUMNETZ THUSIS entstand im Wintersemester 1975/76 mit folgender Zielsetzung:

- Praktische Erprobung der «rationellen Methode» anhand von geeignetem Beobachtungsmaterial
- Bestimmung der Unbekannten X, Y, Z, ω, Φ, λ für jeden Netzpunkt mit bestmöglicher Genauigkeit
- Berechnung von Richtung und Betrag der Lotabweichungen von ausgesprochenen Hangpunkten
- Absolute Orientierung des Netzes durch die Messung von astronomischer Länge und Breite auf mindestens einem Netzpunkt und mindestens eines astronomischen Azimutes
- Untersuchung der Refraktionseinflüsse auf die beobachteten Zenitdistanzen und Richtungen.

Netzdisposition

Der Entwurf sieht ein Netz, bestehend aus einem unregelmässigen Sechseck, mit zwei Punkten im Tal und je zwei extremen Hangpunkten am Heinzenberg sowie am Gegenhang vor (Abb. 4). In den Hangpunkten sind grosse relative Lotabweichungen bezüglich der Talpunk-

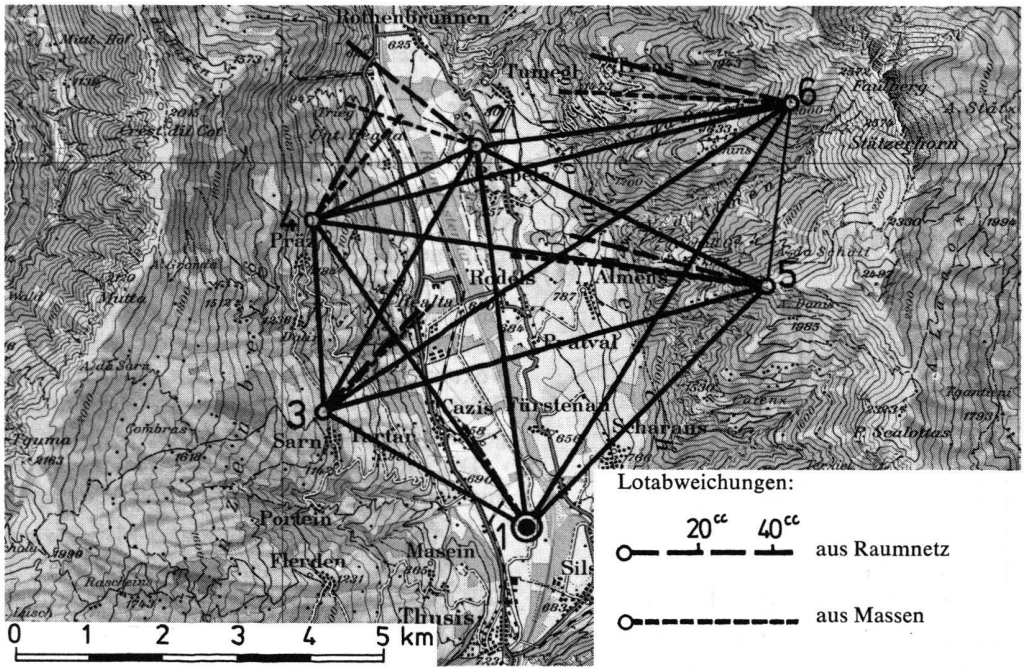


Abb. 4 Raumnetz Thusis mit Lotabweichungen als Resultate der räumlichen Ausgleichung und aus Massen berechneten Lotabweichungen (reproduziert mit Bewilligung der Eidg. Landestopographie vom 30. Januar 1978).

te zu erwarten. Das Netz enthält vorwiegend steile Visuren (bis ca. 20g), so dass bei einer konventionellen Ausgleichung beträchtliche Einflüsse der Modellfehler zu erwarten sind. Die mittlere Visurlänge beträgt ca. 5 km, womit die Punktdichte also etwa der eines Netzes 3. Ordnung entspricht. Höhenwinkelmessungen sind auf diese Distanz noch möglich, wobei gute Voraussetzungen zur Untersuchung von Refraktionseinflüssen gegeben sind.

Ausgleichungen a priori

Um die im projektierten Raumnetz bei verschiedenen angenommenen Messprogrammen erreichbare Genauigkeit abschätzen zu können, wurden mit dem Programmsystem RAUMTRIG insgesamt 10 Ausgleichungsvarianten a priori mit unbestimmter Auflösung der Normalgleichungen berechnet. Das schliesslich zur Ausführung empfohlene Messprogramm sah bei Richtungs-, Distanz- und Höhenwinkelbeobachtungen auf fast allen möglichen Visuren folgende anzustrebenden mittleren Fehler der Beobachtungsmittel vor:

- astronomische Beobachtungen: $\sigma_a = \sigma_\Phi = \sigma_\lambda = 2^{cc}$
- Zenitdistanzen: $\sigma_z = 6^{cc}$
- Richtungen: $\sigma_\alpha = 2^{cc}$
- Distanzen: $\sigma_r = 5\text{ mm} + D \cdot 10^{-6}$

Auf Grund dieses stochastischen Modells berechneten sich die mittleren Fehler a priori der Unbekannten des am schwächsten bestimmten Punktes 6 zu:

$\sigma_x = 1.1$ cm $\quad \sigma_\omega = 6.0^{cc}$
$\sigma_y = 1.0$ cm $\quad \sigma_\Phi = 6.4^{cc}$
$\sigma_z = 4.1$ cm $\quad \sigma_\lambda = 8.5^{cc}$

(Bei fehlerfrei eingeführten Orientierungen Φ, λ, ω im Festpunkt.)

Beobachtungen

Die Messarbeiten wurden im Juli und August 1976 durch 5 Diplomanden (3 Vermessungs- und 2 Kulturingenieure) ausgeführt.

Dabei kam folgendes Instrumentarium zum Einsatz: 1 Kern DKM3 (Astro), 1 Kern DKM3, 1 Kern DKM2A, 1 AGA-Geodimeter 8, 1 Chronograph (Longines) und 1 Zeitzeichenempfänger.

Zur Signalisierung wurden Alu-Signale (ETHZ) mit Stahlseilverspannung, Kunststoffsignale (L+T) sowie Kern-Scheinwerfer verwendet.

Ausser der Visur zwischen den schlecht zugänglichen Punkten 5 und 6 konnten alle Strecken z. T. mehrmals mit dem Laser-Geodimeter gemessen werden. Die Distanzmessungen wurden in wenigen Tagen abgeschlossen. Die Richtungs- und Zenitdistanzmessungen verlangten dagegen, wegen der langen Anmarschwege und der grösstenteils ungünstigen Sicht- und Beleuchtungsverhältnisse, viel Geduld und Ausdauer. Die Zenitdistanzmessungen wurden über die ganze Messperiode verteilt. Einzelne Visuren wurden an bis zu 5 Messtagen bis zu insgesamt 14mal beobachtet. Wegen der häufigen nächtlichen Bewölkung konnten leider nur auf Station 1 astronomische Beobachtungen ausgeführt werden.

5. Die Ausgleichung

Bei der strengen Ausgleichung von Raumnetzen wird ein funktionales Modell verwendet, das der Realität sehr nahe kommt. Bedeutende systematische Fehlereinflüsse sind vor allem von der Höhen- und Seitenrefraktion zu erwarten. Neben der Einführung eines globalen Refraktionskoeffizienten wurden deshalb in einigen Ausgleichungsvarianten mit Hilfe eines mathematischen Modells berechnete Refraktionswinkel [3] berücksichtigt.

Dem funktionalen Modell hoher Qualität sollte ein gleichwertiges stochastisches Modell zur Seite gestellt werden. Die mittleren Fehler a priori der Beobachtungen wurden auf folgende Weise festgelegt:

- *Distanzen:*
  $\sigma_r = 5\text{ mm} + 1 \cdot D\ 10^{-6}$ (bewährter Ansatz)
  Berücksichtigung der Autokorrelation bei Messserien (Autokorrelationskoeffizient: $k = 0.8$ bei Mehrfachmessungen mit $\triangle t \leqq 1$ h)
- *Richtungen:*
  Aus Dreiecksschlüssen bei Berücksichtigung der Lotabweichungen:
  σ_α (DKM3) $= 2.2^{cc}$ (Satzmittel)
  σ_α (DKM2A) $= 2.6^{cc}$ (Satzmittel)
- *Zenitdistanzen:*
  Aus gegenseitigen Zenitdistanzen bei Berücksichtigung der Lotabweichungen:
  $\sigma_z \approx 5.4^{cc}$ (Mittelwert aller Visuren)
  Berücksichtigung der Autokorrelation der Messserien nach einem einfachen zeitabhängigen Autokorrelationsmodell.
- *Astronomische Beobachtungen:*
  Aus Serienmittelbildungen und Vorausgleichungen:
  $\sigma_a = 0.80''$, $\sigma_\Phi = 0.43''$, $\sigma_\lambda = 0.36''$
  Als Ersatz für fehlende astronomische Beobachtungen wurde versucht, aus sichtbaren Massen berechnete Lotabweichungen als fingierte astronomische Beobachtungen einzuführen. Dabei wurden folgende mittleren Fehler a priori angenommen:
  $\sigma_\xi = 1.2''$ $\sigma_\eta = 1.2''$

Sämtliche Kreuzkorrelationen blieben unberücksichtigt, da ihre Abschätzung schwierig ist und nur ein geringer Einfluss vermutet wird.

Die Annahmen des stochastischen Modells wurden anhand verschiedener Ausgleichungsvarianten und mit Hilfe des Modelltests

$$\frac{m_0^2}{\sigma_0^2} < \left(\frac{\chi^2}{f}\right)_{0.95} \qquad (11)$$

überprüft. Dabei zeigte sich, dass die Bestimmung der räumlichen Orientierungswinkel Φ und λ bei Netzpunkten ohne astronomische Beobachtungen in starkem Masse von der Wahl des stochastischen Modells der Zenitdistanzen abhängig ist.

Resultate

Aus den berechneten räumlichen Orientierungen Φ und λ wurden die Lotabweichungen

$$\xi = \Phi - B \text{ und } \eta = (\lambda - L) \cdot \cos\Phi \qquad (12)$$

berechnet. Sie sind in Abb. 4 dargestellt und den aus sichtbaren Massen, nach Elmiger [4] berechneten Lotabweichungen gegenübergestellt.

In der Tabelle sind die mittleren Fehler der Unbekannten des am schwächsten bestimmten Punktes 6 als Resultat dreier verschiedener Ausgleichungsvarianten angegeben. Bei Annahme einer fehlerfreien räumlichen Orientierung des Netzes im Festpunkt wird ein mittlerer Lagefehler von ca. 1 cm und ein mittlerer Höhenfehler

Tabelle Mittlere Fehler der Unbekannten von Punkt 6

Variante	m_y [mm]	m_x [mm]	m_H [mm]	m_ω [cc]	m_Φ [cc]	m_λ [cc]
1	24	18	34	6.2	6.2	8.2
2	8	9	32	5.8	6.1	8.1
3	26	19	22	4.6	3.0	4.7
4	7	9	21	3.6	3.0	4.7

Variante 1: Astronomische Beobachtungen nur im Festpunkt (1).
Variante 2: Fehlerfreie Orientierung im Festpunkt (1) angenommen.
Variante 3: Lotabweichungen aus Massen als fingierte astronomische Beobachtungen eingeführt.
Variante 4: Lotabweichungen aus Massen als fingierte astronomische Beobachtungen eingeführt und fehlerfreie Orientierungen im Festpunkt (1) angenommen.
m_y, m_x: mittlere Fehler an den Projektionskoordinaten
m_H: mittlerer Fehler der ellipsoidischen Höhe

von ca. 3 cm erreicht (Variante 2). Die Einführung der Lotabweichungen als fingierte astronomische Beobachtungen bringt neben kleineren mittleren Fehlern an den Orientierungswinkeln Φ, λ und ω eine spürbare Verbesserung der Höhengenauigkeit. Die Höhe wird etwa mit gleicher Genauigkeit wie die Lagekoordinaten bestimmt (Variante 3).

Die Wirkung der mit grossem Aufwand aus meteorologischen Daten anhand eines physikalischen Modells berechneten Refraktionswinkel war ziemlich ernüchternd.

Das dreidimensionale Fehlerellipsoid

Der geometrische Ort gleicher Wahrscheinlichkeit für die Stichprobe eines Zufallsvektors $(\underline{x}, \underline{y})$ in der Ebene ist die mittlere Fehlerellipse. Sie wird zur Beschreibung der Lagegenauigkeit von Punkten bei der ebenen Ausgleichung benützt. Analog dazu kann ein Punkt im Raum als dreidimensionale Stichprobe des Zufallsvektors $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ betrachtet werden. Der geometrische Ort gleicher Wahrscheinlichkeit im m-dimensionalen Raum ist ein m-dimensionales Fehlerellipsoid. Die Wahrscheinlichkeit $1-\alpha$, dass die Spitzen der Vektoren $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z})$ aller Stichproben innerhalb des mittleren Fehlerellipsoids liegen, ist im dreidimensionalen Fall nur noch 20 % gegenüber 39 % im ebenen und 68 % im eindimensionalen Fall.

Zur Beschreibung der Genauigkeit der Punktbestimmung im Raum werden mit Vorteil die Grössen der drei Halbachsen des mittleren Fehlerellipsoids und ihre räumliche Orientierung bezüglich eines lokalen Koordinatensystems (z. B. $[\xi, \eta, \zeta]$-Systems des Festpunktes) angegeben. Die Q_{xx}-Teilmatrix der Koordinatenunbekannten kann mit der Transformation

$$Q_{\xi\xi} = A_o \cdot Q_{xx} \cdot A_o^T \qquad (13)$$

ins (ξ, η, ζ)-System überführt werden. Zur Bestimmung der Hauptachsen des mittleren Fehlerellipsoids ist eine dreidimensionale Hauptachsentransformation erforderlich. An Stelle der strengen Lösung (Eigenwertproblem)

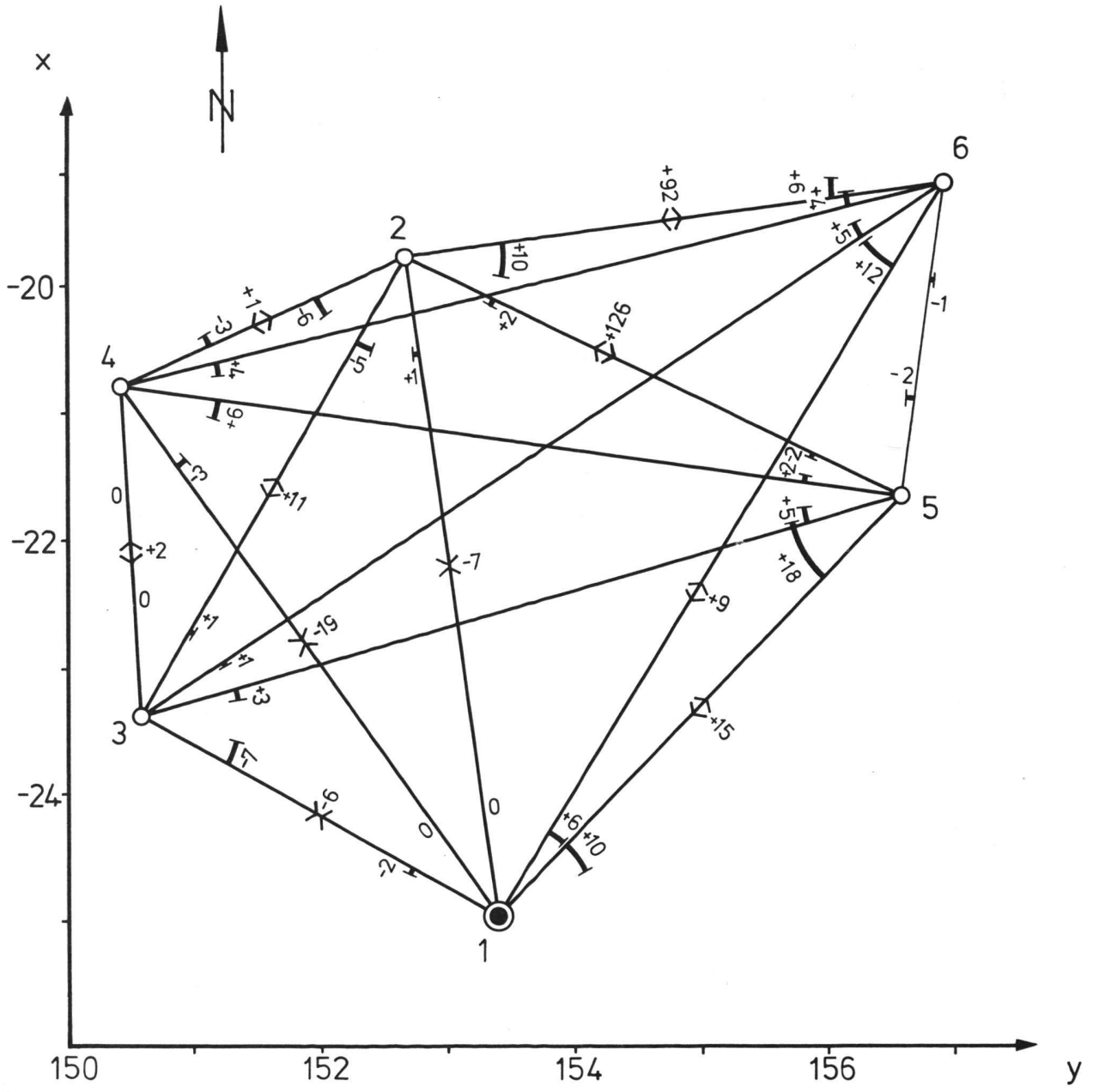
führt eine iterative Methode, in der numerischen Mathematik als Jacobi-Rotation bekannt, rasch zum Ziel.

Eine Möglichkeit zur Darstellung der räumlichen Netzkonfigurationen und der dreidimensionalen mittleren Fehlerellipsoide ist das Anaglyphenverfahren mit Komplementärfarben. Der Berechnungsvorgang zur Herstellung der Bilder entspricht der Simulation einer stereophotogrammetrischen Aufnahme mit Hilfe der zentralperspektiven Abbildung.

6. Vergleich mit der ebenen, konventionellen Ausgleichung

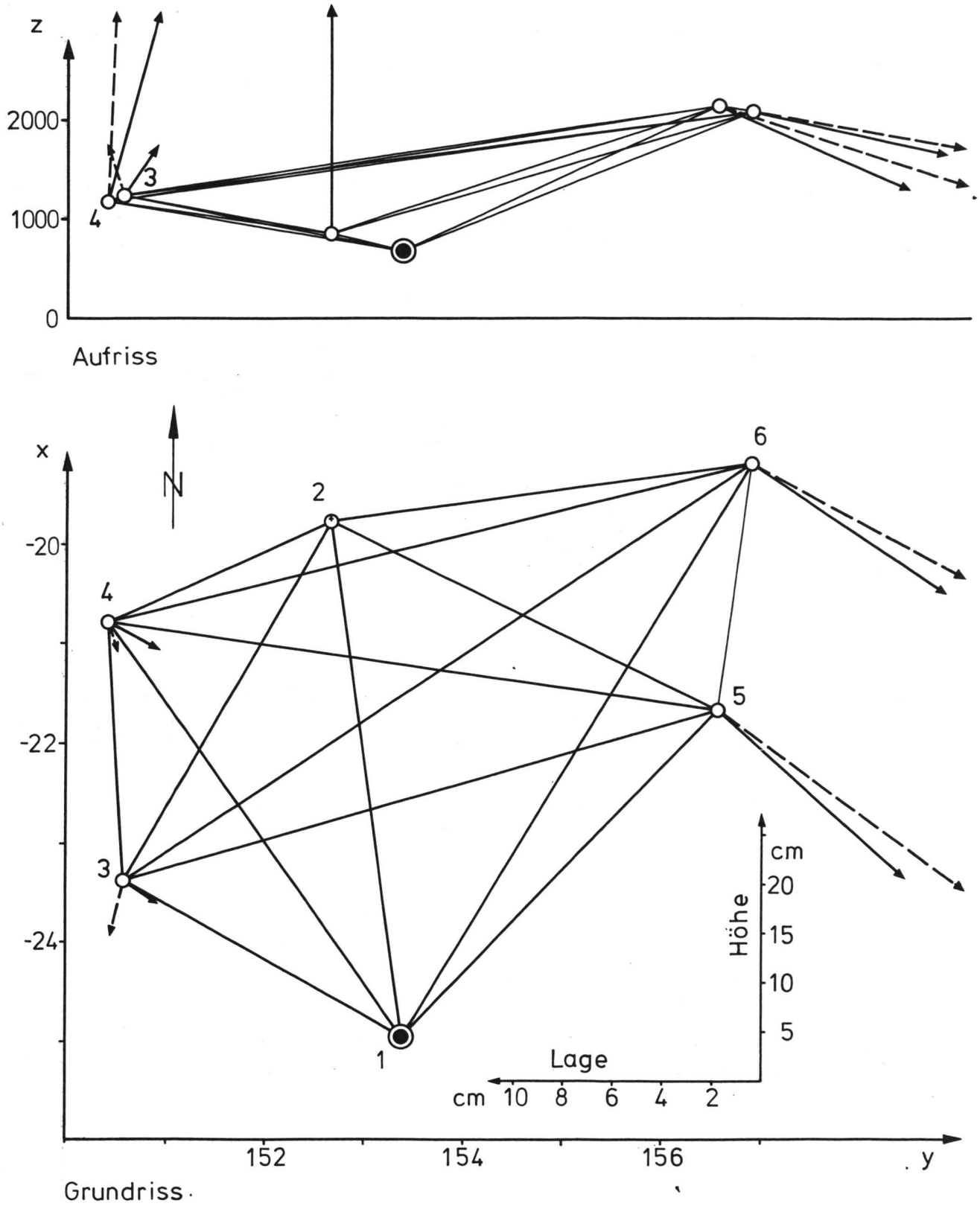
Mit der Berechnung von Lage und Höhe sowie der Lotabweichnungen der Netzpunkte und der Berechnung der mittleren Fehler dieser Unbekannten war die eigentliche Diplomaufgabe gelöst. Nachträglich wurden zur Ergänzung die Resultate der Raumausgleichung mit den Ergebnissen einer konventionellen Lage- und Höhenausgleichung verglichen. Diese Unterschiede stellen die Einflüsse der üblicherweise vernachlässigten Modellfehler auf die Punktbestimmung dar. Sie sind für den Praktiker besonders aufschlussreich.

Zur konventionellen Lage- und Höhenausgleichung wurde jenes Triangulationsprogramm benützt, das in der Schweizerischen Landestriangulation heute fast ausnahmslos Anwendung findet (Programm LANDTOP der Eidg. Landestopographie). Das diesem Rechenprogramm zugrunde liegende funktionale Modell berücksichtigt die Lotabweichungen und Geoidhöhen nicht. Die Lagekoordinaten werden vorgängig und getrennt von der



Distanzänderungen in mm
Richtungsänderungen in cc

Abb. 5 Einflüsse der Modellfehler der konventionellen Ausgleichung auf die Messgrössen.



○— — — — → Variante ohne talüberspannende Distanzen.

Abb. 6 Koordinatenunterschiede zwischen konventioneller und dreidimensionaler Ausgleichung.

Höhenausgleichung in der Projektionsebene berechnet. Für die Reduktion der schiefen Distanzen werden die Mittelwerte gegenseitiger Höhenwinkelbeobachtungen verwendet.

Das Beobachtungsmaterial und das stochastische Modell der dreidimensionalen Ausgleichung wurden unverändert übernommen.

Einflüsse der Modellfehler

Aus dem Vergleich der Verbesserungen aus dem ebenen Näherungsabriss (Resultate der dreidimensionalen Ausgleichung als Näherungskoordinaten eingeführt) mit den Verbesserungen der räumlichen Ausgleichung erhält man direkt die Einflüsse der Modellfehler der konventionellen Ausgleichung auf die Messgrössen (Abb. 5).

Koordinatenunterschiede

Die systematischen Fehler der Punktbestimmung infolge des unzulänglichen mathematischen Modells der konventionellen Ausgleichung erreichen bis 10 cm bzw. 12.5 cm, falls die talüberspannenden Distanzen (4→5, 4→6, 3→5, 3→6) nicht eingeführt werden (Abb. 6). Die Testgrössen des Modells: m_0^2 / σ_0^2 erreichen 5.06 (Lage) gegenüber 1.13 bei der vergleichbaren Variante der dreidimensionalen Ausgleichung.

Bei der Interpretation der festgestellten Höhenänderungen von bis zu 23 cm ist zu beachten, dass sich bei der Raumnetzausgleichung ellipsoidische Höhen ergeben, während bei der konventionellen Ausgleichung grob genähert orthometrische Höhen resultieren.

7. Schlussfolgerungen für die Triangulationspraxis

Bei der Bestimmung von geodätischen Netzen in Gebirgsregionen ist der Wahl der mathematischen Modelle besondere Beachtung zu schenken. Die konventionelle Ausgleichung basiert auf einem für viele Zwecke unzulänglichen Modell. Bei ihrer Anwendung treten systematische Lage- und Höhenfehler auf. Zudem wird die Genauigkeit der eingeführten Beobachtungen bei diesen Modellen zu pessimistisch geschätzt.

Zur Verbesserung der Ausgleichungsmodelle stehen folgende Möglichkeiten offen:

a) Dreidimensionale Ausgleichung mit Einführung von astronomischen Stützwerten. Bestimmung der räumlichen Orientierungen (und somit der Lotabweichungen) als Unbekannte.

b) Getrennte Lage- und Höhenausgleichung mit Berücksichtigung von Lotabweichungen aus Massen und eventuell Geoidhöhen.

c) Kombinationen von a und b.

Je nach Art der gestellten Triangulationsaufgabe ist zu entscheiden, welche der Methoden am vorteilhaftesten anzuwenden ist.

Bei der dreidimensionalen Ausgleichung müssen genügend Beobachtungen vorliegen, um die 6 Unbekannten pro Netzpunkt mit genügender Überbestimmung berechnen zu können. Schwächster Punkt bei der Bestimmung der Lotabweichungen bei dreidimensionalen Ausgleichungen sind die beobachteten Zenitdistanzen, ihr Refraktionsmodell und ihr stochastisches Modell. Bei bodennahen oder mehr als 10 km langen Visuren dürfte ihre Genauigkeit vermutlich nicht mehr ausreichen.

Die Anwendung der dreidimensionalen Methode dürfte für folgende geodätischen Netze in Gebirgsregionen Vorteile bringen:

- Absteckungsnetze der Ingenieurvermessung, wie Tunneldurchschlagsnetze, Netze für Staumauern, Viadukte usw.
- Deformationsmessungen an Bauwerken
- Gleichzeitige Bestimmung von horizontalen und vertikalen rezenten Krustenverschiebungen
- Überprüfung von Basisvergrösserungsnetzen.

Den grössten Beitrag zur Verbesserung der Punktbestimmung bringt die Berücksichtigung der Lotabweichungseinflüsse. Die gemeinsame Bestimmung der Lage- und Höhenunbekannten hat bei Visurneigungen bis 20g eine vergleichsweise geringe Wirkung.

Welche der Möglichkeiten zur Verbesserung des mathematischen Modells Anwendung findet, hat für die Praxis keine grosse Bedeutung. Wesentlich ist aber, dass die systematischen Fehler infolge des unzulänglichen Modells der konventionellen Ausgleichungsmethode vermieden werden.

Literatur

[1] Bauersima, I.; Schürer, M.: Rationelle Behandlung der dreidimensionalen Geodäsie. Zeitschrift «Vermessung, Photogrammetrie, Kulturtechnik» 7-1976.

[2] Ramsayer, K.: Strenge und genäherte Ausgleichung von Raumnetzen in einem lokalen kartesischen Koordinatensystem. DGK, Reihe A, Nr. 71. München, 1971.

[3] Wunderlin, N.: Verwendung rechnerisch bestimmter Refraktionswinkel in einem Höhenwinkelnetz. Zeitschrift für Vermessungswesen 11-1970.

[4] Elmiger, A.: Studien über Berechnung von Lotabweichungen aus Massen, Interpolation von Lotabweichungen und Geoidbestimmung in der Schweiz. Mitteilung aus dem Institut für Geodäsie und Photogrammetrie ETHZ, Nr. 12, Zürich, 1969.

Adresse des Verfassers:
Dieter Schneider, dipl. Ing., Eidgenössische Landestopographie, 3084 Wabern