Zur Flächenverzerrung der Kugelprojektion

Autor(en): **Bolliger, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **63 (1965)**

Heft 10

PDF erstellt am: **22.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-220016

Abschließend kommen wir zu folgenden Feststellungen:

Die Kunststoffmarke «Attenberger» ist leider bedeutend weniger haltbar als ein Markstein.

Es ist nicht erwiesen, daß die neue Methode wirtschaftlicher ist, insbesondere da in einem halben Jahre 9mal soviel Verluste festgestellt wurden als bei Granitmarksteinen und die Wiederherstellungsarbeiten bei gründlichen Untersuchungen mitberücksichtigt werden müssen.

Eine Kunststoffmarke sollte mindestens ebenso solid sein wie ein Granitstein. Sie sollte so konstruiert werden, daß sie wie ein Pfahl in den Boden eingeschlagen werden kann, eventuell aber durch Widerhaken das Ausreißen verhindert.

Die Industrie sollte in der Lage sein, entsprechende leichte Grenzmarken, die in Sumpf- und Berggebieten große Vorteile hätten, herzustellen.

Zur Flächenverzerrung der Kugelprojektion

J. Bolliger, Ingenieur-Kartograph, Liebefeld-Bern

In der «Schweizerischen Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie» wurde im Jahrgang 1964 im Artikel «Die Gesamtflächenverzerrung» bei der Behandlung der Flächenverzerrung der Kugelprojektion die Ableitung der Rechenformel weggelassen. Einem damals geäußerten Wunsch nachkommend, soll dies hiermit nachgeholt werden.

Wie bei der Übertragung vom Ellipsoid auf die Kugel die Längenverzerrung sehr klein ist, so unbedeutend ist auch die Flächenverzerrung dieser Projektion und gibt nur bei großen Flächen einen in die Quadratmeter gehenden Anteil. Für die Ableitung dieser Verzerrung sei auf dem Ellipsoid eine Elementarstrecke mit dS und eine Elementarfläche mit dF bezeichnet und auf der Kugel entsprechend mit ds und df. Das elementare Verzerrungsverhältnis lautet:

$$\ln \frac{ds}{dS} = \ln m = - A_3 \varphi^3 - A_4 \varphi^4$$

Mit der Reihe für $\ln m = -z - \ldots$ erhalten wir das Verzerrungsverhältnis:

$$\frac{ds}{dS} = 1 - A_3 \varphi^3 - A_4 \varphi^4$$

Diese Gleichung quadriert mit Gliedern bis zur 4. Ordnung führt zum Flächenverzerrungsverhältnis:

$$\frac{df}{dF} = \frac{ds^2}{dS^2} = 1 - 2 A_3 \varphi^3 - 2 A_4 \varphi^4 + \ldots \qquad (1)$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit dF und bilden die Differenz $df - dF$, womit wir die Flächenverzerrung erhalten zu:

$$\Delta df = df - dF = - dF\,(2\,A_3\,\varphi^3 + 2\,A_4\,\varphi^4) \qquad (2)$$

Nun ersetzen wir $\varphi = f(X, Y)$ nach der Doppelübertragungsgleichung mit Gliedern bis zur 4. Ordnung und bezeichnen ihre Konstanten mit a, b und c; damit finden wir die Potenzen von φ in (2) wie folgt:

$$\begin{aligned} \varphi &= a\,X - b\,Y^2 - c\,X^2 \\ \varphi^3 &= a^3\,X^3 - 3\,a^2\,b\,X^2\,Y^2 - 3\,a^2\,c\,X^4 \\ \varphi^4 &= a^4\,X^4 \end{aligned}$$

Das Flächenelement dF in (2) können wir mit genügender Genauigkeit durch ein elementares Koordinatenfeld $dF_c' = dY \cdot dX$ in der Projektionsebene ersetzen. Damit finden wir mit (2):

$$\Delta df = dY \cdot dX\,[- 2\,A_3\,a^3\,X^3 + 6\,A_3\,a^2\,b\,X^2\,Y^2 - (2\,A_4\,a^4 - 6\,A_3\,a^2\,c)X^4]$$

Zur Vereinfachung der Schreibweise bezeichnen wir die Konstanten dieser Gleichung mit:

$$2\,A_3\,a^3 = K_1 \qquad 6\,A_3\,a^2\,b = K_2 \qquad 2\,A_4\,a^4 - 6\,A_3\,a^2\,c = K_3 \qquad (3)$$

Damit lautet unsere Gleichung:

$$\Delta df = dY \cdot dX\,[- K_1\,X^3 + K_2\,X^2\,Y^2 + K_3\,X^4]$$

Diese Gleichung integrieren wir in den Grenzen eines beliebig großen Koordinatenfeldes $F_c' = (Y_2 - Y_1) \cdot (X_2 - X_1)$ wie folgt:

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon F_c' = f - F = & - K_1 \int_{Y_1}^{Y_2} dY \cdot \int_{X_1}^{X_2} X^3\,dX + K_2 \int_{Y_1}^{Y_2} Y^2\,dY \cdot \int_{X_1}^{X_2} X^2\,dX + \\ & + K_3 \int_{Y_1}^{Y_2} dY \cdot \int_{X_1}^{X_2} X^4\,dX = - \frac{K_1}{4} (Y_2 - Y_1)\,(X_2^4 - X_1^4) + \\ & + \frac{K_2}{9} (Y_2^3 - Y_1^3)\,(X^3_2 - X^3\,) - \frac{K_3}{5} (Y_2 - Y_1)\,(X_2^5 - X_1^5) \end{aligned} \qquad (4)$$

Beim ersten Glied in (4) führen wir das Koordinatenfeld $F_c' = (Y_2 - Y_1)\,(X_2 - X_1)$ ein und erhalten:

$$\Delta_\varepsilon F_c' = - F_c' \frac{K_1}{4} \frac{X_2^4 - X_1^4}{X_2 - X_1} + \ldots$$

Die Division durch $X_2 - X_1$ führen wir aus und setzen dann die Mittelkoordinate $X_c = \frac{1}{2}\,(X_2 + X_1)$ ein, womit wir die folgende Schlußgleichung der Verzerrung erhalten:

$$\begin{aligned} \Delta_\varepsilon F_c' = & - F_c'\,K_1\,X_c^3 - F_c' \frac{K_1}{4} X_c\,(X_2 - X_1)^2 + \\ & + \frac{K_2}{9} (Y_2^3 - Y_1^3)\,(X_2^3 - X_1^3) - \frac{K}{5} (Y_2 - Y_1)\,(X_2^5 - X_1^5) \end{aligned} \qquad (5)$$

Die auf der ersten Zeile stehenden beiden Glieder sind in der 3. Ordnung der Koordinaten und überragen im absoluten Wert die folgenden Glieder. Sie bestimmen daher mit X_c das Vorzeichen der Verzerrung, die nördlich der Y-Achse negativ, also verkleinernd, und südlich positiv ist.

Führt man in (5) bei den letzten Gliedern ebenfalls die Fläche F_c' ein, so entsteht damit eine um 5 Glieder vergrößerte Rechenformel, weshalb darauf verzichtet wurde. Immerhin diente diese Einführung zur Abklärung der Vorzeichen. Alle 7 Glieder sind positiv und die Koordinaten von der 4. Ordnung. Für X_c und Y_c und die Koordinatendifferenzen kommen nur gerade Potenzen vor. Die Reihenfolge der Koordinaten und die Lage von X_c haben also keinen Einfluß auf die Vorzeichen, die in (5) für die Glieder 6. Ordnung demnach absolut sind.

Die konstanten Koeffizienten die zum Rechnen mit (5) einzusetzen sind, haben folgende Grundwerte, mit denen die Größen K_1, K_2 und K_3 in (3) gebildet werden:

Aus dem Verzerrungsverhältnis

$$A_3 = \frac{2\,e'^2 \sin B_0 \cos B_0}{3\,V_0^4\,\varrho^3} \qquad A_4 = \frac{e'^2 \cos^2 B_0}{6\,V_0^6\,\varrho^4}(1 + 12\,e' - 11\,e'^2 \cos^2 B_0)$$

$$\lg A_3 = 1{,}403\,198\text{-}20 \qquad \lg A_4 = 5{,}47535\text{-}30$$

Aus der Übertragungsgleichung $\varphi = f(X, Y)$ ist

$$a = \frac{V_0}{R}\,\varrho'' \qquad \lg a = 1{,}510\,3639 \qquad (R \text{ in km})$$

$$b = \frac{V_0\,t}{2\,R^2}\,\varrho'' \qquad \lg b = 4{,}433\,536\text{-}10$$

$$c = \frac{3\,e'^2}{2\,R^2}\,\varrho'' \sin B_0 \cos B_0 \qquad \lg c = 2{,}406\,316\text{-}10$$

In diesen Bezeichnungen bedeuten, auf das Projektionszentrum bezogen:

B_0 = Ellipsoidbreite $\qquad V_0^2 = 1 + e'^2 \cos^2 B_0$

b_0 = Kugelbreite $\qquad t = \operatorname{tg} b_0$

Mit diesen Grundwerten erhalten wir nach (3) die folgenden Konstanten für (5):

$$K_1 = \frac{4\,e'^2 \sin B_0 \cos B_0}{3\,V_0\,R^3} \qquad K_2 = \frac{2\,t\,e'^2}{3\,\delta\,V_0\,R^4} \sin B_0 \cos B_0 \qquad \lg \frac{K_2}{9} = 7{,}6814\text{-}20$$

$$\lg K_1 = 2{,}23532\text{-}10 \qquad K_3 = \frac{e'^2 \cos^2 B_0}{3\,V_0^2\,R^4}(1 - 6\,e'^2 + 7\,e'^2 \cos^2 B_0)$$

$$\lg \frac{K_1}{4} = 1{,}63326\text{-}10 \qquad \lg \frac{K_3}{5} = 7{,}0912\text{-}20$$