Détermination par voie de nivellement trigonométrique de déviations de la verticale

Literaturhinweise

[1] *L. Lichtenstein:* Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Berlin 1933.

[2] *U. Crudeli:* Su la velocità angolare dei fluidi eterogenei, rotanti, limitati da figura di equilibrio. Atti della Accademia dei Lincei *19*, 1910, 2, S. 41–43.

[3] *H. Bruns:* Die Figur der Erde. Berlin 1878.

[4] *K. Ledersteger:* Zur Frage des Dichtegesetzes der einparametrigen heterogenen Gleichgewichtsfiguren, Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1960, Nr. 4.

[5] *R. Wavre:* Figures planétaires et géodésie. Paris 1932.

Détermination par voie de nivellement trigonométrique de déviations de la verticale

*par A. Ansermet**

Résumé

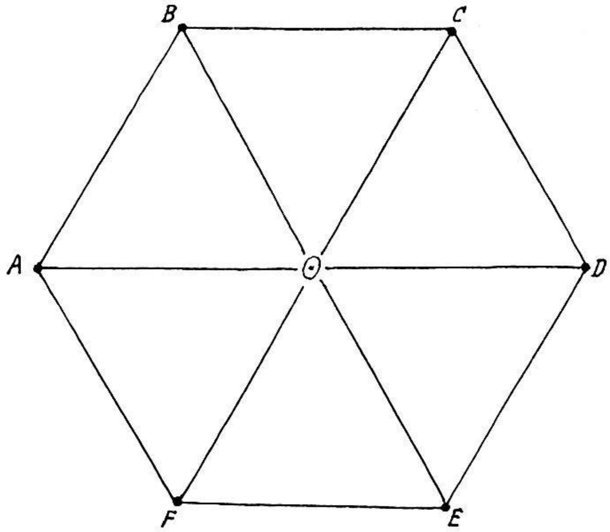
Le problème abordé ici fut déjà traité magistralement notamment par la Commission géodésique (voir [1]). Certaines simplifications sont envisagées quant à la compensation; si le massif montagneux est fort éloigné de l'équateur, le praticien pourra se borner à effectuer le calcul sur une sphère en choisissant un équateur fictif. Les déviations ξ, η étant déjà de petites quantités, il n'est pas nécessaire de déterminer des valeurs provisoires comme le font certains auteurs; quant aux altitudes provisoires, elles sont arbitraires entre certaines limites. Il est inutile de pousser la précision notamment pour le calcul des coefficients des équations initiales; pour ces éléments le rôle de la surface de référence (sphère, ellipsoïde, géoïde) importe peu car la présente publication porte surtout sur la détermination de poids. Des groupes d'inconnues peuvent être éliminés. A certains égards des visées réciproques et simultanées sont désirables (voir [3]). Quant à la réfraction, c'est toujours un élément un peu critique; comme le fait remarquer P. Engi, ce problème fut déjà abondamment traité.

Le problème traité ici, surtout en vue d'applications, suscita déjà des publications importantes; citons celles, magistrales, de la Commission géodésique suisse (voir [1]). Si le réseau est peu étendu, des simplifications sont à envisager; les lignes qui suivent portent sur la compensation proprement dite, le réseau comprenant six points nouveaux, 18 ou 19 inconnues, 12 côtés, 24 visées, donc 24 équations initiales. Il n'y a pas de visées réciproques et simultanées, ce qui causerait des complications.

Les éléments connus sont l'altitude H_0 du centre O, laquelle est arbitraire pour la compensation, puis les composantes mutuellement rectangulaires ξ_0, η_0 de la déviation de la verticale en O; théoriquement leur

* Rédigé en hommage à notre Rédacteur en chef, M. le Prof. Dr F. Kobold, à l'occasion de son 60e anniversaire.

orientation est aussi arbitraire. Certains auteurs font intervenir la résultante $\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$ et l'azimut de ξ_0 ou η_0 ou plutôt celui de la résultante. Ce sont les composantes suivant les visées qui importent. Les mêmes considérations sont valables pour les déviations encore à déterminer.



Toujours pour la compensation on pourra en général effectuer le calcul sur une sphère de référence ([2], p. 232); de plus si le réseau est fort éloigné de l'équateur on aura recours de préférence à un équateur et à un méridien central fictifs issus du point central O dans notre cas. Les écarts du géoïde par rapport à la sphère feront éventuellement l'objet de corrections indépendamment de la compensation; c'est un calcul géodésique connu.

Les inconnues sont les corrections δH_A, δH_B ... δH_F à apporter à des valeurs provisoires des altitudes puis les paires de composantes ξ_A, η_A, ξ_B, η_B ... L'élément réfraction pourrait donner lieu à une 19e inconnue; dans le cas présent une élimination préalable pourrait être envisagée, mais il y a d'autres solutions (voir [3]). Il suffira, pour la compensation, de calculer les coefficients des inconnues à $^1/_{1000}$ près et les termes absolus à $^1/_{1500}$ près, ce qui permet d'arrondir certains éléments linéaires et angulaires. L'équation aux erreurs, pour la visée AB par exemple, aura la forme linéaire:

$$v_1 = F_1\,(\delta H_A,\ \delta H_B,\ \xi_A,\ \eta_A) + f_1 \qquad (f_1 = \text{terme absolu, poids } p_1) \qquad (1)$$

Il faut en principe distinguer deux formes quant aux dimensions: les v sont exprimés en secondes, comme le fait judicieusement la Commission géodésique, ou en centimètres; le facteur de conversion est $\varrho \frac{\cos^2 \beta}{D_z}$ ou son inverse $D_z/\varrho \cdot \cos^2 \beta$. L'angle vertical mesuré est β tandis que D_z est la distance déduite de la formule dite de Wild-Baeschlin ([2], p. 228);

les secondes sont ici centésimales. Le facteur de conversion intervient aussi pour les poids quand les dimensions changent pour v:

$$\frac{\text{const.}}{p_i} = \left(\varrho\frac{\cos^2\beta}{D_z}\right)^2 \frac{1}{p_i'} \qquad \text{([3], p. 242)}$$

les p_i concernant les mesures angulaires et p_i' les linéaires.

Numériquement on aura même: $p_i = p_i'$ (dimensions différentes); dans l'hypothèse valable ici: $0{,}999 < \left(\varrho\frac{\cos^2\beta}{D_z}\right) < 1{,}001$ ($D_z \cong 6366$ m).

Eléments provisoires. Le calcul est simple pour ce petit réseau; il suffit de considérer les six visées issues de O en tenant compte de la paire de composantes ξ_0, η_0.

Réfraction. On fait abstraction ici de l'inconnue δK à apporter, comme correction, à la valeur provisoire du coefficient K_0. Une solution consisterait à réaliser, pour le coefficient de δK dans le système d'équations, une valeur pratiquement constante. En formant des équations aux erreurs réduites, ce δK serait éliminé au préalable.

Termes absolus f_i. Pour former ces 24 termes, on possède les éléments nécessaires; les ξ_0, η_0 interviennent pour six termes. Certains auteurs préconisent une première compensation aboutissant à une solution provisoire; c'est superflu car les valeurs provisoires sont arbitraires entre certaines limites. Quant aux ξ, η, ce sont initialement de petites quantités qu'il est inutile de fractionner en général.

En définitive on aura pour le réseau $OAB \dots F$, et sous forme générale, 24 équations:

$$-v + \cos\alpha\cdot\xi_s + \sin\alpha\cdot\eta_s + 1\,(\delta H_s - \delta H_z) + f = 0 \qquad (p = 1), \qquad (2)$$

α étant arbitraire, car cet azimut est compté à partir de méridiens fictifs, à moins que le réseau, par sa situation, se prête à l'emploi du vrai méridien; les indices s et z se rapportent respectivement aux points de stationnement et de visée. Le coefficient 1 a une dimension mais, numériquement, le calcul est facilité puisque le facteur de conversion (secondes-centimètres et inversement) est égal à l'unité. Grâce à l'emploi des calculatrices modernes, on pourrait effectuer, dans le système d'équations (2), des éliminations par groupes d'inconnues, successivement les six éléments δH puis les six paires ξ, η, d'où les systèmes toujours linéaires:

$$\psi_i\,(v_1, v_2, v_3 \dots \xi_A, \eta_A, \xi_B, \eta_B \dots) = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \dots 18 \qquad (3)$$

$$\psi_i\,(v_1, v_2, v_3 \dots \delta H_A, \delta H_B \dots) = 0 \qquad i = 1, 2, 3 \dots 12 \qquad (4)$$

Pratiquement les six paires de composantes ne présentent pas toujours de l'intérêt; implicitement il en a été tenu compte pour la détermination des δH. Dans le cas concret traité ici les ξ, η ne furent pas éliminés; les calculs de précision (poids) porteront sur les binômes ($\cos\alpha\cdot\xi_s + \sin\alpha\;\eta_s$), donc sur les déviations dans les plans de visées, ce qui présente le plus d'intérêt.

Equations aux erreurs v. Le tableau ci-après fournit les coefficients des 18 inconnues; les 24 poids sont égaux. Quant aux termes absolus, leur formation est basée sur la solution provisoire; la conversion de valeurs linéaires en valeurs angulaires et réciproquement a déjà été exposée. Ces termes f_i tiennent compte, par hypothèse, de la réfraction pour éviter une 19e inconnue (voir [1], [3], p. 239–242).

Visées	δH_A	δH_B	δH_C	δH_D	δH_E	δH_F	ξ_A	η_A	ξ_B	η_B	ξ_C	η_C	ξ_D	η_D	ξ_E	η_E	ξ_F	η_F	*Visées*
AB	+1	−1					+0,866	+0,50											*AB*
BA	−1	+1							−0,866	−0,50									*BA*
BC		+1	−1						0,00	+1,00									*BC*
CB		−1	+1								0,00	−1,00							*CB*
CD			+1	−1							−0,866	+0,50							*CD*
DC			−1	+1									+0,866	−0,50					*DC*
DE				+1	−1								−0,866	−0,50					*DE*
ED				−1	+1										+0,866	+0,50			*ED*
EF					+1	−1									0,00	−1,00			*EF*
FE					−1	+1											0,00	+1,00	*FE*
FA	−1					+1											+0,866	−0,50	*FA*
AF	+1					−1	−0,866	+0,50											*AF*
OA	−1																		*OA*
AO	+1						0,00	+1,00											*AO*
OB		−1																	*OB*
BO		+1							−0,866	+0,50									*BO*
OC			−1																*OC*
CO			+1								−0,866	−0,50							*CO*
OD				−1															*OD*
DO				+1									0,00	−1,00					*DO*
OE					−1														*OE*
EO					+1										+0,866	−0,50			*EO*
OF						−1													*OF*
FO						+1											+0,866	+0,50	*FO*

Matrice des coefficients des équations normales

δH_A	δH_B	δH_C	δH_D	δH_E	δH_F	ξ_A	η_A	ξ_B	η_B	ξ_C	η_C	ξ_D	η_D	ξ_E	η_E	ξ_F	η_F
6	−2	0	0	0	−2	0	+2	+0,866	+0,5	0	0	0	0	0	0	−0,866	+0,5
	6	−2	0	0	0	−0,866	−0,5	−1,732	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0
		6	−2	0	0	0	0	0	−1	−1,732	−1	−0,866	+0,50	0	0	0	0
			6	−2	0	0	0	0	0	+0,866	−0,5	0	−2	−0,866	−0,5	0	0
				6	−2	0	0	0	0	0	0	+0,866	+0,5	+1,732	−1	0	−1
					6	+0,866	−0,5	0	0	0	0	0	0	0	+1	+1,732	+1
						1,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
							1,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
								1,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
									1,5	0	0	0	0	0	0	0	0
										1,5	0	0	0	0	0	0	0
											1,5	0	0	0	0	0	0
												1,5	0	0	0	0	0
													1,5	0	0	0	0
														1,5	0	0	0
															1,5	0	0
																1,5	0
																	1,5

Equations normales. Elles sont au nombre de 18 et ne donnent pas lieu à des remarques particulières; la matrice symétrique ci-contre est celle des coefficients, et il n'y pas paru nécessaire de transcrire les éléments non diagonaux de part et d'autre de la diagonale. Les signes des éléments diagonaux sont connus à priori; quant aux termes absolus, on pourrait les former en fonction des *f*, donc sans aucune difficulté.

Matrice aux coefficients de poids des inconnues

(Calcul par le Centre de calcul électronique, EPUL) (inverse de la précédente)

0,643	+0,179	−0,071	−0,107	−0,071	+0,179	0,000	−0,738	−0,165	−0,381	−0,021	−0,202	0,000	−0,095	+0,021	−0,202	+0,165	−0,381
δH_A	0,643	+0,179	−0,071	−0,107	−0,071	+0,412	−0,048	+0,639	−0,369	+0,247	−0,333	+0,165	−0,119	+0,082	−0,048	+0,186	−0,083
	δH_B	0,643	+0,179	−0,071	−0,107	+0,165	+0,119	+0,247	+0,333	+0,639	+0,369	−0,412	+0,048	+0,186	+0,083	+0,082	+0,048
		δH_C	0,643	+0,179	−0,071	0,000	−0,095	−0,021	+0,202	−0,165	+0,381	0,000	+0,738	+0,165	+0,381	+0,021	+0,202
			δH_D	0,643	+0,179	−0,165	+0,119	−0,082	+0,048	−0,186	+0,083	−0,412	+0,048	−0,639	+0,369	−0,247	+0,333
				δH_E	0,643	−0,412	−0,048	−0,186	−0,083	−0,082	−0,048	−0,165	−0,119	−0,248	−0,333	−0,639	−0,369
					δH_F	1,143	0,000	+0,476	−0,165	+0,190	−0,165	+0,190	0,000	+0,190	+0,165	+0,476	+0,165
						ξ_A	1,619	+0,371	+0,357	+0,082	+0,143	0,000	+0,048	−0,082	+0,143	−0,371	+0,357
							η_A	1,500	−0,206	+0,298	−0,268	+0,190	−0,082	+0,083	+0,062	+0,119	+0,124
								ξ_B	1,262	+0,268	+0,536	+0,165	+0,143	+0,062	+0,155	−0,124	+0,214
									η_B	1,500	+0,206	+0,476	−0,371	+0,119	−0,124	+0,083	−0,062
										ξ_C	1,262	+0,165	+0,357	+0,124	+0,214	−0,062	+0,155
											η_C	1,143	0,000	+0,476	−0,165	+0,190	−0,165
												ξ_D	1,619	+0,371	+0,357	+0,082	+0,143
													η_D	1,500	−0,206	+0,297	−0,268
														ξ_E	1,262	+0,268	+0,536
															η_E	1,500	+0,206
																ξ_F	1,262
																	η_F

Compensation et calculs de précision. Admettons par hypothèse la valeur numérique: $m_0^2 \cong [pvv]:6 = 1$. Les erreurs moyennes quadratiques des inconnues ou de fonctions de celles-ci sont obtenues en fonction des éléments fournis par la matrice inverse de la première. Les deux sont symétriques et les coefficients de poids (quadratiques) des inconnues sont les éléments diagonaux de la seconde.

Poids des binômes $(\cos\alpha\, \xi_s + \sin\alpha\, \eta_s)$. Ces binômes expriment les composantes des déviations dans les plans de visées respectifs. Les poids des ξ, η, considérés individuellement, présentent peu d'intérêt puisque l'orientation de ces composantes est arbitraire.

Visée AB: $\frac{1}{P} = \overline{0{,}866}^2 \times 1{,}14 + \overline{0{,}50}^2 \times 1{,}62 = 1{,}26 \qquad P = 0{,}79$

Visée BA: $\frac{1}{P} = \overline{0{,}866}^2 \times 1{,}50 + \overline{0{,}50}^2 \times 1{,}26 - 2 \times 0{,}866 \times 0{,}50 \times 0{,}206 = 1{,}26$

Valeur commune pour la périphérie *AB ... F*

Visée BO: $\frac{1}{P'} = \overline{0{,}866}^2 \times 1{,}50 + \overline{0{,}50}^2 \times 1{,}26 + 2 \times 0{,}866 \times 0{,}50 \times 0{,}206 = 1{,}62$

Valeur commune $P' = 0{,}62$ pour *AO, BO, ... FO*

Poids de $(\delta H_A - \delta H_B)$, $(\delta H_B - \delta H_C)$ ... $\frac{1}{P''} = 0{,}643 + 0{,}643 - 2 \times 0{,}179 = 0{,}93$ valeur commune $P'' = 1{,}075$ pour les six binômes; pouvait se présumer. On pourrait poursuivre pour d'autres fonctions des inconnues. En général les composantes des déviations sont déterminées de façon moins précise que les δH.

Littérature

[1] *F. Kobold* und *N. Wunderlin,* Die Bestimmung von Lotabweichungen ... (Commission géodésique suisse, 1963).

[2] *P. Engi,* Zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge (Festschrift C. F. Baeschlin, 1951).

[3] *H. Wolf,* Ausgleichungsrechnung, Lieferung 6/5 (Hamburg).

[4] *A. Ansermet,* Quelques aspects des calculs altimétriques (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1964).