Zur Fehlerrechnung bei geringer Anzahl von Beobachtungen

Autor(en): **Matthias, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **55 (1957)**

Heft 10

PDF erstellt am: **04.05.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-213594

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

Zur Fehlerrechnung bei geringer Anzahl von Beobachtungen

Von dipl. Ing. H. Matthias

Die einfachsten Anwendungen der Fehlerrechnung in der Vermessungskunde haben den Zweck, den wahrscheinlichsten Wert der Beobachtungen sowie die mittleren Fehler an der Einzelmessung und am wahrscheinlichsten Wert zu ermitteln.

Die unter bestimmten Verhältnissen und mit bestimmten Instrumenten erreichten mittleren Fehler dienen oft als Grundlage für die Beurteilung von Beobachtungsverfahren und für die Abschätzung der zu befürchtenden mittleren Fehler an Funktionen der Beobachtungen. Dabei wird leicht vergessen, daß meistens die Anzahl der Messungen zu gering ist, als daß man die Fehlermasse korrekt ermitteln könnte.

Im Folgenden soll ein knapper Überblick über die Zuverlässigkeit der Fehlerbetrachtungen beim Vorliegen nur weniger Messungen gegeben werden. Auf die Wiedergabe der mathematischen Herleitungen wird verzichtet. Sie sind in den am Schluß angegebenen Abhandlungen über Statistik enthalten. Dem Praktiker dürften die hier mitgeteilten Ergebnisse und die Figuren mit den ausführlichen Tabellen das Notwendige zur Beurteilung seiner Beobachtungen vermitteln.

Den Betrachtungen liegt die Annahme zufälliger Fehler zugrunde, deren Häufigkeitsverteilung durch das Gaußsche Fehlergesetz erfaßt wird. Als Grundlage dient Tabelle 1. Sie stellt den Fall dar, wie er in der Praxis in der Regel vorkommt: Von den praktisch unendlich vielen möglichen Einzelbeobachtungen l der Kolonne 1 wird nur eine Stichprobe i der Kolonne 4 beobachtet, und es werden daraus das Stichprobenmittel S_i und der mittlere Fehler m_i berechnet.

A. Die Verteilung der Einzelbeobachtungen

Ist die Anzahl ν der Beobachtungen l sehr groß, so kann ihr Mittelwert L praktisch als der wahre Wert betrachtet werden.

$$L = \frac{[l]_1^{\nu}}{\nu}$$

Die Größen $(L - l)$ entsprechen demnach wahren Fehlern; wir bezeichnen die gemäß Definition für den mittleren Fehler gerechnete Größe

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[(L - l)^2]_1^{\nu}}{\nu}}$$

als den tatsächlichen mittleren Fehler einer Beobachtung.

Die Beobachtungen l verteilen sich um den Mittelwert L nach dem

1	2	3	4	5	6
mögliche Beobachtungen l Anzahl ν prakt. $\sim \infty$	Mittelwert L	tatsächlicher mittlerer Fehler μ an l	mögliche Stichproben zu je n Werten Anzahl N prakt. $\sim \infty$	Stichprobenmittel S	mittlerer Fehler m gerechnet aus Stichproben
l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6 l_7 . . .			l_1 l_2 l_3 ⋮ l_n	$S_1 = \frac{[l]_1^n}{n}$	$m_1 = \pm\sqrt{\frac{[(S_1-l)^2]}{n-1}}$
			l_{n+1} l_{n+2} l_{n+3} ⋮ l_{2n}	$S_2 = \frac{[l]_{n+1}^{2n}}{n}$	$m_2 = \pm\sqrt{\frac{[(S_2-l)^2]}{n-1}}$
			l_{2n+1} l_{2n+2} l_{2n+3} ⋮ l_{3n}	$S_3 = \frac{[l]_{2n+1}^{3n}}{n}$	$m_3 = \pm\sqrt{\frac{[(S_3-l)^2]}{n-1}}$
. . $l_{\nu-2}$ $l_{\nu-1}$ l_ν	$L = \frac{[l]_1^\nu}{\nu}$	$\mu = \pm\sqrt{\frac{[(L-l)^2]}{\nu}}$	$l_{\nu-(n-1)}$ $l_{\nu-(n-2)}$ $l_{\nu-(n-3)}$ ⋮ l_ν	$S_N = \frac{[l]_{\nu-n-1}^{\nu}}{n}$	$m_N = \pm\sqrt{\frac{[(S_N-l)^2]}{n-1}}$

Tab. 1

Gaußschen Fehlergesetz; sie bilden eine Normalverteilung, deren Verlauf durch die Häufigkeitsfunktion

$$\varphi(l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \mu}} e^{-\frac{(L-l)^2}{2\mu^2}}$$

gegeben ist.

Der wahrscheinlichste Wert der Einzelbeobachtungen l ist durch die Abszisse des Maximalwertes der Häufigkeitsfunktion bestimmt. Die Normalverteilung ist symmetrisch; es fallen wahrer Wert, wahrscheinlichster Wert und Mittelwert zusammen.

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Beobachtung innerhalb der durch den tatsächlichen mittleren Fehlern μ bestimmten Grenzen $(L \pm \mu)$ ist

$$W(L \pm \mu) = \int_{L-\mu}^{L+\mu} \varphi(l)\, dl = 0.68$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Beobachtung innerhalb der durch den tatsächlichen Maximalfehler $3 \cdot \mu$ bestimmten Grenzen $(L \pm 3\mu)$ ist

$$W(L \pm 3\mu) = \int_{L-3\mu}^{L+3\mu} \varphi(l)\, dl = 0.997$$

Zur Veranschaulichung der Verhältnisse dient Figur 1. Sie zeigt den Verlauf der Häufigkeitsfunktion $\varphi(l)$ einer Beobachtungsreihe l, für die der Mittelwert $L = 0$ und der tatsächliche mittlere Fehler $\mu = \pm 1.0$ ist. Tabelle 2 gibt für verschiedene Werte von l die Funktionswerte $\varphi(l)$ und die für die betreffenden Grenzen gültigen Wahrscheinlichkeiten $W(L \pm l)$. Die wichtigsten Werte sind dabei unterstrichen.

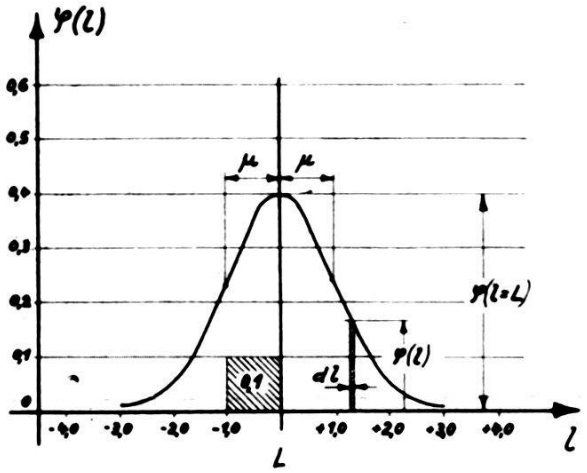

Fig. 1

Beispiel einer Normalverteilung für $\mu = \pm 1{,}0$; $L = 0$

l	0	±0,5	±1,0	±1,5	±2,0	±2,5	±3,0	±3,5	±4,
$\varphi(l)$	0,40	0,35	0,24	0,13	0,05	0,02	~0	~0	~
$W(L \pm l)$%	0	38,3	68,3	86,6	95,4	98,8	99,7	~100	~

Tab. 2

B. Die Verteilung der Stichprobenmittel

Ist die Anzahl ν aller Beobachtungen l sehr groß, so wird auch die Anzahl N der Stichprobenmittel S sehr groß, und es kann auch deren Mittelwert

$$L = \frac{[S]_1^N}{N} = \frac{[l]_1^\nu}{\nu}$$

als der wahre Wert betrachtet werden.

Da demgemäß auch die Größen $(L - S)$ wahre Fehler darstellen, ergibt sich der tatsächliche mittlere Fehler μ_s eines Stichprobenmittels zu

$$\mu_s = \pm \sqrt{\frac{[(L - S)^2]_1^N}{N}} = \frac{\mu}{\sqrt{n}}$$

Auch die Stichprobenmittel S bilden um den Mittelwert L eine Normalverteilung, deren Verlauf durch die Häufigkeitsfunktion

$$\varphi(S) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi\mu}} \cdot e^{-\frac{(L-S)^2 \cdot n}{2\mu^2}}$$

gegeben ist.

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Stichprobenmittels innerhalb der durch den tatsächlichen mittleren Fehler μ_s bestimmten Grenzen $\left(L \pm \frac{\mu}{\sqrt{n}}\right)$ ist

$$W\left(L \pm \frac{\mu}{\sqrt{n}}\right) = \int_{L - \frac{\mu}{\sqrt{n}}}^{L + \frac{\mu}{\sqrt{n}}} \varphi(S)\, dS = 0.68$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Stichprobenmittels innerhalb der durch den tatsächlichen Maximalfehler $3 \cdot \mu_s$ bestimmten Grenzen $\left(L \pm 3\frac{\mu}{\sqrt{n}}\right)$ ist

$$W\left(L \pm 3\frac{\mu}{\sqrt{n}}\right) = \int_{L - 3\frac{\mu}{\sqrt{n}}}^{L + 3\frac{\mu}{\sqrt{n}}} \varphi(S)\, dS = 0.997$$

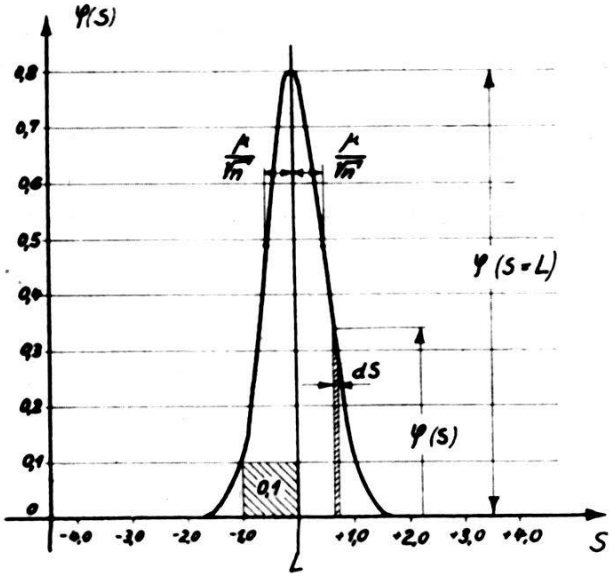

Fig. 2

Beispiel einer Verteilung der Stichprobenmittel für
$\mu = \pm 1{,}0$; $L = 0$; $n = 4$

S	0	±0,5	±1,0	±1,5	±2,0	±2,5	±3,0
φ(S)	0,80	0,48	0,11	0,01	~0	~0	~0
W(L±S)%	0	68,3	95,4	99,7	~100	~100	~100

Tab. 3

Figur 2 und Tabelle 3 geben als Beispiel den Verlauf der Häufigkeitsfunktion φ (S) für dieselbe Beobachtungsreihe l der Figur 1, wenn die Anzahl von $n = 4$ Einzelbeobachtungen zu einer Stichprobe zusammengefaßt werden.

C. Die Verteilung der aus den Stichproben gerechneten mittleren Fehler m

Die gemäß Tabelle 1, Kolonne 6, aus den wahrscheinlichsten Fehlern (S—l) gerechneten mittleren Fehlern m einer Einzelbeobachtung l streuen um ihren tatsächlichen Wert μ. Diese Verteilung ist jedoch keine Normalverteilung. Sie soll an Hand von Figur 3 und Tabelle 4 besprochen werden.

Es sind

n die Anzahl der Beobachtungen in einer Stichprobe und $v = \frac{m}{\mu}$ das Verhältnis des aus einer Stichprobe gerechneten mittleren Fehlers m zum tatsächlichen mittleren Fehler μ.

An Stelle der Verteilung der mittleren Fehler m direkt ist jene der Verhältniszahlen v dargestellt. Diese ist besonders anschaulich und gibt zudem die Möglichkeit, für solche Betrachtungen auch Beobachtungsreihen verschiedener Genauigkeit zusammenzufassen. Der Verlauf der Verteilungskurve ist abhängig von der Anzahl n der Beobachtungen in einer Stichprobe. Es ergibt sich also eine Schar von Verteilungskurven mit dem Scharparameter n. Sie ist durch die Häufigkeitsfunktion f (v) bestimmt.

$$f(v) = F_n \cdot e^{-\frac{n-1}{2} v^2} v^{n-2}$$

wo für gerades n $$F_n = \frac{2^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{\pi} \cdot (n-3)(n-5) \ldots . 3 \cdot 1}$$

und für ungerades n $$F_n = \frac{2 \left(\frac{n-1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}}{\left(\frac{n-3}{2}\right)!}$$

Die Verteilungskurven sind nicht symmetrisch; tatsächlicher Wert v_μ, häufigster Wert v_W und Mittelwert v_M fallen nicht zusammen. Der tatsächliche Wert v ist konstant. Es ist

$$v_\mu = \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{m}{\mu}\right)^2\right]_1^N}{N}} = 1.0$$

Daraus ergibt sich, daß der tatsächliche mittlere Fehler μ aus den Stichprobenwerten m nach

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[m^2]_1^N}{N}}$$

berechnet werden kann. (Schluß folgt.)

Über einen besonderen Fall der Kreisausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate

Von Dipl.-Ing. Christo Čapanov, Haskovo, Bulgarien

(Schluß)

Zahlenbeispiel:

Es ist der wahrscheinlichste Kreis zwischen den Punkten (Tafel 1) unter folgenden Bedingungen zu finden: der ausgeglichene Kreis muß

1. durch den Punkt M führen ($Xm \neq o$ $Ym \neq o$),
2. die Ordinatenachse $Y = t$ berühren.

I. Methode: *Ausgleichung nach Beobachtungen mit Unbekannten mit Bedingungsgleichungen zwischen den Unbekannten.*