

Détermination par voie de nivellement trigonométrique de déviations de la verticale

Autor(en): **Ansermet, A.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, Kulturtechnik und
Photogrammetrie = Revue technique suisse des mensurations, du
génie rural et de la photogrammétrie**

Band (Jahr): **63 (1965)**

Heft 9

PDF erstellt am: **21.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-220010>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrücke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

- [1] *L. Lichtenstein*: Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten. Berlin 1933.
- [2] *U. Crudeli*: Su la velocità angolare dei fluidi eterogenei, rotanti, limitati da figura di equilibrio. Atti della Accademia dei Lincei 19, 1910, 2, S. 41–43.
- [3] *H. Bruns*: Die Figur der Erde. Berlin 1878.
- [4] *K. Ledersteger*: Zur Frage des Dichtegesetzes der einparametrischen heterogenen Gleichgewichtsfiguren, Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1960, Nr. 4.
- [5] *R. Wavre*: Figures planétaires et géodésie. Paris 1932.

Détermination par voie de nivellement trigonométrique de déviations de la verticale

*par A. Ansermet**

Résumé

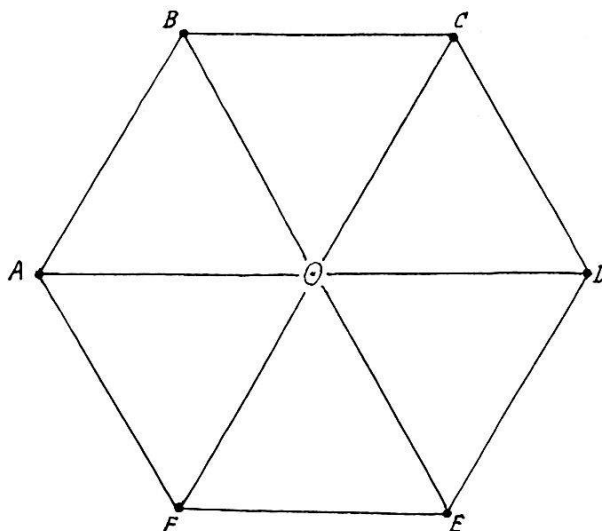
Le problème abordé ici fut déjà traité magistralement notamment par la Commission géodésique (voir [1]). Certaines simplifications sont envisagées quant à la compensation; si le massif montagneux est fort éloigné de l'équateur, le praticien pourra se borner à effectuer le calcul sur une sphère en choisissant un équateur fictif. Les déviations ξ , η étant déjà de petites quantités, il n'est pas nécessaire de déterminer des valeurs provisoires comme le font certains auteurs; quant aux altitudes provisoires, elles sont arbitraires entre certaines limites. Il est inutile de pousser la précision notamment pour le calcul des coefficients des équations initiales; pour ces éléments le rôle de la surface de référence (sphère, ellipsoïde, géoïde) importe peu car la présente publication porte surtout sur la détermination de poids. Des groupes d'inconnues peuvent être éliminés. A certains égards des visées réciproques et simultanées sont désirables (voir [3]). Quant à la réfraction, c'est toujours un élément un peu critique; comme le fait remarquer P. Engi, ce problème fut déjà abondamment traité.

Le problème traité ici, surtout en vue d'applications, suscita déjà des publications importantes; citons celles, magistrales, de la Commission géodésique suisse (voir [1]). Si le réseau est peu étendu, des simplifications sont à envisager; les lignes qui suivent portent sur la compensation proprement dite, le réseau comprenant six points nouveaux, 18 ou 19 inconnues, 12 côtés, 24 visées, donc 24 équations initiales. Il n'y a pas de visées réciproques et simultanées, ce qui causerait des complications.

Les éléments connus sont l'altitude H_0 du centre O , laquelle est arbitraire pour la compensation, puis les composantes mutuellement rectangulaires ξ_0 , η_0 de la déviation de la verticale en O ; théoriquement leur

* Rédigé en hommage à notre Rédacteur en chef, M. le Prof. Dr F. Kobold, à l'occasion de son 60^e anniversaire.

orientation est aussi arbitraire. Certains auteurs font intervenir la résultante $\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}$ et l'azimut de ξ_0 ou η_0 ou plutôt celui de la résultante. Ce sont les composantes suivant les visées qui importent. Les mêmes considérations sont valables pour les déviations encore à déterminer.



Toujours pour la compensation on pourra en général effectuer le calcul sur une sphère de référence ([2], p. 232); de plus si le réseau est fort éloigné de l'équateur on aura recours de préférence à un équateur et à un méridien central fictifs issus du point central O dans notre cas. Les écarts du géoïde par rapport à la sphère feront éventuellement l'objet de corrections indépendamment de la compensation; c'est un calcul géodésique connu.

Les inconnues sont les corrections $\delta H_A, \delta H_B \dots \delta H_F$ à apporter à des valeurs provisoires des altitudes puis les paires de composantes $\xi_A, \eta_A, \xi_B, \eta_B \dots$. L'élément réfraction pourrait donner lieu à une 19^e inconnue; dans le cas présent une élimination préalable pourrait être envisagée, mais il y a d'autres solutions (voir [3]). Il suffira, pour la compensation, de calculer les coefficients des inconnues à $1/1000$ près et les termes absolus à $1/1500$ près, ce qui permet d'arrondir certains éléments linéaires et angulaires. L'équation aux erreurs, pour la visée AB par exemple, aura la forme linéaire:

$$v_1 = F_1 (\delta H_A, \delta H_B, \xi_A, \eta_A) + f_1 \quad (f_1 = \text{terme absolu, poids } p_1) \quad (1)$$

Il faut en principe distinguer deux formes quant aux dimensions: les v sont exprimés en secondes, comme le fait judicieusement la Commission géodésique, ou en centimètres; le facteur de conversion est $\rho \frac{\cos^2 \beta}{D_z}$ ou son inverse $D_z / \rho \cdot \cos^2 \beta$. L'angle vertical mesuré est β tandis que D_z est la distance déduite de la formule dite de Wild-Baeschlin ([2], p. 228);

les secondes sont ici centésimales. Le facteur de conversion intervient aussi pour les poids quand les dimensions changent pour v :

$$\frac{\text{const.}}{p_i} = \left(\varrho \frac{\cos^2 \beta}{D_z} \right)^2 \frac{1}{p_i'} \quad ([3], \text{ p. 242})$$

les p_i concernant les mesures angulaires et p_i' les linéaires.

Numériquement on aura même: $p_i = p_i'$ (dimensions différentes); dans l'hypothèse valable ici: $0,999 < \left(\varrho \frac{\cos^2 \beta}{D_z} \right) < 1,001$ ($D_z \cong 6366$ m).

Eléments provisoires. Le calcul est simple pour ce petit réseau; il suffit de considérer les six visées issues de O en tenant compte de la paire de composantes ξ_0, η_0 .

Réfraction. On fait abstraction ici de l'inconnue δK à apporter, comme correction, à la valeur provisoire du coefficient K_0 . Une solution consisterait à réaliser, pour le coefficient de δK dans le système d'équations, une valeur pratiquement constante. En formant des équations aux erreurs réduites, ce δK serait éliminé au préalable.

Termes absolus f_i . Pour former ces 24 termes, on possède les éléments nécessaires; les ξ_0, η_0 interviennent pour six termes. Certains auteurs préconisent une première compensation aboutissant à une solution provisoire; c'est superflu car les valeurs provisoires sont arbitraires entre certaines limites. Quant aux ξ, η , ce sont initialement de petites quantités qu'il est inutile de fractionner en général.

En définitive on aura pour le réseau $OAB \dots F$, et sous forme générale, 24 équations:

$$-v + \cos \alpha \cdot \xi_s + \sin \alpha \cdot \eta_s + 1 (\delta H_s - \delta H_z) + f = 0 \quad (p = 1), \quad (2)$$

α étant arbitraire, car cet azimut est compté à partir de méridiens fictifs, à moins que le réseau, par sa situation, se prête à l'emploi du vrai méridien; les indices s et z se rapportent respectivement aux points de stationnement et de visée. Le coefficient 1 a une dimension mais, numériquement, le calcul est facilité puisque le facteur de conversion (secondes-centimètres et inversement) est égal à l'unité. Grâce à l'emploi des calculatrices modernes, on pourrait effectuer, dans le système d'équations (2), des éliminations par groupes d'inconnues, successivement les six éléments δH puis les six paires ξ, η , d'où les systèmes toujours linéaires:

$$\psi_i (v_1, v_2, v_3 \dots \xi_A, \eta_A, \xi_B, \eta_B \dots) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \dots 18 \quad (3)$$

$$\psi_i (v_1, v_2, v_3 \dots \delta H_A, \delta H_B \dots) = 0 \quad i = 1, 2, 3 \dots 12 \quad (4)$$

Pratiquement les six paires de composantes ne présentent pas toujours de l'intérêt; implicitement il en a été tenu compte pour la détermination des δH . Dans le cas concret traité ici les ξ, η ne furent pas éliminés; les calculs de précision (poids) porteront sur les binômes ($\cos \alpha \cdot \xi_s + \sin \alpha \cdot \eta_s$), donc sur les déviations dans les plans de visées, ce qui présente le plus d'intérêt.

Matrice des coefficients des équations normales

δH_A	δH_B	δH_C	δH_D	δH_E	δH_F	ξ_A	η_A	ξ_B	η_B	ξ_C	η_C	ξ_D	η_D	ξ_E	η_E	ξ_F	η_F
6	-2	0	0	0	-2	0	+2	+0,866	+0,5	0	0	0	0	0	0	-0,866	+0,5
	6	-2	0	0	0	-0,866	-0,5	-1,732	+1	0	+1	0	0	0	0	0	0
		6	-2	0	0	0	0	0	-1	-1,732	-1	-0,866	+0,50	0	0	0	0
			6	-2	0	0	0	0	0	+0,866	-0,5	0	-2	-0,866	-0,5	0	0
				6	-2	0	0	0	0	0	0	+0,866	+0,5	+1,732	-1	0	-1
					6	+0,866	-0,5	0	0	0	0	0	0	0	+1	+1,732	+1
						1,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
							1,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
								1,5	0	0	0	0	0	0	0	0	0
									1,5	0	0	0	0	0	0	0	0
										1,5	1,5	0	0	0	0	0	0
												1,5	0	0	0	0	0
													1,5	1,5	0	0	0
															1,5	0	0
																1,5	1,5

Equations normales. Elles sont au nombre de 18 et ne diagonaux de part et d'autre de la diagonale. Les signes donnent pas lieu à des remarques particulières; la matrice symétrique ci-contre est celle des coefficients, et il n'y pas paru nécessaire de transcrire les éléments non donc sans aucune difficulté.

Matrice aux coefficients de poids des inconnues

(Calcul par le Centre de calcul électronique, EPUL)

(inverse de la précédente)

0,643	+0,179	-0,071	-0,107	-0,071	+0,179	0,000	-0,738	-0,165	-0,381	-0,021	-0,202	0,000	-0,095	+0,021	-0,202	+0,165	-0,381	
δH_A	0,643	+0,179	-0,071	-0,107	-0,071	+0,412	-0,048	+0,639	-0,369	+0,247	-0,333	+0,165	-0,119	+0,082	-0,048	+0,186	-0,083	
	δH_B	0,643	+0,179	-0,071	-0,107	+0,165	+0,119	+0,247	+0,333	+0,639	+0,369	-0,412	+0,048	+0,186	+0,083	+0,082	+0,048	
		δH_C	0,643	+0,179	-0,071	0,000	-0,095	-0,021	+0,202	-0,165	+0,381	0,000	+0,738	+0,165	+0,381	+0,021	+0,202	
			δH_D	0,643	+0,179	-0,165	+0,119	-0,082	+0,048	-0,186	+0,083	-0,412	+0,048	-0,639	+0,369	-0,247	+0,333	
				δH_E	0,643	-0,412	-0,048	-0,186	-0,083	-0,082	-0,048	-0,165	-0,119	-0,248	-0,333	-0,639	-0,369	
					δH_F	1,143	0,000	+0,476	-0,165	+0,190	-0,165	+0,190	0,000	+0,190	+0,165	+0,476	+0,165	
						ξ_A	1,619	+0,371	+0,357	+0,082	+0,143	0,000	+0,048	-0,082	+0,143	-0,371	+0,357	
							η_A	1,500	-0,206	+0,298	-0,268	+0,190	-0,082	+0,083	+0,062	+0,119	+0,124	
									ξ_B	1,262	+0,268	+0,536	+0,165	+0,143	+0,062	+0,155	-0,124	+0,214
										η_B	1,500	+0,206	+0,476	-0,371	+0,119	-0,124	+0,083	-0,062
											ξ_C	1,262	+0,165	+0,357	+0,124	+0,214	-0,062	+0,155
												η_C	1,143	0,000	+0,476	-0,165	+0,190	-0,165
													ξ_D	1,619	+0,371	+0,357	+0,082	+0,143
														η_D	1,500	-0,206	+0,297	-0,268
															ξ_E	1,262	+0,268	+0,536
																η_E	1,500	+0,206
																	ξ_F	1,262
																		η_F

Compensation et calculs de précision. Admettons par hypothèse la valeur numérique: $m_0^2 \cong [p_{vv}] : 6 = 1$. Les erreurs moyennes quadratiques des inconnues ou de fonctions de celles-ci sont obtenues en fonction des éléments fournis par la matrice inverse de la première. Les deux sont symétriques et les coefficients de poids (quadratiques) des inconnues sont les éléments diagonaux de la seconde.

Poids des binômes ($\cos \alpha \xi_s + \sin \alpha \eta_s$). Ces binômes expriment les composantes des déviations dans les plans de visées respectifs. Les poids des ξ, η , considérés individuellement, présentent peu d'intérêt puisque l'orientation de ces composantes est arbitraire.

$$\text{Visée } AB: \frac{1}{P} = \overline{0,866^2} \times 1,14 + \overline{0,50^2} \times 1,62 = 1,26 \quad P = 0,79$$

$$\text{Visée } BA: \frac{1}{P} = \overline{0,866^2} \times 1,50 + \overline{0,50^2} \times 1,26 - 2 \times 0,866 \times 0,50 \times 0,206 = 1,26$$

Valeur commune pour la périphérie $AB \dots F$

$$\text{Visée } BO: \frac{1}{P'} = \overline{0,866^2} \times 1,50 + \overline{0,50^2} \times 1,26 + 2 \times 0,866 \times 0,50 \times 0,206 = 1,62$$

Valeur commune $P' = 0,62$ pour $AO, BO, \dots FO$

Poids de $(\delta H_A - \delta H_B), (\delta H_B - \delta H_C) \dots \frac{1}{P''} = 0,643 + 0,643 - 2 \times 0,179 = 0,93$ valeur commune $P'' = 1,075$ pour les six binômes; pouvait se présumer. On pourrait poursuivre pour d'autres fonctions des inconnues. En général les composantes des déviations sont déterminées de façon moins précise que les δH .

Littérature

- [1] *F. Kobold und N. Wunderlin*, Die Bestimmung von Lotabweichungen ... (Commission géodésique suisse, 1963).
- [2] *P. Engi*, Zur trigonometrischen Höhenmessung im Gebirge (Festschrift C. F. Baeschlin, 1951).
- [3] *H. Wolf*, Ausgleichungsrechnung, Lieferung 6/5 (Hamburg).
- [4] *A. Ansermet*, Quelques aspects des calculs altimétriques (Schweizerische Zeitschrift für Vermessung, 1964).