Zeitschrift: Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières

Band: 34 (1936)

Heft: 2

Artikel: Essai sur la théorie vectorielle des moindres carrés

Autor: Bachmann, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-195952

Essai sur la théorie vectorielle des moindres carrés.

Dans l'article ci-après, je veux montrer comment on peut employer le calcul vectoriel au problème de la compensation par la méthode des moindres carrés. Cependant ce petit travail ne sera pas complet. Comme cette théorie des moindres carrés est très connue, je n'ai pas voulu la traiter en entier; j'ai uniquement choisi quelques chapitres pour montrer la méthode.

Il est bien entendu que la méthode vectorielle ne présentera aucun avantage pour la résolution *numérique* d'un problème. Pour résoudre numériquement un problème, on sera quand même forcé d'introduire les vecteurs par leurs composantes, ce qui nous donnera les formules toujours employées jusqu'à présent. Par contre, pour la théorie, la méthode vectorielle est excellente et certainement bien supérieure à la méthode analytique, telle que nous l'avons toujours employée jusqu'à présent. La méthode vectorielle donne des résultats très concentrés et elle nous permet de voir le problème dans tout son ensemble sans passer par chaque observation particulière.

Introduction.

Le nombre vectoriel.

Dans le cas général, pour considérer le problème de la compensation par la méthode des moindres carrés, il nous faut introduire la notion du nombre vectoriel.

Un nombre vectoriel peut être représenté géométriquement par un vecteur à n dimensions. Il ne nous suffit donc plus de considérer que l'espace d'Euclide; il nous faut introduire des espaces à n dimensions.

En algèbre, les quantités étudiées peuvent être fonction de plusieurs variables indépendantes qui sont mesurées par des unités différentes et également indépendantes. On appellera nombre vectoriel la somme des valeurs de ces n variables prises avec leurs unités.

On écrira donc un nombre vectoriel de la façon suivante:

$$x = z_1 x_1 + z_2 x_2 + \dots \quad + z_n x_n \tag{1}$$

Les $x_1, x_2, \dots \dots x_n$ sont donc les composantes algébriques et les $z_1\, z_2 \dots z_n$ sont les unités de mesure correspondantes. Ces unités ne sont généralement pas des vecteurs par leur nature; elles peuvent par exemple être un poids, une longueur, etc., mais rien ne nous empêche de leur donner un caractère vectoriel. Nous n'avons qu'à considérer un espace fictif à n dimensions et prendre les $z_1\, z_2 \dots z_n$ suivant la direction des axes indépendants dans cet espace. Le nombre vectoriel sera donc bien représenté géométriquement par un vecteur dont les composantes seront:

$$z_1\, x_1 \qquad z_2\, x_2 \dots z_n\, x_n$$

Cet espace à n dimensions n'est pas un espace réel, mais un espace fictif. Il n'y a qu'un seul espace réel connu: c'est l'espace d'Euclide, donc l'espace à trois dimensions. Nous ne pouvons pas nous représenter un espace à n dimensions. Un point quelconque de notre espace est parfaitement déterminé par trois éléments. Nous ne pouvons pas le déterminer par l'indication de quatre éléments par exemple, sinon les quatre éléments seront liés par une équation de la forme

$$a_1 z_1 + a_2 z_2 + a_3 z_3 + a_4 z_4 = 0$$

et nous pourrons donc exprimer l'un quelconque d'entre eux en fonction des autres.

Cependant nous ne savons pas si un espace à n dimensions peut exister ou non; ce que nous savons, c'est qu'il n'existe pas pour notre perception. La physique nous donne bien des exemples de phénomènes qui se produisent dans la nature, mais qui ne peuvent pas être conçus par nos organes. Considérons par exemple le cas du spectre. On peut le ramener à trois couleurs fondamentales qui sont le rouge, le jaune et le bleu. Ces trois couleurs représentent trois unités de mesure distinctes et indépendantes. Mais il existe d'autres couleurs ou plutôt d'autres rayons que nos yeux ne peuvent pas percevoir. Les physiciens ont découvert les rayons ultra-violets et les rayons infra-rouges dont les propriétés sont analogues à celles des rayons visuels; ils sont de même nature et ne diffèrent que par la longueur d'onde.

Nous voyons donc par ce petit exemple que tout ce que nous apercevons nous donne une traduction fausse et nous en arrivons à la conception de la relativité.

Addition et soustraction de nombres vectoriels.

L'addition et la soustraction de deux ou plusieurs nombres vectoriels s'effectue de la façon suivante:

Soit: $$a = z_1 a_1 + z_2 a_2 + \dots + z_n a_n$$
$$b = z_1 b_1 + z_2 b_2 + \dots + z_n b_n$$

$$a + b = z_1 (a_1 + b_1) + z_2 (a_2 + b_2) + \dots + z_n (a_n + b_n)$$
$$a - b = z_1 (a_1 - b_1) + z_2 (a_2 - b_2) + \dots + z_n (a_n - b_n)$$

C'est donc la même règle que pour les vecteurs ordinaires. L'équation vectorielle $a = 0$ est donc équivalente aux n équations algébriques:

$$a_1 = 0 \qquad a_2 = 0 \dots \qquad \dots a_n = 0$$

Nous voyons déjà par là l'avantage de la méthode vectorielle; c'est une méthode plus concentrée que la méthode analytique. Au lieu d'écrire n équations algébriques, nous n'avons besoin que d'une seule équation vectorielle.

Soit m un nombre algébrique. On voit facilement que l'on a:

$$m\,a = z_1\, ma_1 + z_2\, ma_2 + \dots + z_n\, ma_n$$

ce qui dérive immédiatement de l'addition des nombres vectoriels.

Produit algébrique de deux nombres vectoriels.

De même que pour les vecteurs ordinaires, il faut considérer deux produits qui sont le produit algébrique et le produit vectoriel.

Le produit algébrique doit être défini de façon à rester encore juste quand $n = 3$, c'est-à-dire quand il s'agit d'un vecteur ordinaire. Nous sommes conduits à définir le produit des unités comme suit:

$$z_1 z_1 = 1 \qquad z_2 z_2 = 1 \qquad \ldots . \; z_n z_n = 1$$
$$z_1 z_2 = 0 \qquad z_1 z_3 = 0 \qquad z_4 z_5 = 0 \; \ldots . \; z_i z_j = 0$$

ce qui nous donne: $z_i z_i = 1 \qquad z_i z_j = 0$

Ce produit est donc un nombre algébrique. Il faut cependant remarquer que les unités $z_1 z_2 \ldots . z_n$ doivent être indépendantes: elles doivent être représentées au point de vue géométrique par des axes rectangulaires.

Pour le carré d'un nombre vectoriel, nous avons donc:

$$a^2 = a \cdot a = a_1^2 + a_2^2 + \ldots . + a_n^2$$

c'est donc la grandeur ou le module du nombre vectoriel.

Nombres vectoriels du second ordre.

Soient

$$a = z_1 a_1 + z_2 a_2 + \ldots . + z_n a_n$$
$$b = z_1 b_1 + z_2 b_2 + \ldots . + z_n b_n$$
$$c = z_1 c_1 + z_2 c_2 + \ldots . + z_n c_n$$

Introduisons $A = z_1 a + z_2 b + z_3 c$

Ce sera un nombre vectoriel du second ordre. De la même façon, nous pouvons définir un nombre vectoriel d'un ordre quelconque.

Dérivée totale d'une fonction algébrique à plusieurs variables

$y = F(x_1 x_2 \ldots . x_n) = F(x)$

x étant un nombre vectoriel: $x = z_1 x_1 + z_2 x_2 \ldots . + z_n x_n$

$dx = z_1 dx_1 + z_2 dx_2 + \ldots . + z_n dx_n$

$$dF(x) = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \ldots . + \frac{\partial F}{\partial xn} dx_n$$

On appelle dérivée totale de la fonction algébrique $F(x)$ par rapport à la variable vectorielle x, la somme des dérivées partielles prises avec leurs unités de mesure.

$$F'(x) = z_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \ldots . + z_n \frac{\partial F}{\partial xn}$$

On a alors pour la différentielle totale

$$dF = F'(x)\, dx$$

La moyenne arithmétique.

Nous avons observé une certaine grandeur n fois, ce qui nous a donné les n résultats: $l_1, l_2 \ldots . l_n$

ou bien sous forme vectorielle:

$$L = z_1 \, l_1 + z_2 \, l_2 + \ldots . + z_n \, l_n$$

Considérons en outre le vecteur

$$z = z_1 + z_2 + \ldots . + z_n$$

La valeur la plus probable de l'inconnue est donnée par la moyenne arithmétique, donc:

$$\underline{x = \frac{1}{n} \, z \, L}$$

Nous constatons facilement que l'équation $v = z\,x - L$ est égale à zéro. Nous avons:

$$\begin{aligned} v &= z_1 \, v_1 + z_2 \, v_2 + \ldots . + z_n \, v_n \\ &= z_1 \, (x - l_1) + z_2 \, (x - l_2) + \ldots . + z_n \, (x - l_n) \\ &= z\,x - L = \frac{1}{n} \, z^2 \, L - L = 0 \qquad \text{c. q. f. d.} \end{aligned}$$

Les calculs numériques se facilitent passablement en introduisant une valeur approchée de l'inconnue, soit x_0, valeur donnée par:

$$x_0 = \frac{1}{n} \, z_1 \, L_0$$

On a alors:

$$x_0 + \Delta x = \frac{1}{n} \, z \, (L_0 + \Delta L)$$

$$\Delta x = \frac{1}{n} \, z \cdot \Delta L$$

Calcul de l'erreur moyenne pour le cas d'observations de même poids.

L'erreur moyenne est définie par la formule

$$\mu = \sqrt{\frac{\epsilon\epsilon}{n}} = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{n}}$$

ϵ étant un nombre vectoriel ayant pour composantes

$$\epsilon = z_1 \, \epsilon_1 + z_2 \, \epsilon_2 + \ldots . + z_n \, \epsilon_n$$

Les ϵ_i sont ce qu'on nomme des erreurs vraies; ce sont les différences entre la valeur vraie de l'inconnue, soit X, et les valeurs observées, donc:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= X - l_1 \\ &\vdots \\ \epsilon_n &= X - l_n \end{aligned} \right\} \; \epsilon = z_1 \, (X - l_1) + z_2 \, (X - l_2) + \ldots . + z_n \, (X - l_n)$$

Les écarts entre la valeur la plus probable de l'inconnue x et les observations $l_1, l_2 \ldots . l_n$ sont désignés par $v_1, v_2 \ldots . v_n$

Donc

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= x - l_1 \\ &\vdots \\ v_n &= x - l_n \end{aligned} \right\} \; \begin{aligned} v &= z_1 \, v_1 + z_2 \, v_2 + \ldots . + z_n \, v_n \\ &= z_1 \, (x - l_1) + z_2 \, (x - l_2) + \ldots . + z_n \, (x - l_n) \end{aligned}$$

$$v = x\,(z_1 + z_2 + \ldots + z_n) - (z_1\,l_1 + z_2\,l_2 + \ldots + z_n\,l_n)$$

$$\begin{cases} v = z\,x - L \\ \epsilon = z\,X - L \end{cases} \qquad \text{de même pour } \epsilon$$

En retranchant ces deux équations l'une de l'autre, on obtient:

$$\epsilon - v = z\,(X - x)$$
$$\epsilon = v + z\,(X - x)$$

Cette formule se simplifie encore en remarquant que $v = 0$, ce qui est une caractéristique de la moyenne arithmétique. On a donc:

$$\epsilon = z\,(X - x)$$

$$\epsilon^2 = \left\{v + z\,(X - x)\right\}^2 = v^2 + 2\,v\,z\,(X - x) + z^2\,(X - x)^2$$

$$\epsilon^2 = v^2 + n\,(X - x)^2$$

Multiplions l'équation $\epsilon = z\,(X - x)$ par z et élevons-la ensuite au carré.

$$z\,\epsilon = z^2\,(X - x) = n\,(X - x)$$
$$(z\,\epsilon)^2 = n^2\,(X - x)^2$$

A présent, éliminons l'expression $(X - x)$ entre les deux équations:

$$\epsilon^2 = v^2 + n\,(X - x)^2$$
$$(z\epsilon)^2 = n^2\,(X - x)^2$$

ce qui nous donne:

$$\epsilon^2 = v^2 + \frac{(z\epsilon)^2}{n}$$

On simplifie cette dernière expression en remarquant qu'on a approximativement:

$$(z\epsilon)^2 = \left\{(z_1 + z_2 + \ldots + z_n)\,(z_1\,\epsilon_1 + z_2\,\epsilon_2 + \ldots + z_n\,\epsilon_n)\right\}^2$$
$$= (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \ldots + \epsilon_n)^2 \approx \epsilon^2$$

ce qui nous donne:

$$\epsilon^2 = v^2 + \frac{\epsilon^2}{n}$$

$$\frac{\epsilon^2}{n} = \frac{v^2}{n-1}$$

Nous obtenons l'expression cherchée qui nous donne l'erreur moyenne en fonction de v.

$$\underline{\mu = \sqrt{\frac{\epsilon^2}{n}} = \sqrt{\frac{v^2}{n-1}}}$$

Remarque:

Nous obtenons immédiatement les relations avec la méthode classique (analytique) en remarquant qu'on a:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 = [vv]$$
$$zv = v_1 + v_2 + \ldots + v_n = [v]$$

(A suivre.)