Bestimmung der Zylinderkoordinaten y'2 x'2 eines Punktes P2 aus den Zylinderkoordinaten y'1 x'1 eines Punktes P1 mit Hülfe der bekannten Kugel-Längen und -Breiten der beiden Punkte

Autor(en): **Zollinger, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik = Revue technique suisse des mensurations et améliorations foncières**

Band (Jahr): **25 (1927)**

Heft 5

PDF erstellt am: **05.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-190195

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss
Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

SCHWEIZERISCHE

Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik

ORGAN DES SCHWEIZ. GEOMETERVEREINS

REVUE TECHNIQUE SUISSE DES MENSURATIONS ET AMÉLIORATIONS FONCIÈRES

ORGANE DE LA SOCIÉTÉ SUISSE DES GÉOMÈTRES

Redaktion: F. BAESCHLIN, Professor, Zollikon (Zürich)

Ständiger Mitarbeiter für Kulturtechnik: Dr. H. FLUCK, Dipl. Kulturingenieur, Neuchâtel, 9, Passage Pierre qui roule (beurl.). — Redaktionsschluß: Am 1. jeden Monats.

Expedition, Inseraten- und Abonnements-Annahme:
BUCHDRUCKEREI WINTERTHUR VORM. G. BINKERT, WINTERTHUR

Escheinend am 2. Dienstag jeden Monats Inserate: 50 Cts. per 1spaltige Nonp.-Zeile	No. 5 des **XXV. Jahrganges** der „Schweiz. Geometerzeitung". 10. Mai 1927	Abonnemente: Schweiz . . . Fr. 12.— jährlich Ausland . . . „ 15.— „ Unentgeltlich für Mitglieder des Schweiz. Geometervereins

Bestimmung der Zylinderkoordinaten y'_2 x'_2 eines Punktes P_2 aus den Zylinderkoordinaten y'_1 x'_1 eines Punktes P_1 mit Hülfe der bekannten Kugel-Längen und -Breiten der beiden Punkte.

Von *H. Zollinger*, Ingenieur.

Die Sektion für Geodäsie der Eidg. Landestopographie veröffentlichte im Jahrgang 1926 der Zeitschrift für Vermessungswesen und Kulturtechnik einen Artikel: „Schweizer Geographische Koordinaten". Da inzwischen auch die Umkehrung des dort behandelten Problems praktisches Interesse gefunden hat, beauftragte mich der Chef der Sektion für Geodäsie mit der Lösung der im Titel enthaltenen Aufgabe.

Zunächst möge auf die Lösung hingewiesen werden, welche von Max Rosenmund* angegeben wurde. Um diese handelt es sich hier aber nicht, dagegen um die folgende: Die Punkte P_1 und P_2 liegen höchstens einige Kilometer auseinander; dann sollen die Größen $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ und $\Delta y' = y'_2 - y'_1$ als Funktionen der Kugellängen und Kugelbreiten der beiden Punkte dargestellt werden.

Die zwei trigonometrischen Punkte P_1 und P_2 seien wie es meistens der Fall sein wird, auf dem Ellipsoid gegeben, und zwar durch ihre Längen und Breiten B_1 L_1 und B_2 L_2. Wir übertragen diese Punkte vom Ellipsoid auf die Kugel nach den Formeln Rosenmunds (R.P.) pag. 106. Für jeden Punkt erhalten wir neue Bestimmungselemente: die Kugelbreiten b_1 und b_2 bzw. ψ_1 und ψ_2, ferner die Kugellängen λ_1 und λ_2. Um von der Kugel auf die x' y' Ebene zu gelangen, benützen wir in (R.P.) pag. 107 die Transformationsformeln 56*, 57*.

* *Max Rosenmund:* Die Aenderung des Projektionssystems der schweiz. Landesvermessung 1903, Bern. Eidg. Landestopographie. [Von jetzt an bezeichne ich dieses Werk mit (R. P.)].

Es wird allgemein:

(1) $$y'_1 = F(\lambda_1, \psi_1) \qquad x'_1 = G(\lambda_1, \psi_1)$$
$$y'_2 = F(\lambda_2, \psi_2) \qquad x'_2 = G(\lambda_2, \psi_2)$$

Hieraus ergeben sich die Größen $\Delta x'$ und $\Delta y'$:

(2) $$\Delta y' = y'_2 - y'_1 = F(\psi_2, \lambda_2) - F(\psi_1, \lambda_1) = Hy'(\lambda_1, \psi_1; \lambda_2, \psi_2)$$
$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = G(\psi_2, \lambda_2) - G(\psi_1, \lambda_1) = Hx'(\lambda_1, \psi_1; \lambda_2, \psi_2)$$

Hy' und Hx' bedeuten endliche Reihen der Größen

$$\psi_1, \lambda_1; \psi_2, \lambda_2$$

Es ist unsere Aufgabe, die Konvergenz derselben möglichst günstig zu gestalten, was wir erreichen durch Einführung neuer Variabeln. Diese Operation führt sich jedoch besser dann aus, wenn wir die Reihen Hy' und Hx' entwickelt haben, was nachfolgend in extenso geschehen soll.

Berechnung von $\Delta y'$.

Nach (R.P.) pag. 89 56* wird:

(3) $$y'_1 = [1]\,\lambda_1 - [2]\,\lambda_1\,\psi_1 - [3]\,\lambda_1^3 - [4]\,\lambda_1\,\psi_1^3 + [5]\,\lambda_1^3\,\psi_1 - [6]\,\lambda_1^3\,\psi_1^2 + [7]\,\lambda_1^5$$
$$y'_2 = [1]\,\lambda_2 - [2]\,\lambda_2\,\psi_2 - [3]\,\lambda_2^3 - [4]\,\lambda_2\,\psi_2^3 + [5]\,\lambda_2^3\,\psi_2 - [6]\,\lambda_2^3\,\psi_2^2 + [7]\,\lambda_2^5$$

(4) $$\Delta y' = (y'_2 - y'_1) =$$
$$+ [1](\lambda_2 - \lambda_1) - [2](\lambda_2\,\psi_2 - \lambda_1\,\psi_1) - [4](\lambda_2\,\psi_2^3 - \lambda_1\,\psi_1^3)$$
$$+ [5](\lambda_2^3\,\psi_2 - \lambda_1^3\,\psi_1) - [6](\lambda_2^3\,\psi_2^2 - \lambda_1^3\,\psi_1^2) + [7](\lambda_2^5 - \lambda_1^5)$$
$$- [3](\lambda_2^3 - \lambda_1^3) = Hy'(\lambda_1, \psi_1; \lambda_2, \psi_2)$$

Die Reihe $Hy'(\lambda_1, \psi_1; \lambda_2, \psi_2)$ formen wir um durch Einführung neuer Variabeln. Wir setzen:

(5) $$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1 \qquad \lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$
$$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1 \qquad \psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}$$

Aus diesen Ansätzen ergeben sich die folgenden Substitutionsgleichungen:

(6) $$\lambda_1 = \lambda - \frac{\Delta\lambda}{2} \qquad \lambda_2 = \lambda + \frac{\Delta\lambda}{2}$$
$$\psi_1 = \psi - \frac{\Delta\psi}{2} \qquad \psi_2 = \psi + \frac{\Delta\psi}{2}$$

Die Klammerausdrücke ( ) in $Hy'(\lambda_1, \psi_1; \lambda_2, \psi_2)$ lauten dann wie folgt:

(7) $$(\lambda_2 - \lambda_1) = +(\Delta\lambda)$$
$$(\lambda_2\,\psi_2 - \lambda_1\,\psi_1) = +\lambda(\Delta\psi) + \psi(\Delta\lambda)$$
$$(\lambda_2^3 - \lambda_1^3) = +3\lambda^2(\Delta\lambda) + 1/4\,(\Delta\lambda)^3$$
$$(\lambda_2\,\psi_2^3 - \lambda_1\,\psi_1^3) = +3\lambda\psi^2(\Delta\psi) + 1/4\,\lambda(\Delta\psi)^3 + \psi^3(\Delta\lambda) + 3/4\,\psi(\Delta\lambda)(\Delta\psi)^2$$
$$(\lambda_2^3\,\psi_2 - \lambda_1^3\,\psi_1) = +3\psi\,\lambda^2(\Delta\lambda) + 1/4\,\psi(\Delta\lambda)^3 + \lambda^3(\Delta\psi) + 3/4\,\lambda(\Delta\psi)(\Delta\lambda)^2$$

$$(\lambda_2^3\,\psi_2^2 - \lambda_1^3\,\psi_1^2) = +2\lambda^3\,\psi\,(\Delta\psi) + 3\lambda^2\,\psi^2\,(\Delta\lambda) + 3/4\;\lambda^2\,(\Delta\lambda)\,(\Delta\psi)^2 + \frac{3}{2}\,\lambda\,\psi\,(\Delta\lambda)^2\,(\Delta\psi) + \frac{1}{4}\,\psi^2\,(\Delta\lambda)^3 + \frac{1}{16}\,(\Delta\lambda)^3\,(\Delta\psi)^2$$

$$(\lambda_2^5 - \lambda_1^5) = 5\lambda^4\,(\Delta\lambda) + 5/2\;\lambda^2\,(\Delta\lambda)^3 + \frac{1}{16}\,(\Delta\lambda)^5$$

Diese Ausdrücke eingesetzt in $\Delta y' = Hy'\,(\psi_1, \lambda_1;\, \psi_2, \lambda_2)$ ergeben eine Reihe, deren Glieder ich nach folgendem Prinzipe ordne. Zu einer 1. Gruppe fasse ich alle diejenigen Glieder zusammen, welche eine der beiden Formen haben: $(\psi)^\rho\,(\lambda)^\sigma\,(\Delta\lambda)$ oder $(\psi)^\mu\,(\lambda)^\nu\,(\Delta\psi)$. Die Exponenten $\binom{\rho\sigma}{\mu\nu}$ sind ganze Zahlen der Zahlenreihe: 0, 1, 2, 3. 4. Die 2. Gruppe soll nur Glieder enthalten der Form $(\psi)^\alpha\,(\lambda)^\beta\,(\Delta\psi)^m\,(\Delta\lambda)^n$. Die Exponenten α, β sind ganze Zahlen der Zahlenreihe 0, 1, 2; m und n genügen der Gleichung: $m + n = 3$ und sind Zahlen der Reihe 0, 1, 2, 3.

Die 3. Gruppe umfaßt Glieder von der Form: $(\Delta\psi)^\gamma\,(\Delta\lambda)^\delta$, wo $\gamma + \delta = 5$ und γ, δ, Zahlen bedeuten aus der Zahlenreihe 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Wir erhalten die folgende Darstellung für $\Delta y'$:

$$\begin{aligned}(8)\quad \Delta y' = {} & + [1]\,(\Delta\lambda) - [2]\,\lambda\,(\Delta\psi) - [2]\,\psi\,(\Delta\lambda) - 3\,[3]\,\lambda^2\,(\Delta\lambda) \\ & - 3\,[4]\,\lambda\psi^2\,(\Delta\psi) \\ & - [4]\,\psi^3\,(\Delta\lambda) + 3\,[5]\,\psi\,\lambda^2\,(\Delta\lambda) + [5]\,\lambda^3\,(\Delta\psi) \\ & - 2\,[6]\,\lambda^3\,\psi\,(\Delta\psi) \\ & - 3\,[6]\,\lambda^2\,\psi^2\,(\Delta\lambda) + 5\,[7]\,\lambda^4\,(\Delta\lambda) \\ & - 1/4\,[3]\,(\Delta\lambda)^3 - 1/4\,[4]\,\lambda\,(\Delta\psi)^3 - 3/4\,[4]\,\psi\,(\Delta\lambda)\,(\Delta\psi)^2 \\ & + 3/4\,[5]\,\lambda\,(\Delta\psi)\,(\Delta\lambda)^2 \\ & - 3/4\,[6]\,\lambda^2\,(\Delta\lambda)\,(\Delta\psi)^2 - 3/2\,[6]\,\lambda\,\psi\,(\Delta\lambda)^2\,(\Delta\psi) - \frac{1}{4}\,[6]\,\psi^2\,(\Delta\lambda)^3 \\ & + 5/2\,[7]\,\lambda^2\,(\Delta\lambda)^3 + 1/4\,[5]\,\psi\,(\Delta\lambda)^3 \\ & - 1/16\,[6]\,(\Delta\lambda)^3\,(\Delta\psi)^2 + 1/16\,[7]\,(\Delta\lambda)^5\end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Glieder haben die Eigenschaft, sehr klein zu sein. So wird beispielsweise 3 [4] des Gliedes 3 [4] $\lambda\,\psi^2\,(\Delta\psi)$: 3 [4] = 0. 000 000 000 000 002 573 43

Man kann indes diesem Uebelstand abhelfen, indem man die Größen: $\Delta\lambda$, $\Delta\psi$, λ, ψ in neuen Einheiten ausdrückt. $\Delta\lambda$ und $\Delta\psi$ werden von nun anstatt in Sek. in Zehnersek. ausgedrückt. Es ist daher:

$$(9)\qquad \Delta\lambda = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{10} \qquad\qquad \Delta\psi = \frac{\psi_2 - \psi_1}{10}$$

Ferner drücken wir die ψ und λ nicht mehr in Sek., sondern in Zehntausender-Sek. aus, so daß

$$(10)\qquad \lambda = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}\,\frac{1}{10^4} \qquad \psi = \frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\,\frac{1}{10^4} \text{ bedeutet.}$$

Ferner wollen wir die Größe $\Delta y'$ nicht in Metern ausdrücken, sondern in cm; wir müssen also jedes Glied der Reihe für $\Delta y'$ mit

10^2 multiplizieren. Wenn wir die eben gemachten Annahmen in der Reihe für $\Delta y'$ berücksichtigen, dann ergibt sich die tatsächlich gewünschte Eigenschaft der Koeffizienten, daß sie nämlich viel größer werden.

Das eben betrachtete Glied 3 [4] $\lambda\,\psi^2\,(\Delta\psi)$ =
0. 000 000 000 000 002 573 43 $\lambda\,\psi^2\,(\Delta\psi)$ ist dann beispielsweise
= 10^{15} 0. 000 000 000 000 002 573 43 $\lambda\,\psi^2\,(\Delta\psi)$
= 2,57343 $\lambda\,\psi^2\,\Delta\psi$, wobei für λ, ψ, $(\Delta\psi)$ die sub (9) und (10) angegebenen Ausdrücke eingeführt werden müssen.

Die „Tabelle für $\Delta y'$" stellt die neue Reihe dar. Jedes Glied hat eine No. Die Koeffizienten nehmen mit wachsendem No. ab.

Tabelle für $\Delta y'$ (in cm).

$$(\Delta\lambda'') = \frac{\lambda''_2 - \lambda''_1}{10} \qquad \lambda'' = \frac{\lambda''_1 + \lambda''_2}{2}\,\frac{1}{10^4}$$

$$(\Delta\psi'') = \frac{\psi''_2 - \psi''_1}{10} \qquad \psi'' = \frac{\psi''_1 + \psi''_2}{2}\,\frac{1}{10^4}$$

$\lambda\psi$ =, λ^2 =, ψ^2 = Siehe Bemerkung zu Beispielen 1 und 2.

Glied No.	Vorzeichen	cm	1	2	3	4	5	6	7	
1	+	21127,	45	[4.3248470.5]						$(\Delta\lambda)$
2	—	1094,	87 4	[3.039364.0]						$(\Delta\psi)$ λ
3	—	1094,	87 4	[3.039364.0]						$(\Delta\lambda)$ ψ
4	—	13,	240	83	[1.121915.4]					$(\Delta\lambda)$ λ^2
5	—	2,	573	43						$(\Delta\psi)$ λ ψ^2
6	+	1,	286	73						$(\Delta\lambda)$ ψ λ^2
7	—	0,	857	81						$(\Delta\lambda)$ ψ^3
8	+	0,	428	91						$(\Delta\psi)$ λ^3
9	—	0,	093	366						$(\Delta\lambda)$ λ^2 ψ^2
10	—	0,	062	244						$(\Delta\psi)$ ψ λ^3
11	+	0,	009	856	2					$(\Delta\lambda)$ λ^4
12	—	0,	000	001	103	4				$\Delta\lambda^3$
13	—	0,	000	000	643	35				$(\Delta\lambda)$ $(\Delta\psi)^2$ ψ
14	+	0,	000	000	321	68				$(\Delta\psi)$ $(\Delta\lambda)^2$ λ
15	—	0,	000	000	214	45				$(\Delta\psi)^3$ λ
16	+	0,	000	000	107	23				$(\Delta\lambda)^3$ ψ
17	—	0,	000	000	046	682				$(\Delta\lambda)^2$ $(\Delta\psi)$ λ ψ
18	—	0,	000	000	023	341	8			$(\Delta\lambda)$ $(\Delta\psi)^2$ λ^2
19	—	0,	000	000	007	780	6			$(\Delta\lambda)^3$ ψ^2
20	+	0,	000	000	004	928	1			$(\Delta\lambda)^3$ λ^2
21	—	0,	000	000	000	000	001	945	1	$(\Delta\lambda)^3$ $(\Delta\psi)^2$
22	+	0,	000	000	000	000	000	123	2	$(\Delta\lambda)^5$

Tabelle für $\Delta x'$ (in cm).

Glied No.	Vorzeichen	cm	1	2	3	4	5	6	7	
1	+	30925,	37	[4,4903149.3]						$(\Delta\psi)$
2	+	747,	990	5	[2,873896.0]					$(\Delta\lambda)$ λ
3	—	38,	762	62	[1,588412.8]					$(\Delta\lambda)$ λ ψ
4	+	36,	344	17	[1,560435.0]					$(\Delta\psi)$ ψ^2
5	—	19,	381	30	[1,287382.9]					$(\Delta\psi)$ λ^2
6	+	0,	879	07						$(\Delta\lambda)$ λ ψ^2
7	+	0,	879	07						$(\Delta\psi)$ λ^2 ψ
8	—	0,	293	02						$(\Delta\lambda)$ λ^3
9	—	0,	113	89						$(\Delta\psi)$ λ^2 ψ^2
10	+	0,	057	708						$(\Delta\lambda)$ ψ λ^3
11	—	0,	075	924						$(\Delta\lambda)$ λ ψ^3
12	+	0,	035	593						$(\Delta\psi)$ ψ^4
13	+	0,	014	427						$(\Delta\psi)$ λ^4
14	—	0,	000	004	845	33				$(\Delta\psi)$ $(\Delta\lambda)^2$
15	+	0,	000	003	028	68				$(\Delta\psi)^3$
16	+	0,	000	000	219	77				$(\Delta\psi)$ $(\Delta\lambda)^2$ ψ
17	+	0,	000	000	219	77				$(\Delta\psi)^2$ $\Delta\lambda$ λ
18	—	0,	000	000	073	254				$(\Delta\lambda)^3$ λ
19	—	0,	000	000	056	944				$(\Delta\psi)^2$ $\Delta\lambda$ ψ λ
20	+	0,	000	000	021	641				$(\Delta\lambda)^2$ $\Delta\psi$ λ^2
21	—	0,	000	000	028	472				$(\Delta\lambda)^2$ $(\Delta\psi)$ ψ^2
22	+	0,	000	000	014	427				$(\Delta\lambda)^3$ ψ λ
23	+	0,	000	000	017	797				$(\Delta\psi)^3$ ψ^2
24	—	0,	000	000	009	490	5			$(\Delta\psi)^3$ λ^2
25	—	0,	000	000	000	000	002	372	6	$(\Delta\psi)^3$ $(\Delta\lambda)^2$
26	+	0,	000	000	000	000	000	901	57	$(\Delta\lambda)^4$ $\Delta\psi$
27	+	0,	000	000	000	000	000	444	92	$(\Delta\psi)^5$

Berechnung von $\Delta x'$.

Nach (R.P.) pag. 89 57* erhält man für x'_1 und x'_2 je eine Reihe mit den Argumenten (λ_1, ψ_1) bzw. (λ_2, ψ_2) analog (3). Ich bilde nun analog (4)

(11) $\Delta x' = (x'_2 - x'_1) =$

$$+ [8] (\psi_2 - \psi_1) + [9] (\lambda_2^2 - \lambda_1^2) + [10] (\psi_2^3 - \psi_1^3)$$

$$- [11] (\psi_2 \lambda_2^2 - \psi_1 \lambda_1^2)$$

$+ [12] (\psi_2^2 \lambda_2^2 - \psi_1^2 \lambda_1^2) - [13] (\lambda_2^4 - \lambda_1^4) - [14] (\psi_2^3 \lambda_2^2 - \psi_1^3 \lambda_1^2)$
$+ [15] (\psi_2 \lambda_2^4 - \psi_1 \lambda_1^4) + [16] (\psi_2^5 - \psi_1^5) = Hx' (\psi_1, \lambda_1; \psi_2, \lambda_2)$

Die Reihe $Hx' (\psi_1, \lambda_1; \psi_2, \lambda_2)$ forme ich um durch Einführung der Variabeln $\psi, \lambda; \Delta\psi, \Delta\lambda$ analog (5) und (6).

Die Klammerausdrücke in $Hx' (\psi_1, \lambda_1; \psi_2, \lambda_2)$ lauten dann wie folgt:

(12) $$(\psi_2 - \psi_1) = + (\Delta\psi)$$
$$(\lambda_2^2 - \lambda_1^2) = + 2\lambda (\Delta\lambda)$$
$$(\psi_2^3 - \psi_1^3) = + 3 \psi^2 (\Delta\psi) + 1/4 (\Delta\psi)^3$$
$$(\psi_2 \lambda_2^2 - \psi_1 \lambda_1^2) = + 2 \psi \lambda (\Delta\lambda) + \lambda^2 (\Delta\psi) + 1/4 (\Delta\lambda)^2 \Delta\psi$$
$$(\psi_2^2 \lambda_2^2 - \psi_1^2 \lambda_1^2) = 2 \psi^2 \lambda (\Delta\lambda) + 2 \lambda^2 (\Delta\psi) \psi + 1/2 \psi (\Delta\lambda)^2 (\Delta\psi) + 1/2 \lambda (\Delta\psi)^2 (\Delta\lambda)$$
$$(\lambda_2^4 - \lambda_1^4) = + 4 \lambda^3 (\Delta\lambda) + \lambda (\Delta\lambda)^3$$
$$(\psi_2^3 \lambda_2^2 - \psi_1^3 \lambda_1^2) = 2 \psi^3 \lambda (\Delta\lambda) + 3 \psi^2 \lambda^2 (\Delta\psi) + 3/4 \psi^2 (\Delta\lambda)^2 (\Delta\psi) + 3/2 \psi \lambda (\Delta\psi)^2 (\Delta\lambda) + 1/4 \lambda^2 (\Delta\psi)^3 + 1/16 (\Delta\psi)^3 (\Delta\lambda)^2$$
$$(\psi_2 \lambda_2^4 - \psi_1 \lambda_1^4) = 4 \lambda^3 \psi (\Delta\lambda) + \psi \lambda (\Delta\lambda)^3 + \lambda^4 (\Delta\psi) + 3/2 \lambda^2 (\Delta\lambda)^2 (\Delta\psi) + 1/16 (\Delta\lambda)^4 (\Delta\psi)$$
$$(\psi_2^5 - \psi_1^5) = + 5 \psi^4 (\Delta\psi) + 5/2 \psi^2 (\Delta\psi)^3 + 1/16 (\Delta\psi)^5$$

Diese Ausdrücke führt man in (11) ein und erhält für $\Delta x'$ die neue Reihe:

(13) $$\begin{aligned} \Delta x' = & + [8] (\Delta\psi) + 2 [9] \lambda (\Delta\lambda) + 3 [10] \psi^2 (\Delta\psi) \\ & \qquad - 2 [11] \psi \lambda (\Delta\lambda) \\ & - [11] \lambda^2 (\Delta\psi) + 2 [12] \psi^2 \lambda (\Delta\lambda) + 2 [12] \lambda^2 \psi (\Delta\psi) \\ & \qquad - 4 [13] \lambda^3 (\Delta\lambda) \\ & - 2 [14] \psi^3 \lambda (\Delta\lambda) - 3 [14] \psi^2 \lambda^2 (\Delta\psi) + 4 [15] \lambda^3 \psi (\Delta\lambda) \\ & + [15] \lambda^4 (\Delta\psi) + 5 [16] \psi^4 (\Delta\psi) \\ & + 1/4 [10] (\Delta\psi)^3 - 1/4 [11] (\Delta\lambda)^2 (\Delta\psi) \\ & \qquad + 1/2 [12] \psi (\Delta\lambda)^2 \Delta\psi \\ & + 1/2 [12] \lambda (\Delta\psi)^2 (\Delta\lambda) - [13] \lambda (\Delta\lambda)^3 \\ & \qquad - 3/4 [14] \psi^2 (\Delta\lambda)^2 (\Delta\psi) \\ & - 3/2 [14] \psi \lambda (\Delta\psi)^2 (\Delta\lambda) - 1/4 [14] \lambda^2 (\Delta\psi)^3 \\ & \qquad + [15] \psi \lambda (\Delta\lambda)^3 \\ & + 3/2 [15] \lambda^2 (\Delta\lambda)^2 (\Delta\psi) + 5/2 [16] \psi^2 (\Delta\psi)^3 \\ & - 1/16 [14] (\Delta\psi)^3 (\Delta\lambda)^2 + 1/16 [15] (\Delta\lambda)^4 (\Delta\psi) \\ & \qquad + 1/16 [16] (\Delta\psi)^5 \end{aligned}$$

Da die Koeffizienten der Glieder obiger Reihe wiederum sehr klein sind, führen wir neue Einheiten ein für $(\Delta\lambda)$, $(\Delta\psi)$; λ, ψ. Hiezu dienen die Ansätze von (9) und (10).

In der Tabelle für $\Delta x'$ ist die Reihe in der endgültigen Form enthalten. Die 27 Glieder folgen sich so, daß die Koeffizienten mit wachsendem Numero abnehmen.

Zu den Beispielen 1 und 2.

Von den 2 Punkten P_1 und P_2 auf dem Ellipsoid sind die geographischen Koordinaten gegeben. Nach (R.P.) pag. 106 berechne ich die Kugelkoordinaten b_1 b_2 bzw. ψ_1 ψ_2 und λ_1, λ_2.

Das 1. Reihenglied muss sowohl bei der $\Delta x'$ — als $\Delta y'$-Reihe mit 7stelligen Logarithmen gerechnet werden; die 4 nächsten Glieder bei der $\Delta x'$ - und die 3 nächsten bei der $\Delta y'$ - Reihe mit 6stelligen Logarithmen. Die Logarithmen der Koeffizienten sind in den Tabellen bereits angegeben. Alle nachfolgende Glieder werden ausgewertet mit einem Rechenschieber sowohl bei der $\Delta x'$- als $\Delta y'$-Reihe, wobei es sich empfiehlt, die Ausdrücke $(\psi.\lambda)$, ψ^2, λ^2 zuerst zu bestimmen bis auf die 4. Dezimale. Diese Genauigkeit müssen übrigens auch die Größen $\Delta\psi$, $\Delta\lambda$; ψ, λ haben bei der Berechnung der höhern Glieder der $\Delta x'$- und $\Delta y'$-Reihen.

Beim Beispiel 2 sind die Breiten und Längen der beiden Punkte auf dem Ellipsoide auf $1/1000''$ bekannt. Diese Genauigkeit ist ungenügend, um die $\Delta x'$ und $\Delta y'$ mit Hilfe der Reihen auf den cm sicher zu bekommen. Man wird dies ohne weiteres erkennen, wenn man bedenkt, daß $1/1000''$ in einer mittleren Breite von 46^0 auf dem Meridianbogen ca. 3,1 cm beträgt. Die Differenz von 1 cm in Beispiel 2 für $\Delta x'$ ist daher wohl verständlich.

Beispiel 1.

aus: Schweizer Geographische Koordinaten.

P_1		P_2	
Gegeben:	L_1 3^0 $1'$ $50'',4638$	Gegeben:	L_2 3^0 $1'$ $61'',0504$
	B_1 46^0 $50'$ $56'',5594$		B_2 46^0 $50'$ $60'',1820$
	$y_1' = +231064{,}89$ m	Gesucht:	y_2'
	$x_1' = -\ 7023{,}27$ m		x_2'

Nach (R.P.) pag. 106 ist:

ψ_1 — $6'$ $11'',51610$ $\qquad \lambda_1 = +10918'',41901$

ψ_2 — $6'$ $7'',89921$ $\qquad \lambda_2 = +10929'',01333$

Berechnung von $\Delta x'$, $\Delta y'$

$\psi_2 - \psi_1 = +3'',6169 \qquad \lambda_2 - \lambda_1 + 10,''5943 \qquad \psi.\lambda = -0.0402$

$\Delta\psi = +0'',36169 \qquad \Delta\lambda + 1'',05943 \qquad \psi^2 = +0.0014$

$\lambda^2 = +1.1933$

$$\frac{\psi_1 + \psi_2}{2} = -369'',70765 \qquad \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = +10923'',71$$

$$\psi = -0'',03697076 \qquad \lambda = +1''.092371$$

Glied No.	$\Delta y'$ in cm			Glied No.	$\Delta x'$ in cm		
1	+	22383	1	1	+	11185	4
2	—	432	5	2	+	865	6
3	+	42	9	3	+	1	6
4	—	16	7	4		—	—
5		—	—	5	—	8	3
6		—	—	6		—	—
7		—	—	7		—	—
8	+	0	2	8	—	0	3
9		—	—	9		—	—
10		—	—	10		—	—
11		—	—	11		—	—
12		—	—	12		—	—
	—	449	2		—	8	6
	+	22426	2		+	12052	6

$\Delta y'$ + 219.77 Meter | $\Delta x'$ + 120.44 Meter
y_1' + 231 064.89 ,, | x_1' — 7023.27 ,,

y_2' + 231 284.66 ,, | x_2' — 6902.83 ,,
y_2' + 231 284.66 ,, g. W. | x_2' — 6902.83 ,, genauer Wert

Differenz 0.00 Meter | Differenz 0.00 Meter

Beispiel 2.

P_1 Piz Lad

Gegeben: L_1 + 3^0 01′ 50″.464
B_1 46^0 50′ 56″.559
y_1' + 231 064.89 m
x_1' — 7 023.27 m

P_2 Piz Schalambert

Gegeben: L_2 +2^0 58′ 03″.571
B_2 46^0 48′ 44″.050

Gesucht: y_2'
x_2'

Nach (R.P.) pag. 106 ist:

ψ_1 — 6′ 11″.51651 | λ_1 + 10918″.41921
ψ_2 — 8′ 23″.81574 | λ_2 + 10691″.36080

Berechnung von $\Delta x'$, $\Delta y'$.

$\psi_2 - \psi_1 = -132''.29923$ | $\lambda_2 - \lambda_1 - 227''.05841$ | $\psi.\lambda - 0.0473$

$\Delta\psi = -\ 13''.22992$ | $\Delta\lambda - 22''.70584$ | $\psi^2 + 0.0019$

| $\lambda^2 + 1.1674$

$\frac{\psi_1+\psi_2}{2} = -437''.66612$ | $\frac{\lambda_1+\lambda_2}{2} = +10804''89$

$\psi = -0''.0437666$ | $\lambda = +\ 1''.080489$

Glied No.		$\Delta x'$ in cm		Glied No.		$\Delta y'$ in cm	
1	—	409140	3	1	—	479716	5
2	—	18350	8	2	+	15651	0
3	—	41	6	3	—	1088	0
4	—	0	9	4	+	351	0
5	+	299	3	5	+	0	1
6	—	0	0	6	+	1	5
7	+	0	6	7		—	—
8	+	8	4	8	—	7	2
9		—		9		—	—
10		—		10		—	—
11		—		11		—	—
12		—		12		—	—
13	—	0	4	13		—	—
	—	427534	0		—	480811	7
	+	308	3		+	16003	6
	—	427225	7		—	464808	1

$\Delta x' = -\ 4272.26$ Meter
$x_1' = -\ 7023.27$ „
$x_1' = -11295.53$ „
$x_2' = -11295.54$ „ gen. Wert
Differenz 0.01 Meter

$\Delta y' = -\ 4648.08$ Meter
$y_1' = +231064.89$ „
$y_2' = +226416.81$ „
$y_2' = +226416.81$ „ gen. W.
Differenz 0.00 Meter

Bern, im Januar 1927.

Auszug aus dem Bericht des Bundesrates über seine Geschäftsführung im Jahre 1926 betreffend das Grundbuch- und Vermessungswesen.

1. *Grundbuchwesen.*

a) *Anmerkung der in den Wasserrechtskonzessionen vorgesehenen Heimfallsrechte.* Mit dem 31. Dezember 1926 ist die in den Kreisschreiben vom 27. März und 7. Dezember 1925 verlängerte Frist zur Anmerkung der in den Wasserrechtskonzessionen vorgesehenen Heimfallsrechte abgelaufen. Kurz vor dem Termin haben zwei Kantone auf Grund besonderer bei ihnen obwaltender Verhältnisse um eine spezielle