

Graphisches Verfahren zur Reduktion optisch gemessener Polygonseiten

Autor(en): **Müller, E. / Zwicky, C.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Schweizerische Geometer-Zeitung = Revue suisse des géomètres**

Band (Jahr): **16 (1918)**

Heft 11

PDF erstellt am: **14.05.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-185056>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Flurnamen“ geplant war, während die amtlich festgelegten „Ortsnamen“ davon unberührt bleiben sollten (s. Referat Bachmann S. 208, S. 210 und S. 211 oben). Flurnamen und Ortsnamen decken sich in der Hauptsache mit den von Herrn Schüle sogenannten Nichtverkehrs- und Verkehrsnamen (s. Referat Schüle S. 237); der Forderung verschiedener Behandlung der beiden Namenkategorien ist also durch die obigen „Grundsätze“ durchaus Rechnung getragen.

Graphisches Verfahren zur Reduktion optisch gemessener Polygonseiten.

Von *E. Müller*, Grundbuchgeometer in Möhlin, und
C. Zwicky, Professor an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich.

Vorbemerkung der Redaktion.

Ueber den obigen Gegenstand ist der Redaktion kürzlich von Herrn E. Müller eine sehr bemerkenswerte Abhandlung zur Verfügung gestellt worden, die sich aber trotz ihrer praktischen Bedeutung für eine Publikation in der Zeitschrift nicht ohne weiteres als geeignet erwies, sondern hiefür in gewisser Hinsicht einer Umarbeitung bedurfte.

Auf den speziellen Wunsch des Hauptredaktors hat der unterzeichnete Mitredaktor die Aufgabe übernommen, diese Umarbeitung vorzunehmen; er konnte diesem Wunsche auch um so eher entsprechen, als die in Frage stehende Materie mit einem von ihm vertretenen Lehrgegenstand in naher Beziehung steht.

Mit Rücksicht auf den Charakter der vorgenommenen Abänderungen empfahl es sich, den Stoff in zwei Teile zu gliedern, indem beim I. Teil diese Abänderungen in der Hauptsache sich auf eine etwas übersichtlichere Gruppierung des Stoffes und auf einige Erweiterungen des Inhalts beschränken, welche im Interesse eines leichteren Verständnisses angezeigt erschienen. Im wesentlichen entspricht daher dieser Teil durchaus dem Inhalte des Manuskriptes des Herrn Müller, weshalb dieser letztere hier auch als Verfasser genannt wird, weil ja die betreffenden Abänderungen durchaus im Rahmen der einem Redaktor zukommenden Korrekturarbeit verbleiben.

Ganz anders liegen die Verhältnisse beim II. Teil, der sich in der Hauptsache mit der nomographischen Methode befaßt. Da hierbei ziemlich komplizierte funktionale Entwicklungen zugrunde gelegt waren, welche sowohl an die Geduld, wie auch an die theoretischen Kenntnisse des Lesers ziemlich hohe Anforderungen stellen, so erschien hier eine vollständige Neubearbeitung sehr angezeigt, um durch eine einfachere, geometrisch übersichtlichere Beweisführung die Materie dem Leser etwas näher zu bringen. Eine solche Neubearbeitung durfte auch insofern um so eher vorgenommen werden, als es sich hierbei nicht um eine Ablehnung einer eigenen Geistesarbeit des Verfassers Müller handeln konnte; denn schon im Anfange der Theorie über Nomographie bemerkt derselbe in einer Fußnote ausdrücklich: „Von hier an folgt die Entwicklung im wesentlichen dem oben (vgl. in der Einleitung) zitierten Werke von M. Pirani.“ Im Anschluß an die theoretischen Grundlagen wurde dann ferner die praktisch wichtige konstruktive Ausführung der Nomogramme etwas eingehender berücksichtigt und ihre Leistungsfähigkeit an Hand von Genauigkeitsbetrachtungen näher untersucht. Und endlich wurde durch zwei Beispiele nachgewiesen, daß die nomographische Methode auch für andere geodätische Rechnungen mit Vorteil Verwendung finden kann. Aus den obigen Gründen ist für den II. Teil — natürlich im Einverständnis mit Herrn Müller — als Verfasser der mit der Umarbeitung beauftragte Mitredaktor genannt worden. Dessen ungeachtet bleibt Herrn Müller ungeschmälert das Verdienst, auf eine nicht unwichtige Neuerung bezüglich der Rechenhilfsmittel aufmerksam gemacht und ihre Zweckmäßigkeit in seiner eigenen Praxis erprobt zu haben. *Zw.*

Aus diesen Vorbemerkungen mögen die gelegentlichen Mitarbeiter unserer Zeitschrift ja nicht etwa den Schluß ziehen, es liege in der Absicht der neuen Redaktion, die ihr eingelieferten Beiträge öfters so umzugestalten, daß dieselben dann als ihr eigenes Produkt publiziert werden müssen. Ich bitte daraus im Gegenteil zu entnehmen, daß Beiträge von gediegemem Inhalt auch dann berücksichtigt werden, wenn es der Redaktion viel Arbeit kostet, um dieselben in eine Form zu bringen, welche die behandelte Materie dem Leser näher bringt. *Redaktion.*

I. Teil.

Einleitung.

Die Verbesserungen, welche die graphischen und mechanischen Rechenhilfsmittel in den letzten Jahren erfahren haben, hat sich die Vermessungstechnik nur zum Teil zunutzen gemacht und zwar hauptsächlich durch die Anwendung der Rechenmaschine und des Rechenschiebers. Es mag sein, daß im allgemeinen die graphischen Methoden für geodätische Rechnungen wenig geeignet sind, weil die Tafeln meistens allzu umfangreich ausfallen würden, in Anbetracht der relativ großen Genauigkeit, welche hier gewöhnlich verlangt werden muß. Immerhin sind dessen ungeachtet doch schon verschiedene graphische Tafeln für geodätische Zwecke veröffentlicht worden.

Ohne auf Vollständigkeit Anspruch zu erheben, erwähnen wir:

Ansermet: De la simplification des calculs trigonométriques, „Schweiz. Geometerzeitung“ 1916, pag. 233—239;

Bremer: Kollineare und andere graphische Rechentafeln für geodätische Rechnungen;

Wenner: Graphische Tafeln für Tachymetrie;

Werkmeister: Graphische Tachymetertafeln für alte Kreisteilung.

Alle diese Tafeln gründen sich in der Hauptsache auf das grundlegende Werk von M. D'Ocagne: „Traité de nomographie“, dessen Studium jedem Vermessungstechniker warm empfohlen werden kann.

Endlich darf noch besonders hingewiesen werden auf das sehr empfehlenswerte Büchlein von M. Pirani: Graphische Darstellung in Wissenschaft und Technik (Sammlung Göschen), in welchem die Nomographie in eleganter Kürze dargestellt wird.

1. Allgemeine Orientierung.

a) *Die Distanzformel.* Während bei Meßtischaufnahmen in kleinerem Maßstab die Berechnung der horizontalen Distanz d aus dem Lattenabschnitt L und dem Höhenwinkel α nach der für Rechenschieber-Rechnung sehr bequemen Formel: $d = (c + k L) \cdot \cos^2 \alpha$, oder eventuell noch einfacher aus $d = k L \cdot \cos^2 \alpha$ erfolgt, ist gemäß den Vorschriften der eidgenössischen Vermessungsinstruktion bei der optischen Messung von Polygonseiten die genauere Formel zugrunde zu legen:

$$\underline{d = k \cdot L \cdot \cos^2 \alpha + c \cdot \cos \alpha.} \quad (1)$$

Hiebei ist aber eine Berechnung von d mittelst des Rechenschiebers ohne besondere Maßnahmen nicht mehr zulässig, weil die damit erzielte Genauigkeit der Rechnungsergebnisse für Polygonseiten nicht ausreicht; anderseits ist die an und für sich einfache logarithmische Berechnung in Anbetracht der großen Zahl der zu bestimmenden Seitenlängen zu umständlich.

b) *Die Zergliederung der Formel.* In Analogie zu dem in der Ausgleichungsrechnung üblichen Verfahren kann die Berechnung der Distanz d dadurch vereinfacht werden, daß man die letztere in zwei Teile Δ und δ zerlegt, und zwar in der Weise, daß Δ einen möglichst bequem zu bestimmenden Näherungswert für d darstellt, während δ eine Verbesserung bedeutet, deren Betrag so klein ist, daß derselbe auch bei der Anwendung weniger genauer Rechnungsmethoden immer noch mit hinreichender Schärfe ermittelt werden kann.

Zu diesem Zwecke setzen wir:

$k = 100 + \Delta k$ und — nur teilweise —: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$.
Damit ergibt sich dann für das Hauptglied von d :

$$\begin{aligned} k \cdot L \cdot \cos^2 \alpha &= (100 + \Delta k) \cdot L \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = \\ &= 100 \cdot L - 100 \cdot L \cdot \sin^2 \alpha + \Delta k \cdot L \cdot \cos^2 \alpha. \end{aligned}$$

Als Näherungswert Δ wählen wir nun das erste Glied des obigen Ausdruckes, so daß sich dann die Verbesserung $\delta = d - \Delta$ aus 3 Summanden zusammensetzt. Damit erhält man nun in $d = \Delta + \delta$ für:

$$\Delta = 100 \cdot L; \quad \delta = -100 \cdot L \sin^2 \alpha + \Delta k \cdot L \cdot \cos^2 \alpha + c \cdot \cos \alpha.$$

Unter Zusammenfassung der letzten zwei Glieder von δ führen wir die beiden Abkürzungen ein:

$$\underline{u = 100 \cdot L \cdot \sin^2 \alpha} \quad \text{und} \quad \underline{v = \Delta k \cdot L \cdot \cos^2 \alpha + c \cdot \cos \alpha}, \quad (2)$$

womit dann d in der einfachen Form erscheint:

$$\underline{d = 100 \cdot L - u + v.} \quad (3)$$

Im nachfolgenden soll nun gezeigt werden, in welcher Weise für die Verbesserung $\delta = -u + v$ die „Zugabe“ v einerseits und der „Abzug“ u anderseits einfach auf graphischem Wege ermittelt werden können.

Eine der vorstehenden analoge Zerlegung der Distanzgleichung finden wir in „Tafeln zur Berechnung von Höhen-

unterschieden aus Horizontaldistanz und Höhenwinkel“, sogenannte Tangententafel, Schweiz. Landestopographie Bern 1905, die im Gegensatz zu dem im folgenden entwickelten Verfahren die Anwendung des gewöhnlichen Rechenschiebers ermöglichen soll.

2. Die Zugabe v .

a) *Uebersicht*. Für ein bestimmtes Instrument haben Δk und c den Charakter von konstanten Größen*; daher stellt die Zugabe

$$v = \Delta k \cdot L \cdot \cos^2 \alpha + c \cdot \cos \alpha$$

eine Funktion von zwei unabhängigen Variablen dar, nämlich von der Lattenablesung L einerseits und von dem Höhenwinkel α andererseits. Jedes Instrument hat andere Werte der Konstanten Δk und c und ergibt daher auch andere Werte für die Funktion v .

Betrachtet man nun die drei Veränderlichen L , α und v als rechtwinklige Koordinaten x , y und z von Punkten P , so liegen diese letztern auf einer krummen Fläche F . Diese Fläche denken wir uns dann in gleich großen Abständen durch Ebenen geschnitten, welche zur x - y -Koordinatenebene parallel verlaufen; in ihrer Projektion auf die letztere, die als Zeichnungsebene gewählt wird, erscheinen alsdann die Schnittkurven in wahrer Größe als sogenannte „*Isophleten*“. Dieselben sind nichts anderes als die Horizontalkurven jener als Terrainoberfläche gedachten Fläche F .

b) *Isophleten-Konstruktion*. Zur Konstruktion dieser Isophleten nehmen wir für v einen bestimmten Wert v_1 an. Damit erhalten wir durch Auflösung nach L :

$$L_1 = \frac{v_1 - c \cdot \cos \alpha}{\Delta k \cdot \cos^2 \alpha}, \quad (4)$$

so daß die Abszisse $x = L_1$ als Funktion $f(\alpha)$ der einen unabhängigen Variablen $y = \alpha$ erscheint und somit eine Kurve C_1 — die Isophlete für v_1 — liefert.

Speziell für $\alpha' = 0$ wird $L' = \frac{v - c}{\Delta k}$, woraus folgt, daß die praktisch allein in Betracht fallenden positiven Werte von L' für

* Bezüglich der Konstanz von Δk vergl. die Bemerkung der Redaktion am Schlusse des I. Teiles.

$v > c$ erhalten werden. Auf diese Weise erhalten wir die Schnitte der Isophleten $v \geq c$ mit der L-Axe.

Andererseits entsprechen den Höhenwinkeln α'' mit $\cos \alpha'' = \frac{v}{c}$ die Minimalwerte der Lattenabschnitte $L'' = 0$. Dies liefert uns die Schnitte der Isophleten $v \leq c$ mit der α -Axe. Die Isophlete $v = c$ geht durch den Koordinaten-Nullpunkt.

Bei dem vom Verfasser verwendeten Instrument hatten die Konstanten k und c die Werte:

$$k = 100,06 \quad \text{und} \quad c = 0,36 \text{ m}$$

womit sich ergibt:

$$\Delta k = +0,06 \quad \text{und} \quad c = 36 \text{ cm}$$

Der Höhenkreis des Instrumentes hatte Zentesimal-Teilung.

Nach der Instruktion soll d höchstens 100 m betragen, so daß 100 cm dem Maximalwert des Lattenabschnittes L entspricht; ferner kann ± 50 g n. T. als äußerste Grenze des Höhenwinkels α betrachtet werden.

Den minimalen und maximalen Werten von L und α entsprechen dann bei dem obigen Instrument folgende Grenzwerte der Funktion v :

	L α	cm g	0		100	
			0	± 50	0	± 50
Trig. Punkt	$\cos \alpha$	—	1	0.7071	1	0.7071
	$\cos^2 \alpha$	—	1	0.5000	1	0.5000
Be- rechnung	1) $\Delta k \cdot L \cdot \cos^2 \alpha$	cm	0	0	6.0	3.0
	2) $c \cdot \cos \alpha$	"	36.0	25.5	36.0	25.5
Resultat	$v = 1) + 2)$	cm	36.0	25.5	42.0	28.5

Beim vorliegenden Instrument variiert somit v zwischen dem Minimalwert 25,5 cm (für $L = 0$ und $\alpha = \pm 50$ g) und dem Maximalwert 42,0 cm (für $L = 100$ und $\alpha = 0$ g), so daß sich im ganzen 16 Isophleten ergeben, wenn man für v mit einem Intervall $\Delta v = 1$ cm alle Werte von 26 cm bis 41 cm zugrunde legt. Da bei einigermaßen justierten Distanzfäden Δk

stets klein sein wird, so liefert $c \cdot \cos \alpha$ immer den Hauptbestandteil von v ; daher wird man auch bei andern Instrumenten annähernd die gleiche Anzahl von Isophleten erhalten. Bei negativen Werten von Δk ergibt sich eine etwas kleinere Anzahl von Isophleten.

Zur Konstruktion dieser Kurven dient nun die Gleichung (4). Dieselbe lautet für die oben angegebenen Werte der Instrumentenkonstanten c und Δk , wenn L , v und c in Zentimeter ausgedrückt werden:

$$L = \frac{v - 36 \cdot \cos \alpha}{0,06 \cdot \cos^2 \alpha}.$$

Die nachstehende Tabelle zeigt die Berechnung der 3 Isophleten zu $v = 35, 36$ und 37 cm für runde Zehnergrade. Zur wirklichen Konstruktion muß L in engern Intervallen von α berechnet werden.

v cm	$\alpha =$	g	0	10	20	30	40
Beliebig	$\cos \alpha$	—	1	0.9877	0.9511	0.8910	0.8090
	$c \cdot \cos \alpha$	cm	36.00	35.56	34.24	32.08	29.12
	$\cos^2 \alpha$	—	1	0.9756	0.9046	0.7939	0.6545
	$N = \Delta k \cdot \cos^2 \alpha$	—	0.06	0.0585	0.0543	0.0476	0.0393
35	$Z_1 = v_1 - c \cdot \cos \alpha$	cm	—1.00	—0.56	+0.76	+2.92	+5.88
	$L_1 = \frac{Z_1}{N}$	„	—16.7	—9.6	14.0	61.2	149.5
$L_1 = 0$ für $\alpha'' = 15$ g 03'.7							
36	$Z_2 = v_2 - c \cdot \cos \alpha$	cm	0	+0.44	+1.76	+3.92	+6.88
	$L_2 = \frac{Z_2}{N}$	„	0	7.5	32.4	82.2	175.0
37	$Z_3 = v_3 - c \cdot \cos \alpha$	cm	+1.00	+1.44	+2.76	+4.92	+7.88
	$L_3 = \frac{Z_3}{N}$	„	16.7	24.6	50.8	103.2	200.5

Die Resultate mit negativem L , sowie diejenigen mit $L > 100$ cm haben zwar keine direkte praktische Bedeutung; ihre Mitberücksichtigung bei der Konstruktion der Kurven hat

aber doch einen gewissen Vorteil, indem dieselben über den Verlauf der Kurven im Intervall $0 < L < 100$ auch noch einen Beitrag liefern, so daß damit eine genauere Zeichnung der Kurven erzielt wird.

In analoger Weise sind auch für die übrigen 13 Isophleten — die aber wesentlich kürzer ausfallen — die Längen L berechnet worden. Bei diesen Kurven können dann für die kleinern, resp. die größern Werte von v die kleinern, resp. die größern Werte von α außer acht gelassen werden.

Mit den Rechnungsergebnissen ist nun die Figur 1 konstruiert worden; in dieser Figur ist noch speziell angedeutet, wie man den zu $L = 98,0$ cm und $\alpha = +19^\circ 22'$ gehörenden Wert $v = 39,7$ oder rund 40 cm auffinden kann. Hieraus ist auch ersichtlich, daß trotz des sehr geringen Umfanges der Figur die Größen v mit mehr als genügender Genauigkeit abgelesen werden können.

E. Müller.

Ein bedeutender Nachteil der hier gewählten nomographischen Berechnung des „Zuschlages v “ liegt in folgendem begründet: Erfahrungsgemäß ändert sich die Multiplikationskonstante der Fadendistanzmesser mit der Zeit. Es genügt daher für Präzisionstachymetrie nicht, für jedes Instrument ein für alle mal die Isophletenschar der Figur 1 zu zeichnen, vielmehr muß die nicht unbedeutende Arbeit voraussichtlich mehrmals, der sich ändernden Multiplikationskonstanten k und dem damit sich ändernden Δk entsprechend, geleistet werden. Ich halte daher die in den vorerwähnten Tangententafeln empfohlene Reduktionsmethode für die bessere, eventuell unter Mitbenützung einer kleinen Tabelle für das vernachlässigte Glied $\Delta k \cdot L \sin^2 \alpha$, die der Kleinheit dieses Gliedes wegen sehr einfach gehalten werden kann.

Redaktion.

Fig. 1

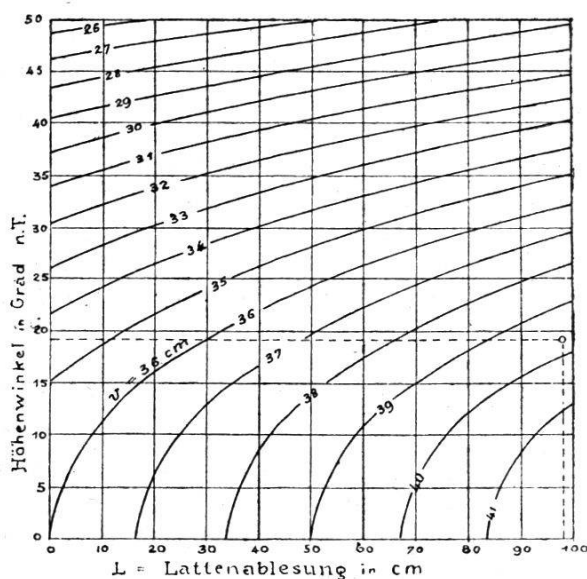


Fig. 1. Diagramm für die v -Funktion.

II. Teil.

Vorbemerkung des Verfassers.

Im Interesse der Sache bin ich mit der nachstehenden Erweiterung und bedeutenden Abänderung der zweiten Hälfte meiner Abhandlung einverstanden, um so mehr, als die Entwicklung des Herrn Professor Zwicky von den Lesern geringere Vorkenntnisse verlangt. Aus finanziellen Gründen liegt es nicht am selbständig erwerbenden Praktiker, eine Idee über das praktische Bedürfnis hinaus bis in alle theoretischen Details zu behandeln. Meine ursprüngliche Arbeit war theoretisch knapp gehalten und sollte den Leser einzig auf die Anwendung der Ergebnisse hinweisen. Es bereitet mir eine große Genugtuung, daß sie von theoretischer Seite solche Beachtung erfährt. *E. Müller.*

3. Der Abzug u .

a) *Numerische Isophleten.* In gleicher Weise wie die Zugabe v ist auch der Abzug

$$u = 100 \cdot L \sin^2 \alpha$$

eine Funktion der beiden unabhängigen Variablen L und α . Daher liegt es nahe, auch die Funktion u durch eine Isophletenschar darzustellen.

Nun ergibt sich zunächst durch Einführung der Abkürzung

$$S = 10 \cdot \sin \alpha \quad (5)$$

für die Funktion u der sehr einfache Ausdruck

$$u = L \cdot S^2. \quad (6)$$

Unter Mitberücksichtigung des Grenzfalles $\alpha = 100^\circ$ — dem natürlich in praktischer Hinsicht keine Bedeutung zukommt — ergibt sich dann für die Beurteilung der Beträge, die der Ausdruck u annehmen kann:

α	g	0	0.636	6.377	33.33...	50	100
$S = 10 \cdot \sin \alpha$	—	0	0.1	1	5	$10 \cdot \sqrt{1/2}$	10
S^2	—	0	0.01	1	25	50	100
$u = 100 \cdot S^2$ max.	cm	0	1	100	2500	5000	10 000

Wenn man die ganz extremen Fälle außer acht läßt, so ergibt sich aus obiger Tabelle, daß für $L = 100$ cm mit

$\alpha = 33^\circ 33'$..., sowie für $L = 50$ cm mit $\alpha = 50^\circ$ die Funktion u auf den großen Betrag $u = 2500$ cm ansteigt, so daß der Betrag von u alle Werte von 0 bis 2500 cm annehmen kann, während die Zugabe v nur zwischen 25,5 und 42,0 cm schwankte.

Soll es dann möglich sein, aus einer Isophletenschar die Werte u auf zirka 2 cm genau abzulesen, dann müssen die Kurven für ein u -Intervall von höchstens 10 cm gezeichnet werden, so daß im ganzen 250 solcher Kurven zu konstruieren sind. Da dies aber allzu viel Mühe verursachen würde, so erkennt man, daß für die u -Funktion die Anwendung der Darstellung durch numerische Isophleten wenig geeignet ist.

b) *Logarithmische Isophleten.* Aus der Gleichung (6) erhält man durch Uebergang zu den Logarithmen:

$$\log u = \log L + 2 \cdot \log S \quad \text{und} \quad \log L = \log u - 2 \cdot \log S. \quad (7)$$

Unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems konstruieren wir nun Punkte P , deren Koordinaten x und y eine Funktion der Variablen L , bzw. der Variablen α sind, und zwar so, daß ist:

$$x = \log L \quad \text{und} \quad y = \log (10 \cdot \sin \alpha) = \log S. \quad (8)$$

Die Koordinaten derjenigen Punkte P , welche einem bestimmten Werte von u entsprechen, d. h. auf einer u -Isophlete liegen, müssen dann der Gleichung (7) genügen, welche nun lautet:

$$x = \log u - 2 \cdot y \quad \text{oder} \quad y = \frac{1}{2} \cdot \log u - \frac{1}{2} \cdot x. \quad (9)$$

Speziell für $L = 1$ wird $x = 0$, also $y = \frac{1}{2} \cdot \log u$. Hieraus folgt nun: Für eine Reihe von Werten $u_1, u_2 \dots u_n$ erhält man als Kurvenschar der Isophleten ein System von parallelen Geraden, welche die Neigung $\tan \beta = -\frac{1}{2}$ besitzen und die Ordinatenachse in den Höhen $\frac{1}{2} \cdot \log u_i$ schneiden.

In der Zeichnung können die Nullwerte für L und α nicht berücksichtigt werden, da ihnen für x und y die Logarithmen $-\infty$ entsprechen; dies hat praktisch insofern keinen Nachteil, als $L = 0$ nie vorkommt und weil für $\alpha = 0$ der Ausdruck $u = 0$ wird; außerdem wird man bei ganz geringen Neigungen zweckmäßiger Zielungen mit horizontalem Fernrohr anwenden, womit dann die Distanzreduktion dahinfällt. Für den Maßstab $\log 10 = 1 = 25$ cm wird dann:

Abszissenachse			Ordinatenachse		
Bezeichnung	Min.	Max.	Bezeichnung	Min.	Max.
Lattenabschnitt L	1 cm	100 cm	Höhenwinkel α	0,636	100 g
Zahl: $x = \log L$	0	2	Funkt. $S = 10 \cdot \sin \alpha$	0,10	10
Länge: $\xi = 25 \cdot x$	0	50 cm	Zahl $y = \log S$	-1	+1
			Länge $\eta = 25 \cdot y$	-25 cm	+25 cm
Breite der Zeichnung: $\Delta \xi = 50 - 0 = 50 \text{ cm.}$			Höhe der Zeichnung: $\Delta \eta = 25 - (-25) = 50 \text{ cm.}$		

An Hand der schematischen Darstellung in Figur 2, in welcher $\log 10 = 1 = 3,63 \text{ cm}$ ist, folgt nun weiter: Wie bei den

Fig. 2

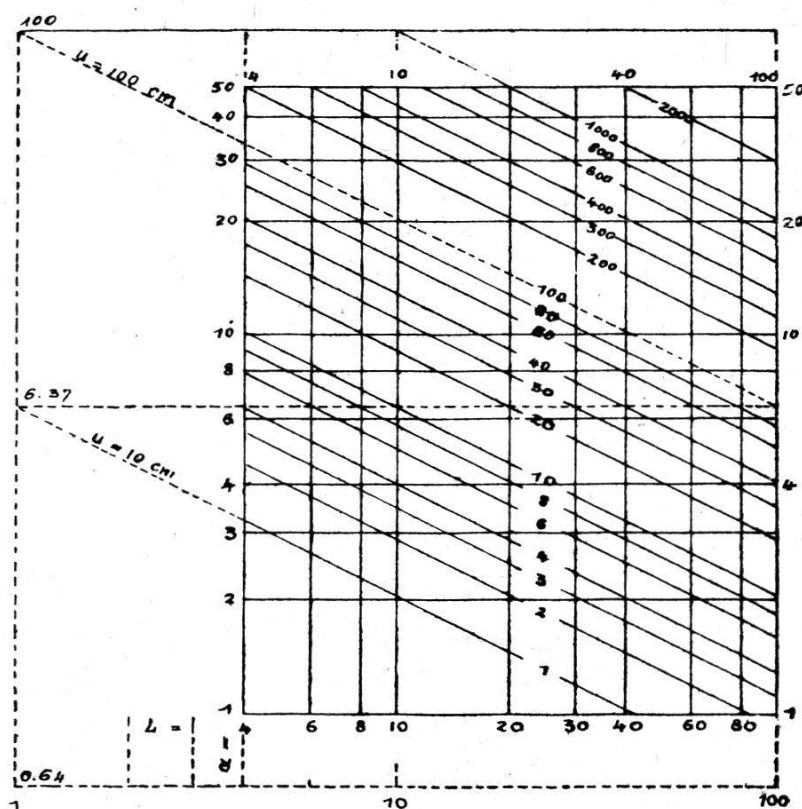


Fig. 2. Schematisches logarithmisches Diagramm für die u-Funktion.

Teilungen des Rechenschiebers werden auf der x-Achse für die zu rundzahligen Werten L gehörenden Längen ξ abgetragen, die Teilpunkte mit den Werten L beziffert und mit Vertikalstrahlen versehen; in gleicher Weise verfährt man auf der Ordinatenachse mit α und η . Aus der Beziehung

$$u = L \cdot S^2 = \frac{L}{100} \cdot (10 S)^2$$

erkennt man für die Bestimmung der Neigung der u -Geraden: diejenige u -Gerade, welche die Endvertikale rechts (mit $L = 100$ und $\xi = 50$ cm) in der Höhe $\eta = 0$ (mit $S' = 1$ und $\alpha = 6\text{ g},377$) schneidet, trifft die Ordinatenachse (mit $L = 1$ und $\xi = 0$) in der Höhe $\eta = 1$ (mit $S = 10$ und $\alpha = 100\text{ g}$). Diese Eigenschaft bleibt auch dann bestehen, wenn für x und y nicht der gleiche Maßstab gewählt wird.

Wenn man nun mit Rücksicht auf die Verhältnisse der Praxis L nur von 4 bis 100 cm und α nur von 1 bis 50g berücksichtigt, so reduziert sich die Breite $\Delta \xi$ und die Höhe $\Delta \eta$ der Zeichnung auf:

$$\Delta \xi = 25 \cdot \{\log 100 - \log 4\} = 25 \cdot (2,0 - 0,602) = 34.95 \text{ cm.}$$

$$\begin{aligned} \Delta \eta &= 25 \cdot \{\log (10 \sin 50\text{ g}) - \log (10 \sin \text{g})\} = \\ &= 25 \cdot \{0,8495 - 9,1961\} = 41.34 \text{ cm.} \end{aligned}$$

Diese Reduktionen können dann eventuell für die Anwendung eines etwas größeren Maßstabes verwertet werden.

Die Schnittpunkte P und P' der Vertikalen durch einen beliebigen Punkt der Abszissenaxe mit zwei aufeinander folgenden Isophleten-Geraden p und p' , die zu den Funktionswerten u und u' gehören, haben die beiden Ordinaten:

$$y = \frac{1}{2} \cdot \log u - \frac{1}{2} x \quad \text{und} \quad y' = \frac{1}{2} \cdot \log u' - \frac{1}{2} x.$$

Es ergibt sich somit für den vertikal gerichteten Abstand PP' :

$$PP' = y' - y = \frac{1}{2} \cdot \{\log u' - \log u\}.$$

Mit $M = \log e = 0,4343$, $\log (1 + x) = M \cdot \{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots\}$ folgt dann:

$$u' = u + \Delta u = u \cdot \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right),$$

$$\text{also } \log u' = \log u + \log \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right)$$

$$y' - y = \Delta y = \frac{1}{2} \cdot \log \left(1 + \frac{\Delta u}{u}\right) = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \frac{\Delta u}{u}$$

(falls $\frac{\Delta u}{u}$ hinreichend klein ist). Man hat daher

$$\Delta y = \frac{1}{2} \cdot M \cdot \frac{\Delta u}{u} = 0,2172 \cdot \frac{\Delta u}{u} \quad \text{und} \quad (10)$$

$$\frac{\Delta u}{u} = 2 \cdot \frac{1}{M} \cdot \Delta y = 4,605 \cdot \Delta y.$$

Wählen wir nun für die Isophleten-Darstellung zwischen
 $u = 1-2-5-10-20-50-100-200-500-1000-2000 \text{ cm}$
 $\Delta u = 0.1 \ 0.2 \ 0.5 \ 1 \ 2 \ 5 \ 10 \ 20 \ 50 \ 100 \text{ cm}$

so erhält man 115 Isophleten-Gerade, wobei $\frac{\Delta u}{u}$ zwischen den Werten 0,04 bis 0,10 variiert. Diesen letzteren Beträgen entsprechen bei den Ordinatenzahlen Δy die Werte 0,00870 bis 0,0217 und bei den Ordinatenlängen $\Delta \eta = 25 \cdot \Delta y$ die Werte 0,218 bis 0,542 cm.

Bei den letztern Kurvenabständen wird es dann durch okulare Schätzung noch möglich sein, einen Punkt mit einem Höhenfehler $d \eta$ von höchstens 0,5 mm zu bestimmen. Damit ergibt sich dann:

$$d \eta = 0,05 \text{ cm}; \quad d y = \frac{d \eta}{25} = 0,002;$$

$$\frac{d u}{u} = 4,605 \cdot d y = 0,0092;$$

d. h. die Funktionswerte u lassen sich auf 1 % genau ablesen. Damit erhält man für $u = 1 \quad 10 \quad 100 \quad 1000 \quad 2000 \text{ cm}$
 $d u = \pm 0,01 \cdot u = \quad \pm 0,01 \quad \pm 0,1 \quad \pm 1 \quad \pm 10 \quad \pm 20 \text{ „}$
 Die *absoluten* Fehler $d u$ sind somit für kleine u sehr gering, für größere Werte von u dagegen unzulässig groß.

Hieraus folgt nun, daß für die hier vorliegende Aufgabe, bei welcher es darauf ankommt, den Wert einer funktionalen Größe u bei kleinen und großen Beträgen derselben mit gleicher absoluter Genauigkeit feststellen zu können, die Darstellung durch logarithmische Isophleten *nicht* zweckmäßig ist. Im Gegensatz dazu eignet sich diese Methode außerordentlich gut für die Erleichterung der Bestimmung der Geschwindigkeiten v und der Wassermengen Q bei Rohrleitungen und bei offenen Kanälen, weil es hier hauptsächlich darauf ankommt, Resultate mit kleinen

relativen Fehlern $\frac{\Delta v}{v}$ und $\frac{\Delta Q}{Q}$ zu gewinnen.

c) *Nomographie*. Wenn die Darstellung einer Funktion durch numerische Isophleten die Konstruktion einer größeren Zahl von Kurven erfordert und deren Vereinfachung durch Uebergang zur logarithmischen Form nicht als zulässig erscheint, empfiehlt es sich meistens, die sogenannte nomographische Methode anzuwenden.

Auf die Erläuterung der Prinzipien dieser neuern, ebenso eleganten wie zweckmäßigen Methode zur numerischen Ausrechnung funktionaler Ausdrücke auf graphischem Wege, gedenken wir gelegentlich später etwas näher einzutreten und beschränken uns daher vorläufig auf den Hinweis, daß das im Nachfolgenden beschriebene Verfahren einer Anwendung der Nomographie entspricht. Diese Beschränkung ist hier um so eher möglich, als sich die in Betracht kommenden Verfahren ohne jede Voraussetzung über Nomographie in einfachster Weise erklären läßt.

In Figur 3 sind in beliebigem Abstände zwei parallele Gerade m und n gezeichnet und deren Anfangspunkte M_0 und N_0 durch eine dritte Gerade p verbunden worden; e bezeichne die Länge der letzten Geraden, also die Entfernung zwischen M_0 und N_0 . Endlich sei t eine beliebige Transversale, welche jene drei Geraden in den Punkten M , N und P schneidet.

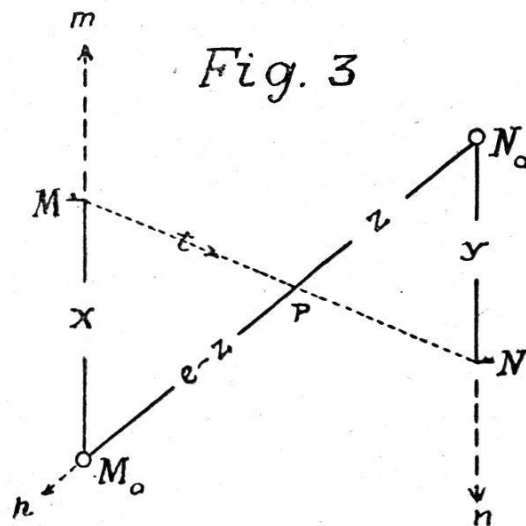


Fig. 3. Grundprinzip für die nomographische Behandlung der u-Funktion.

Diese vier Geraden bilden nun die zwei ähnlichen Dreiecke $M_0 M P$ und $N_0 N P$ mit parallelen Grundlinien auf m und n und gemeinsamer Spitze P . Indem wir für die Dreieckseiten auf m , n und p die Abkürzungen einführen:

$$\begin{aligned} x &= M_0 M \text{ auf } m & \text{und} & & z &= N_0 P \text{ auf } p \\ y &= N_0 N \text{ auf } n & & & e-z &= M_0 P \text{ auf } p, \end{aligned}$$

erhalten wir aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke die Proportion:

$$\frac{M_0 M}{M_0 P} = \frac{N_0 N}{N_0 P} \text{ oder } \frac{x}{e-z} = \frac{y}{z},$$

woraus dann folgt:

$$y = x \cdot \frac{z}{e-z} \quad (11)$$

(Schluß folgt.)