

3.8 The Levasseur-Stafford theorem and its generalization

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 1-2: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **20.09.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

3.8 THE LEVASSEUR-STAFFORD THEOREM AND ITS GENERALIZATION

Let us now recall a result of Levasseur and Stafford:

THEOREM 3.20 ([LS]). *If G is a finite group acting on a finite dimensional vector space V over the complex numbers, then the ring $\mathcal{D}(V)^G$ is generated by the subrings $\mathbf{C}[V]^G$ and $\mathbf{C}[V^*]^G$.*

As an example, notice that if we let $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ act on the complex line by multiplication by the n^{th} roots of 1, we deduce that the operator $x \frac{d}{dx}$ can be expressed as a non commutative polynomial in the operators x^n and $\frac{d^n}{dx^n}$, a non-obvious fact. We note also that this theorem has a purely “quantum” nature, i.e. the corresponding “classical” statement, saying that the Poisson algebra $\mathbf{C}[V \times V^*]^G$ is generated, as a Poisson algebra, by $\mathbf{C}[V]^G$ and $\mathbf{C}[V^*]^G$, is in fact false, already for $V = \mathbf{C}$ and $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

One can prove a similar result for the algebra $eH_c e$. Namely, recall that the algebra $eH_c e$ contains the subalgebras $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W$, and $\mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W$.

THEOREM 3.21 ([BEG]). *If c is generic then the two subalgebras $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W$ and $\mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W$ generate $eH_c e$.*

Notice that if $c = 0$, then $eH_0 e = \mathcal{D}(\mathfrak{h})^W$, so Theorem 3.21 reduces to the Levasseur-Stafford theorem.

REMARK. It is believed that this result holds without the assumption of generic c . Moreover, it is known to be true for all c if W is a Weyl group not of type E and F , since in this case Wallach proved that the corresponding classical statement for Poisson algebras holds true. Nevertheless, the genericity assumption is needed for the proof, because, similarly to the proof of the Levasseur-Stafford theorem, it is based on the simplicity of H_c .

3.9 THE ACTION OF THE CHEREDNIK ALGEBRA TO QUASI-INVARIANTS

We now go back to the study of Q_m . Notice that the algebra $eH_m e$ acts on $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W$, since e gives the W -equivariant projection of $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]$ onto $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W$. It is clear that this action is by differential operators. For instance, the subalgebra $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W \subset eH_m e$ acts by multiplication. Also, an element $q \in \mathbf{C}[\mathfrak{h}^*]^W \subset eH_m e$ acts via the operator $q(D_{x_1}, \dots, D_{x_n})$. By definition this operator coincides with L_q on $\mathbf{C}[\mathfrak{h}]^W$.