4. Une mesure spéciale

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **26.09.2024**

ce qui nous garantit que

$$\dim_{\mathrm{h}} F(\mathcal{A}) \geq \frac{\operatorname{Log}|\mathcal{A}|}{2(\operatorname{Log} N + \operatorname{Log} \frac{1+\sqrt{5}}{2})}\,.$$

Cette minoration nous montre en particulier que cette dimension est strictement positive.

Notons dans l'autre sens que $d = \dim_{\mathrm{h}} F(\mathcal{A}) \leq 1/2$ pour certains alphabets $\mathcal{A}$, par exemple $\mathcal{A} = \{1,4\}$. Cela résulte de la remarque suivante : s'il existe des m arbitrairement grands pour lesquels $\Sigma_m(\alpha) < 1$, alors $\alpha \geq d$; dans le cas contraire, en effet, puisque $\lim_m \alpha_m = d$, $\alpha < \alpha_m$ et $\Sigma_m(\alpha) \geq \Sigma_m(\alpha_m) = 1$ pour m assez grand. Par ailleurs dès que $\Sigma_m(\alpha) < 1$ pour un m fixé, nous avons $\Sigma_{km}(\alpha) < 1$ pour tout $k \geq 1$. En prenant $m = 6$ dans l'exemple précédent, nous obtenons alors $d \leq 0.492$.

4. Une mesure spéciale

Dans la construction de la mesure qui nous intéresse, nous allons éliminer du support les points pour lesquels $\operatorname{Log} Q_m$ est trop loin de sa valeur moyenne, auquel cas les deux structures considérées sur $F(\mathcal{A})$ seront vraiment similaires.

Soit $\delta < \dim_{\mathrm{h}} F(\mathcal{A})$. Le théorème 3.1 et la définition de la dimension de Hausdorff nous assurent que

$$\lim_{m\to\infty} \Sigma_m(\delta) = \lim_{m\to\infty} \sum_{a_1\in\mathcal{A}} \cdots \sum_{a_m\in\mathcal{A}} Q_m(a_1,a_2,\ldots,a_m)^{-2\delta} = +\infty\,;$$

nous pouvons trouver m assez grand pour que $\Sigma_m(\delta) \geq 8$. Fixons provisoirement m ainsi et regardons $F(\mathcal{A})$ comme formé à partir des blocs $\mathcal{A}^m$.

Nous munissons le bloc $\mathcal{A}^m$ de la mesure de probabilité discrète $\nu_m = \nu_{m,\delta}$ définie par

$$\nu_m(\{a_1,\ldots,a_m\}) = Q_m(a_1,a_2,\ldots,a_m)^{-2\delta}/\Sigma_m(\delta)\,.$$

Soit alors $m\sigma_m(\delta)$ la moyenne de $\operatorname{Log} Q_m(a_1,a_2,\ldots,a_m)$ pour cette mesure. Comme

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{Log} Q_m(a_1,a_2,\ldots,a_m) \geq \operatorname{Log} Q_m(1,1,\ldots,1) \geq (m-1)\operatorname{Log}\sqrt{2}$$

nous avons $m\sigma_m(\delta) \geq (m-1)\operatorname{Log}\sqrt{2}$.

Notons

$$Y_1 = Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m), \quad Y_2 = Q_m(a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_{2m}), \dots .$$

Les variables $(Y_j)_j$ forment une suite de variables indépendantes équidistribuées sur l'espace $\Omega = (\mathcal{A}^m)^{\mathbf{N}^*}$ muni de la mesure de probabilité: $\mathbf{P} = \nu_m \times \nu_m \times \dots$.

Par la loi faible des grands nombres, pour $\varepsilon > 0$ nous pouvons trouver $j_0 = j_0(m, \varepsilon)$ tel que pour $j \geq j_0$:

$$\mathbf{P}\Big(\Big|\frac{1}{j}(\operatorname{Log} Y_1 + \operatorname{Log} Y_2 + \dots + \operatorname{Log} Y_j) - \mathbf{E}(\operatorname{Log} Y_1)\Big| \leq \varepsilon \mathbf{E}(\operatorname{Log} Y_1)\Big) > \frac{1}{2}.$$

Par conséquent, à l'aide du lemme 2.3, pour $j \geq j_0$,

$$\begin{aligned} |\operatorname{Log} Q_{jm}(a_1, a_2, \dots, a_{jm}) - jm\sigma_m(\delta)| &\leq \varepsilon jm\sigma_m(\delta) + (j-1)\operatorname{Log} 2 \\ &\leq \Big(\varepsilon + \frac{j-1}{2jm}\Big) jm\sigma_m(\delta) \end{aligned}$$

sur un ensemble $E = E(\varepsilon, j_0)$ de $\mathbf{P}$-mesure $> \frac{1}{2}$; en prenant $m \geq 1/2\varepsilon$ (ce qui fixe j_0 en fonction de ε) et en posant $J_0 = j_0 m$, nous obtenons sur E

$$(8) \qquad |\operatorname{Log} Q_J(a_1, a_2, \dots, a_J) - J\sigma_m(\delta)| \leq 2\varepsilon J\sigma_m(\delta)$$

pour tout $J \geq J_0$ et divisible par m.

J_0 étant fixé, nous regardons cette fois $F(\mathcal{A})$ comme construit autour des blocs $\mathcal{A}^{J_0}$. Soit ν la mesure de probabilité induite sur E par la mesure $\underbrace{\nu_m \times \dots \times \nu_m}_{j_0}$. La mesure μ qui convient est $\times_1^\infty \nu$, obtenue en prenant des copies de ν sur chaque facteur $\mathcal{A}^{J_0}$.

Puisque $Q_m(a_1, a_2, \dots, a_m) = Q_m(a_m, a_{m-1}, \dots, a_1)$, la mesure discrète ν_m est invariante par la transformation $(a_1, \dots, a_m) \to (a_m, \dots, a_1)$ et par définition des variables Y_j, l'ensemble

$$E = \Big\{\Big|\frac{1}{j}(\operatorname{Log} Y_1 + \operatorname{Log} Y_2 + \dots + \operatorname{Log} Y_j) - \mathbf{E}(\operatorname{Log} Y_1)\Big| \leq \varepsilon \mathbf{E}(\operatorname{Log} Y_1)\Big\}$$

est à son tour invariant par la transformation $(a_1, \dots, a_{jm}) \to (a_{jm}, \dots, a_1)$. Il ressort alors de la construction que ν est invariante par la transformation $(a_1, \dots, a_{J_0}) \to (a_{J_0}, \dots, a_1)$; enfin μ est invariante par la transformation $(a_1, \dots, a_J) \to (a_J, \dots, a_1)$ pour tout J multiple de J_0.

Nous retiendrons en particulier de cette construction :

PROPOSITION 4.1. *Pour tout $\varepsilon > 0$ et $1/2 < \delta < \dim_h F(\mathcal{A})$ nous pouvons trouver m, J_0 multiple de m et une mesure de probabilité μ sur $F(\mathcal{A})$ tels que :*

a) $\mu(I) \leq c|I|^{\delta}$, *$I$ intervalle de $[0,1)$, où $c > 0$*

et, pour tout J divisible par J_0,

b) *μ est invariante par la transformation $(a_1, \ldots, a_J) \to (a_J, \ldots, a_1)$,*

c) $Q^{1+2\varepsilon} \geq Q_J(x) \geq Q^{1-2\varepsilon}$, $Q^{1+2\varepsilon} \geq Q_{J-1}(x) \geq Q^{1-2\varepsilon}/(2N)$ *μ-presque sûrement, avec $Q = \exp(J\sigma_m(\delta))$.*

Des mesures vérifiant la propriété a) se rencontrent souvent en théorie de la dimension et permettent d'obtenir une borne inférieure pour celle-ci via le théorème de Frostman (cf [10]).

Démonstration. Il reste à établir la propriété a) qui va découler du lemme 2.2. Soit $I = [t, t+h]$. Quitte à décomposer I en petits intervalles disjoints, nous pouvons supposer $h < \frac{1}{N+2}$. Par le lemme 2.2, I est contenu dans le cylindre s'appuyant sur $\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_\ell$, $1 \leq \tilde{a}_j \leq N$, avec de plus $Q_\ell(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_\ell) \geq (N+2)^{-1} h^{-1/2}$.

Si l'entier p est tel que $pJ_0 \leq \ell < (p+1)J_0$,

$$Q_{pJ_0}(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{pJ_0}) \geq Ch^{-1/2}$$

où C est indépendant de h, et par l'inégalité (6),

$$Q_{pJ_0}(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{pJ_0}) \leq 2^{\lambda} Q_m(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m) \cdots Q_m(\tilde{a}_{(\lambda-1)m+1}, \ldots, \tilde{a}_{\lambda m}),$$

avec $pJ_0 = \lambda m$. Nous en déduisons

$$Q_m(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m) \cdots Q_m(\tilde{a}_{(\lambda-1)m+1}, \ldots, \tilde{a}_{\lambda m}) \geq C 2^{-\lambda} h^{-1/2}. \tag{9}$$

Maintenant, en notant $C(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ le cylindre s'appuyant sur $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, nous pouvons majorer

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(C(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_\ell)) &\leq \mathbf{P}(C(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_{pJ_0})) \\
&= \nu_m(C(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m)) \cdots \nu_m(C(\tilde{a}_{(\lambda-1)m+1} \ldots, \tilde{a}_{\lambda m})) \\
&= Q_m(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_m)^{-2\delta} \cdots Q_m(\tilde{a}_{(\lambda-1)m+1}, \ldots, \tilde{a}_{\lambda m})^{-2\delta} \Sigma_m(\delta)^{-\lambda} \\
&\leq C^{-2\delta} 2^{2\lambda\delta} h^{\delta} \Sigma_m(\delta)^{-\lambda},
\end{aligned}$$

d'après l'estimation (9).

Rappelons que ν est la mesure de probabilité induite sur E par la mesure : $\underbrace{\nu_m \times \cdots \times \nu_m}_{j_0}$ et que $\mathbf{P}(E) \geq 1/2$, où E ne dépend que des J_0 premières variables. Il en résulte que

$$\nu(C(\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_{J_0})) \leq 2\underbrace{(\nu_m \times \cdots \times \nu_m)}_{j_0}(C(\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_{J_0}))\,;$$

nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\mu(C(\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_{pJ_0})) &\leq 2^p\nu_m(C(\tilde{a}_1,\dots,\tilde{a}_m))\cdots\nu_m(C(\tilde{a}_{(\lambda-1)m+1}\dots,\tilde{a}_{\lambda m}))\\ &\leq C^{-2\delta}2^{2\lambda\delta+p}\Sigma_m(\delta)^{-\lambda}h^\delta\,.\end{aligned}$$

Pour finir, nous remarquons que $2^{2\lambda\delta+p} = 2^{\lambda(2\delta+1/j_0)}$, puis que $2^{(2\delta+1/j_0)} \leq 8 \leq \Sigma_m(\delta)$ par choix de m. $\square$

5. Intégrales oscillantes

Nous établissons trois lemmes sur des intégrales oscillantes. Les deux premiers portent sur la mesure de Lebesgue alors que le dernier est une idée originale de Kaufman.

Lemme 5.1. *Si f est C^2 sur $[0,1]$, vérifie $|f'(t)| \geq a$ et $|f''(t)| \leq b$, alors nous avons*

$$\left|\int_0^1 e(f(t))dt\right| \leq \frac{1}{a} + \frac{b}{a^2}\,,$$

avec la notation usuelle $e(x) = \exp(2i\pi x)$.

Il s'agit là d'une version intégrale modifiée du lemme de Kuzmin-Landau, aussi ce que l'on nomme de façon informelle «le critère de la dérivée première».

Le second lemme s'applique lorsque $f'(t)$ s'annule dans l'intervalle en question.

Lemme 5.2. *Si f est C^2 sur $[0,1]$ et $f'(t) = (\alpha t + \beta)g(t)$ où g vérifie $|g(t)| \geq a$ et $|g'(t)| \leq b$ avec $b \geq a$, alors nous avons*

$$\left|\int_0^1 e(f(t))dt\right| \leq 6\frac{b}{a^{3/2}|\alpha|^{1/2}}\,.$$

Classiquement, la méthode de la phase stationnaire donnerait une contribution de l'ordre de $1/\sqrt{f''(-\beta/\alpha)}$, lorsque b/a est de l'ordre de 1, et c'est bien ce que donne notre lemme.

Le dernier lemme permet de comparer l'intégrale d'une fonction par rapport à deux mesures distinctes.