1. Introduction

Objekttyp: **Chapter**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **19.09.2024**

L'Enseignement Mathématique, t. 49 (2003), p. 335–356

ANALYSE DE FOURIER DES FRACTIONS CONTINUES À QUOTIENTS RESTREINTS

par Martine QUEFFÉLEC et Olivier RAMARÉ

ABSTRACT. Let $\mathcal{A}$ be a finite alphabet of positive integers with $|\mathcal{A}| \geq 2$, and $F(\mathcal{A})$ be the set of numbers in $[0,1)$ whose partial quotients belong to $\mathcal{A}$. We construct a Kaufman measure on every such set with Hausdorff dimension $> 1/2$ and establish, in this way, the existence of infinitely many normal numbers in $F(\mathcal{A})$. This improves previous results of Kaufman and Baker.

1. INTRODUCTION

Il est intéressant de classer les ensembles de mesure de Lebesgue nulle : on peut considérer leur cardinalité, leur dimension de Hausdorff, ou préciser le comportement des mesures (singulières) qu'ils portent.

1.1. On sait que les nombres normaux (en toute base) sont de mesure pleine pour la mesure de Lebesgue, et Kahane & Salem [9] ont posé la question suivante : soit μ une mesure borélienne sur $\mathbf{T}$ identifié à $[0,1)$, dont la transformée de Fourier tend vers 0 à l'infini ($\mu \in M_0(\mathbf{T})$) ; est-il encore vrai que μ-presque tout nombre de $[0,1)$ est normal en base 2 par exemple ?

Autrement dit, est-ce que l'ensemble des nombres non-normaux en base 2 est annulé par toute mesure de $M_0(\mathbf{T})$? Ou porte-t-il, au contraire, une mesure de $M_0(\mathbf{T})$?

DÉFINITION 1.1. Un sous-ensemble $E \subset \mathbf{T}$ est dit *de multiplicité (stricte)* s'il existe une mesure (de probabilité) $\in M_0(\mathbf{T})$ telle que $\mu(E) \neq 0$.

Russell Lyons [11] a montré que l'ensemble W^* des nombres non-normaux en base 2 était de multiplicité en précisant la borne inférieure de la vitesse de convergence de $\hat{\mu}(n)$ vers 0, lorsque μ charge positivement W^*. La réponse à la question de Kahane & Salem est donc : non.

1.2. Les nombres à quotients partiels bornés sont de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.

Pour chaque $N \geq 2$, notons $F(N)$ l'ensemble des irrationnels de $[0,1)$ dont le développement en fraction continue ne comporte que des entiers $\in \{1,\dots,N\}$. C'est un compact de type Cantor, de mesure de Lebesgue nulle. Mais sa dimension de Hausdorff est non nulle et tend vers 1 quand $N \to \infty$. La dimension de Hausdorff de $F(2)$ est de l'ordre de $0,53\dots$.

Kaufman [8] sait construire sur tout ensemble $F(N)$ dont la dimension de Hausdorff est $> 2/3$ (en fait, dont la dimension de Hausdorff est $> \frac{1+\sqrt{17}}{8} \simeq 0,64$) une mesure de probabilité dont la transformée de Fourier est en $O(|n|^{-\delta})$ où $\delta > 0$, quand $|n| \to \infty$. Il résulte des encadrements précis de cette dimension, dus à Hensley [6], que $F(N)$ est un ensemble de multiplicité pour $N \geq 3$. La question reste alors en suspens pour $N = 2$.

1.3. Il n'existe pas de lien entre le développement en base entière et le développement en fraction continue d'un nombre réel et on peut se demander s'il existe des nombres normaux à quotients partiels bornés. Dans son livre [12], Montgomery rapporte l'observation faite par Baker à la parution du résultat de Kaufman, observation que l'on peut formuler ainsi :

THÉORÈME 1.2 (Baker). *Pour tout $N \geq 3$, il existe une infinité de nombres normaux dans $F(N)$.*

Subsiste alors la question de savoir s'il existe un nombre normal appartenant à $F(2)$ (et même une infinité).

Par une relecture soigneuse de la construction de Kaufman, nous apportons une réponse positive à cette dernière question ; plus précisément, nous établissons

THÉORÈME 1.3. *Il existe une infinité de nombres normaux dans $F(\mathcal{A})$ pour tout ensemble $\mathcal{A}$ fini d'entiers ≥ 1 contenant au moins deux éléments et tel que $\dim_{\mathrm{h}} F(\mathcal{A}) > 1/2$.*

Ce théorème est la conséquence facile du théorème suivant, qui annonce l'existence d'une mesure *de Kaufman* sur $F(\mathcal{A})$ pour un tel alphabet.

THÉORÈME 1.4. *Soit $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'entiers ≥ 1. Nous supposons que $\mathcal{A}$ contient au moins deux éléments et que la dimension de Hausdorff de l'ensemble $F(\mathcal{A})$ est $> \frac{1}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $\frac{1}{2} < \delta < \dim_{\mathrm{h}} F(\mathcal{A})$. Il existe une mesure de probabilité μ sur $F(\mathcal{A})$ et deux constantes > 0, c_1 et c_2, telles que*

- *pour tout borélien S, $\mu(S) \leq c_1(\mathrm{diam}\, S)^\delta$;*
- *pour tout $u > 0$, $|\hat{\mu}(u)| \leq c_2(1+|u|)^{\eta+8\varepsilon}$ avec $\eta = \frac{\delta(1-2\delta)}{(2\delta+1)(4-\delta)}$.*

L'article est construit comme suit: après des rappels sur le développement en fraction continue et les ensembles $F(\mathcal{A})$, nous reprenons en grande partie la construction de Kaufman en l'adaptant à notre propos pour établir le théorème 1.4, puis nous en déduisons le théorème 1.3 par une démarche classique désormais (voir aussi [13],[14]) et qu'utilisait déjà Baker [1].

2. LES ENSEMBLES $F(\mathcal{A})$

Soit $N \geq 2$ et $\mathcal{A}$ un ensemble fini d'entiers $\subset [1,\dots,N]$ contenant au moins deux éléments.

Nous nous intéressons à l'ensemble $F(\mathcal{A})$ des irrationnels de $[0,1)$ dont le développement en fraction continue $[0; a_1, a_2, \dots]$ est tel que $a_i \in \mathcal{A}$ pour tout $i \geq 1$.

Si $x = [0; a_1, a_2, \dots] \in F(\mathcal{A})$, notons $\frac{P_k(x)}{Q_k(x)} := \frac{P_k}{Q_k} = [0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ la k-ième réduite de x ; nous avons ainsi $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, $P_1 = 1$ et $Q_1 = a_1$. Pour exprimer les P_k et Q_k, il est commode d'introduire les matrices de déterminant -1

$$A_i(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i(x) \end{pmatrix}.$$

Alors

$$M_k(x) := A_k(x) \dots A_1(x) = \begin{pmatrix} P_{k-1}(x) & Q_{k-1}(x) \\ P_k(x) & Q_k(x) \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Il ressort de ces récurrences que $P_k(x)$ et $Q_k(x)$ sont en fait des polynômes en $a_1, \dots, a_k$, liés par la relation $P_{k-1}Q_k - Q_{k-1}P_k = (-1)^k$. Par transposition dans (1), il vient: