4. Invariance de la fibration de Tits

4. Invariance de la fibration de Tits

4.1 La fibration de Tits

Pour étudier les endomorphismes d'une variété complexe compacte, l'existence de fibrations invariantes est un atout crucial. Nous avons déjà signalé les fibrations d'Albanese et pluricanoniques dans la partie 2. Le troisième exemple est fourni par le processus de réduction algébrique. Il donne naissance à une fibration dont les fibres sont les sous-variétés sur lesquelles toute fonction méromorphe est constante. Tout endomorphisme préserve cette fibration; l'action induite sur la base correspond à celle de l'endomorphisme f par composition sur le corps des fonctions méromorphes. Dans le cas général, il s'agit d'une fibration méromorphe (voir [28]) mais pour les variétés homogènes, on dispose du théorème suivant ([1], theorème 6.2):

Théorème 4.1. *Soit X une variété homogène compacte. Il existe une variété homogène projective Y et une fibration localement triviale $\rho\colon X \to Y$ telle que:*

(i) *Les fibres de ρ sont parallélisables,*

(ii) *ρ réalise un isomorphisme entre le corps des fonctions méromorphes de X et celui de Y,*

(iii) *tout endomorphisme de X permute les fibres de ρ.*

D'après le théorème de Borel et Remmert, Y est le produit d'une variété abélienne par une variété de drapeaux. Une façon de définir la fibration de Tits est de composer la fibration précédente avec la projection de sa base sur la variété de drapeaux. Le théorème précédent et la proposition 3.3 montrent ainsi que la fibration de Tits est invariante par tout endomorphisme.

Proposition 4.2. *La fibration de Tits d'une variété homogène compacte est invariante par tout endomorphisme.*

Pour obtenir ce résultat, nous avons employé une définition quelque peu inhabituelle de la fibration de Tits. Voici la construction initiale de Jacques Tits. Soit $X = G/H$ une variété homogène compacte, avec H un sous-groupe fermé du groupe de Lie complexe G. Notons H^0 la composante connexe de l'élément neutre dans H et N le normalisateur de H^0. On peut montrer que G/N est une variété de drapeaux. On obtient ainsi une fibration de X sur une variété de drapeaux Q qui s'avère être la fibration de Tits; en particulier, cette construction ne dépend pas de l'écriture de X sous la forme G/H. Les fibres sont isomorphes au quotient du groupe de Lie complexe $L = N/H^0$ par le sous-groupe discret cocompact $\Gamma = H/H^0$; ce sont donc des variétés parallélisables connexes. Nous renvoyons le lecteur à [9], [27], [15] et [2] pour les démonstrations de ces résultats.

VOCABULAIRE. Si X est une variété homogène compacte, les fibres et la base de la fibration de Tits de X seront appelées *fibres de Tits* et *base de Tits* de X.

4.2 PREMIÈRE APPLICATION

Soit Q la base et F la fibre de la fibration de Tits d'une variété homogène compacte X. Si f est un endomorphisme de X, il induit un endomorphisme $\bar{f}$ de la variété de drapeaux Q. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Paranjape et Srinivas. S'il apparaît un facteur $Q = Q_0 \times Q_1$ sur lequel $\bar{f}$ induit un automorphisme $\bar{f}_0 \colon Q_0 \to Q_0$, la dynamique de f s'appauvrit considérablement: $\bar{f}_0$ est induite par une transformation linéaire isotope à l'identité.

Afin de démontrer le théorème 1.1, nous pourrons donc supposer que la base Q de la fibration de Tits est un produit d'espaces projectifs:

$$Q = \mathbf{P}^{m_1} \times \cdots \times \mathbf{P}^{m_k}, \quad k \in \mathbf{N}, \tag{11}$$

et que f agit diagonalement: $\bar{f} = (\bar{f}_1, \ldots, \bar{f}_k)$ où $\bar{f}_j \in \mathrm{End}(\mathbf{P}^{m_j})$.

Soit q un point de Q et $\mathbf{P}^{m_j}_q$ l'espace projectif qui passe par q et est donné par le $j^{\text{ème}}$ facteur du produit (11). L'image réciproque de la fibration de Tits par l'injection $\mathbf{P}^{m_j}_q \to Q$ ne dépend pas de q car X est homogène. On obtient ainsi une variété homogène X_j dont la fibration de Tits a des fibres isomorphes à celles de X et une base isomorphe à $\mathbf{P}^{m_j}$. Puisque tout endomorphisme d'un espace projectif admet des points fixes, f induit un endomorphisme de X_j. Nous étudierons donc d'abord les endomorphismes des variétés homogènes dont la base de Tits est un espace projectif.

5. QUELQUES EXEMPLES

Présentons maintenant quelques exemples qui illustrent l'invariance de la fibration de Tits et donnent une petite idée des phénomènes qui peuvent apparaître lorsque la variété homogène n'est pas kählérienne.