

Appendix : Examples of holomorphic endomorphisms

Objektyp: **Appendix**

Zeitschrift: **L'Enseignement Mathématique**

Band (Jahr): **49 (2003)**

Heft 3-4: **L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE**

PDF erstellt am: **24.04.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

APPENDIX: EXAMPLES OF HOLOMORPHIC ENDOMORPHISMS

The following examples appeared after the discussion I had with Spencer Bloch and David Mumford.

(1) TWISTED HOPF MANIFOLDS

Divide $\mathbf{C}^n \setminus 0$ by the action of a linear operator A without eigenvalues in the unit disk. All endomorphisms of the quotient ($n > 1$) come from polynomial maps $\tilde{f}: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$. For such an endomorphism, its entropy and "lov" are probably equal to "log deg".

EXAMPLE. $A: (z_1, z_2) \mapsto (\lambda_1 z_1, \lambda_2 z_2)$ and $\tilde{f}: (z_1, z_2) \mapsto (z_1^p, z_2^p)$.

(2) GENERALIZED HOPF MANIFOLDS

Let $f_0: X_0 \rightarrow X_0$ be an endomorphism. Take a line bundle L over X_0 such that $f_0^*(L) = \bigotimes^p L$ ($:= L \otimes \cdots \otimes L$, p times). Locating such an L is usually quite easy by looking at $\text{Pic}(X_0)$. Denote by Y the total space of L . There is a fiberwise map $\tilde{f}: Y \rightarrow Y$ lifting f_0 and acting on fibers as $z \mapsto z^p$. If we divide Y by a fiberwise action of $\mathbf{Z}$ (it is $z \mapsto z_0 z$, $z_0 \neq 0$, in each fiber) we get $f: Y/\mathbf{Z} \rightarrow Y/\mathbf{Z}$.

There is another way to compactify Y by taking the total space of the one-dimensional projective bundle associated to L . The endomorphism $\tilde{f}$ canonically extends to this compactification.

(3) THE CALABI-ECKMANN MANIFOLDS

Let us take $(\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^\ell) \setminus ((\mathbf{C}^k \times 0) \cup (0 \times \mathbf{C}^\ell))$ and divide by the following action of $\mathbf{C}$:

$$(z_1, z_2) \mapsto (A_1^\lambda z_1, A_2^\lambda z_2), \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

A_1 and A_2 are appropriate linear operators in $\mathbf{C}^k$ and $\mathbf{C}^\ell$. For example, $A_1^\lambda = \exp \lambda$, $A_2^\lambda = \exp i\lambda$, where λ is a scalar. In the last case, the factor manifold possesses an endomorphism f which lifts to the following polynomial map

$$\mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^\ell \rightarrow \mathbf{C}^k \times \mathbf{C}^\ell : (z_1, \dots, z_{k+\ell}) \mapsto (z_1^p, \dots, z_{k+\ell}^p).$$

Recall that the Calabi-Eckmann manifolds are diffeomorphic to $\mathbf{S}^{2k-1} \times \mathbf{S}^{2\ell-1}$. The above map f has degree $d = (2(k + \ell - 1))^p$ and $h(f) = \text{lov } f = \log d$.

(4) BLOWING UP

Let us take $W \subset V_0$ and an endomorphism $f: V_0 \rightarrow V_0$ such that $f^{-1}(W) = W$. The endomorphism f can be sometimes lifted to the manifold V obtained by blowing up W .

EXAMPLE. $V_0 = \mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$, W is the single point $(0, 0)$, and $f: (z_1, z_2) \mapsto (z_1^p, z_2^p)$.

(5) CONCLUDING REMARKS

A typical compact complex manifold has very few endomorphisms. For example, manifolds with nontrivial Kobayashi volume have no endomorphisms of degree ≥ 2 . Do Grassmann manifolds have such endomorphisms? (No, see [3'].)

REFERENCES

- [1] ARTIN, M. and B. MAZUR. On periodic points. *Ann. of Math.* (2) 81 (1965), 82–99.
- [1'] KALOSHIN, V. YU. and B. R. HUNT. A stretched exponential bound on the rate of growth of the number of periodic points for prevalent diffeomorphisms I. *Electronic Research Announcements of AMS* 7 (April 18, 2001), 17–27.
- [2] BOWEN, R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.* 153 (1971), 401–414.
- [3] MILNOR, J. On the Betti numbers of real varieties. *Proc. Amer. Math. Soc.* 15 (1964), 275–280.
- [3'] PARANJAPPE, K. H. and V. SRINIVAS. Self maps of homogeneous spaces. *Invent. Math.* 98 (1989), 425–444.
- [4] MISIUREWICZ, M. and F. PRZYTICKI. Topological entropy and degree of smooth mappings. *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.* 25 (1977), 573–574.
- [5] SHUB, M. Dynamical systems, filtrations and entropy. *Bull. Amer. Math. Soc.* 80 (1974), 27–41.
- [5'] GROMOV, M. *Partial Differential Relations*. Springer, 1986.

Mikhail Gromov

Institut des Hautes Études Scientifiques
 35, route de Chartres
 F-91440 Bures-sur-Yvette
 France